

§2.2 函数的单调 性与最值

考试要求

- 1.借助函数图象，会用数学符号语言表达函数的单调性、最值，理解实际意义.
- 2.掌握函数单调性的简单应用.

内容索引

第一部分

落实主干知识

第二部分

探究核心题型

第三部分

课时精练

第一部分

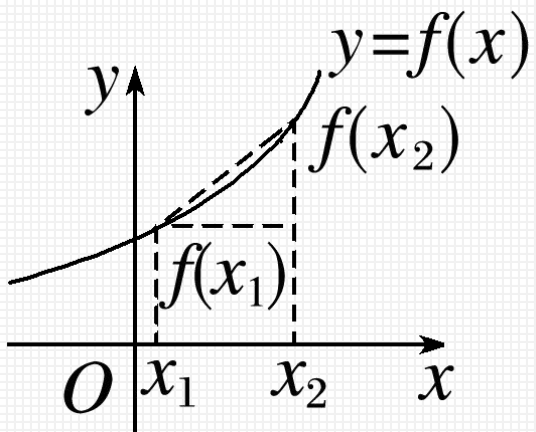
落实主干知识

1.函数的单调性

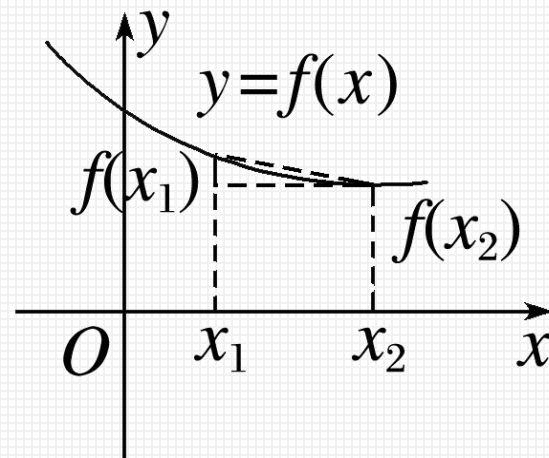
(1)单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subseteq D$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in I$	
	当 $x_1 < x_2$ 时，都有 <u>$f(x_1) < f(x_2)$</u> ， 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增	当 $x_1 < x_2$ 时，都有 <u>$f(x_1) > f(x_2)$</u> ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减

图象
描述



自左向右看图象是上升的



自左向右看图象是下降的

(2)单调区间的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 I 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

2.函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在实数 M 满足	
条件	(1) $\forall x \in D$ ，都有 <u>$f(x) \leq M$</u> ； (2) $\exists x_0 \in D$ ，使得 <u>$f(x_0) = M$</u>	(1) $\forall x \in D$ ，都有 <u>$f(x) \geq M$</u> ； (2) $\exists x_0 \in D$ ，使得 <u>$f(x_0) = M$</u>
结论	M 为 $f(x)$ 的最大值	M 为 $f(x)$ 的最小值

常用结论

1. $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 (< 0)$ 或 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 (< 0) \Leftrightarrow f(x)$ 在区间 I 上单调递增(减).
2. 在公共定义域内, 增函数 + 增函数 = 增函数, 减函数 + 减函数 = 减函数.
3. 函数 $y = f(x)$ ($f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$) 在公共定义域内与 $y = -f(x)$, $y = \frac{1}{f(x)}$ 的单调性相反.
4. 复合函数的单调性: 同增异减.

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)因为 $f(-3) < f(2)$, 则 $f(x)$ 在 $[-3, 2]$ 上是增函数.(×)

(2)函数 $f(x)$ 在 $(-2, 3)$ 上单调递增, 则函数的单调递增区间为 $(-2, 3)$.(×)

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2]$ 和 $(2, 3)$ 上均为增函数, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上为增函数.(×)

(4)函数 $y = \frac{1}{x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.(×)

1. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是

A. $y = x^2 - 1$

B. $y = x^3$

C. $y = 2^x$

☒ D. $y = -x + 2$

2. $y = \frac{x-1}{x-2}$ 在 $[3, 4]$ 上的最大值为

- ☒ A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 4

解析

$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1,$$

$\because y = \frac{1}{x-2} + 1$ 在 $[3, 4]$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x=3$ 时, y 取得最大值, 最大值为 $\frac{1}{3-2} + 1 = 2$.

3. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的减函数，则满足 $f(2x-1) > f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

解析

$\because f(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$,

$\therefore 2x-1 \geqslant 0$, 即 $x \geqslant \frac{1}{2}$,

又 $\because f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的减函数,

$\therefore 2x-1 < \frac{1}{3}$, 即 $x < \frac{2}{3}$,

则 x 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

第二部分

探究核心题型

命题点1 函数单调性的判断

例1 (多选)下列函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

☒ A. $y = e^x - e^{-x}$

B. $y = |x^2 - 2x|$

☒ C. $y = 2x + 2\cos x$

D. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

解析

$\because y=e^x$ 与 $y=-e^{-x}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$\therefore y=e^x-e^{-x}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 A 正确;

由 $y=|x^2-2x|$ 的图象(图略)知, B 不正确;

对于选项 C, $y' = 2-2\sin x \geq 0$,

$\therefore y=2x+2\cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 正确;

$y=\sqrt{x^2+x-2}$ 的定义域为 $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$, 故 D 不正确.

命题点2 利用定义证明函数的单调性

例2 试讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ ($a \neq 0$) 在 $(-1, 1)$ 上的单调性.

解

方法一 设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

$$f(x) = a \left(\frac{x-1+1}{x-1} \right) = a \left(1 + \frac{1}{x-1} \right),$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a \left(1 + \frac{1}{x_1-1} \right) - a \left(1 + \frac{1}{x_2-1} \right) = \frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)},$$

由于 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

所以 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - 1 < 0$, $x_2 - 1 < 0$,

故当 $a > 0$ 时, $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减;

当 $a < 0$ 时, $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

解

方法二
$$f'(x) = \frac{(ax)'(x-1) - ax(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1) - ax}{(x-1)^2} = -\frac{a}{(x-1)^2}.$$

当 $a > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减;

当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

确定函数单调性的四种方法

(1)定义法;

(2)导数法;

(3)图象法;

(4)性质法.

跟踪训练1 (1)函数 $g(x)=x\cdot|x-1|+1$ 的单调递减区间为

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

☒ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

C. $[1, +\infty)$

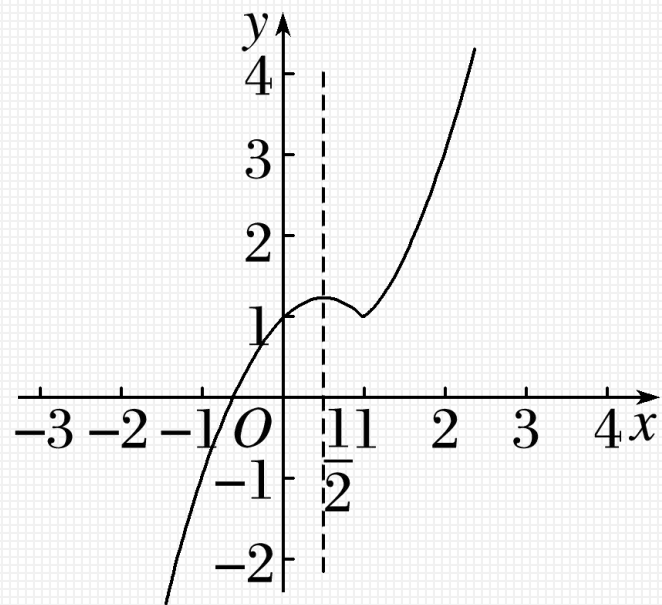
D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

解析

$$g(x)=x\cdot|x-1|+1=\begin{cases} x^2-x+1, & x\geq 1, \\ -x^2+x+1, & x<1, \end{cases}$$

画出函数图象，如图所示，

根据图象知，函数的单调递减区间为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.



(2)函数 $f(x)=2^{-x^2-2x}$ 的单调递增区间是

A. $[-1, +\infty)$

 B. $(-\infty, -1)$

C. $(-\infty, 0)$

D. $(0, +\infty)$

解析

$f(x)=2^{-x^2-2x}$ 分解为 $y=2^u$ 和 $u=-x^2-2x$ 两个函数, $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,
 $u=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $[-1, +\infty)$
上单调递减,

根据复合函数单调性得到函数 $f(x)=2^{-x^2-2x}$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增.

命题点1 比较函数值的大小

例3 (2023·成都模拟)已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立, 若 $a = f(\ln \sqrt{2})$, $b = f(3^{\frac{1}{3}})$, $c = f(e^{\frac{1}{3}})$, 则 a, b, c 的大小关系是

A. $c < b < a$

 B. $a < c < b$

C. $a < b < c$

D. $c < a < b$

解析

$\because$ 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立,

$\therefore$ 此时函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增,

又 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore 1 < e^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{又 } 0 < \ln \sqrt{2} < 1, \therefore \ln \sqrt{2} < e^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{3}},$$

$$\therefore f(3^{\frac{1}{3}}) > f(e^{\frac{1}{3}}) > f(\ln \sqrt{2}), \text{ 即 } a < c < b.$$

命题点2 求函数的最值

例 4 函数 $f(x) = \frac{x^2-2}{x} - \ln(4-x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 上的最大值为 $\frac{7}{3}$.

解析

$y = \frac{x^2-2}{x} = x - \frac{2}{x}$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

$y = \ln(4-x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(3) = \frac{9-2}{3} - 0 = \frac{7}{3}.$$

命题点3 解函数不等式

例 5 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - \log_2(x+2)$, 若 $f(a-2) > 3$, 则 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

解析

由 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - \log_2(x+2)$ 知,

$f(x)$ 在定义域 $(-2, +\infty)$ 上是减函数, 且 $f(-1) = 3$,

由 $f(a-2) > 3$, 得 $f(a-2) > f(-1)$, $\therefore \begin{cases} a-2 < -1, \\ a-2 > -2, \end{cases}$

解得 $0 < a < 1$.

命题点4 求参数的取值范围

例6 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax, & x \geq 1, \\ ax - 1, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则实数 a 的取值范围是

A. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

 B. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$

C. $(0, 1)$

D. $(0, 1]$

解析

因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax, & x \geq 1, \\ ax - 1, & x < 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$$\text{所以} \begin{cases} a \leq 1, \\ a > 0, \\ 1 - 2a \geq a - 1, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < a \leq \frac{2}{3},$$

所以实数 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{2}{3}\right]$.

- (1)比较函数值的大小时，先转化到同一个单调区间内，然后利用函数的单调性解决.
- (2)求解函数不等式时，由条件脱去“ f ”，转化为自变量间的大小关系，应注意函数的定义域.
- (3)利用单调性求参数的取值(范围).根据其单调性直接构建参数满足的方程(组)(不等式(组))或先得到其图象的升降，再结合图象求解.对于分段函数，要注意衔接点的取值.

跟踪训练 2 (1)(2023·兰州模拟)设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3, & x\leq 2, \\ \log_2 x, & x>2, \end{cases}$ 则

满足不等式 $f(2x-1)<2$ 的解集是

A. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

B. $\left[2, \frac{5}{2}\right)$

C. $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

 D. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/028035131072006132>