

## 新疆喀什市 2024 届高三模拟考试试题（一）数学试题

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
- 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
- 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{(x, y) | y = \sqrt{1-x^2}\}$ ， $B = \{(x, y) | y = 2x\}$ ，则  $A \cap B$  中元素的个数为( )

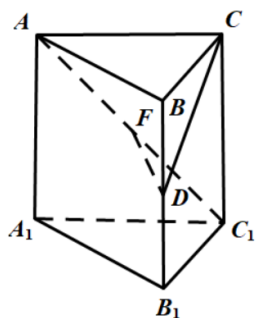
- A. 3                      B. 2                      C. 1                      D. 0

2. 若  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，则  $\cos 2\alpha =$  ( )

- A.  $-\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{4}{5}$                       D.  $\frac{3}{5}$

3. 在棱长均相等的正三棱柱  $ABC = A_1B_1C_1$  中， $D$  为  $BB_1$  的中点， $F$  在  $AC_1$  上，且  $DF \perp AC_1$ ，则下述结论：①

$AC_1 \perp BC$ ；②  $AF = FC_1$ ；③平面  $DAC_1 \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ；④异面直线  $AC_1$  与  $CD$  所成角为  $60^\circ$  其中正确命题的个数为( )



- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

4. 已知函数  $f(x) = (e^x - a)\left(ax + \frac{1}{e}\right)$ ，若  $f(x) \geq 0 (x \in R)$  恒成立，则满足条件的  $a$  的个数为 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

5. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ， $O$  为坐标原点， $F_1$ 、 $F_2$  为其左、右焦点，点  $G$  在  $C$  的渐近线上，

$F_2G \perp OG$ ，且  $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$ ，则该双曲线的渐近线方程为 ( )

- A.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$                       B.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$                       C.  $y = \pm x$                       D.  $y = \pm \sqrt{2}x$

6. 一个正四棱锥形骨架的底边边长为2，高为 $\sqrt{2}$ ，有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切，则该球的表面积为（ ）

- A.  $4\sqrt{3}\pi$       B.  $4\pi$       C.  $4\sqrt{2}\pi$       D.  $3\pi$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2, n(a_{n+1}-a_n)=a_n+1, n \in N^*$ ，若对于任意的 $a \in [-2, 2], n \in N^*$ ，不等式

$\frac{a_{n+1}}{n+1} < 2t^2 + at - 1$ 恒成立，则实数 $t$ 的取值范围为（ ）

- A.  $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$       B.  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$       D.  $[-2, 2]$

8. 若非零实数 $a, b$ 满足 $2^a = 3^b$ ，则下列式子一定正确的是（ ）

- A.  $b > a$       B.  $b < a$   
C.  $|b| < |a|$       D.  $|b| > |a|$

9. 已知复数 $z$ 满足 $z \cdot (1+2i) = 5$  ( $i$ 为虚数单位)，则在复平面内复数 $z$ 对应的点位于( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

10.  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的二项展开式中， $x^2$ 的系数是（ ）

- A. 70      B. -70      C. 28      D. -28

11. 已知实数 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的最小值为

- A.  $-\frac{2}{3}$       B.  $-\frac{5}{4}$   
C.  $-\frac{4}{3}$       D.  $-\frac{1}{2}$

12. 已知复数 $z = (1+i)(3-i)$  ( $i$ 为虚数单位)，则 $z$ 的虚部为（ ）

- A. 2      B.  $2i$       C. 4      D.  $4i$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知一个四面体 $ABCD$ 的每个顶点都在表面积为 $9\pi$ 的球 $O$ 的表面上，且 $AB = CD = a$ ，

$AC = AD = BC = BD = \sqrt{5}$ ，则 $a =$ \_\_\_\_\_.

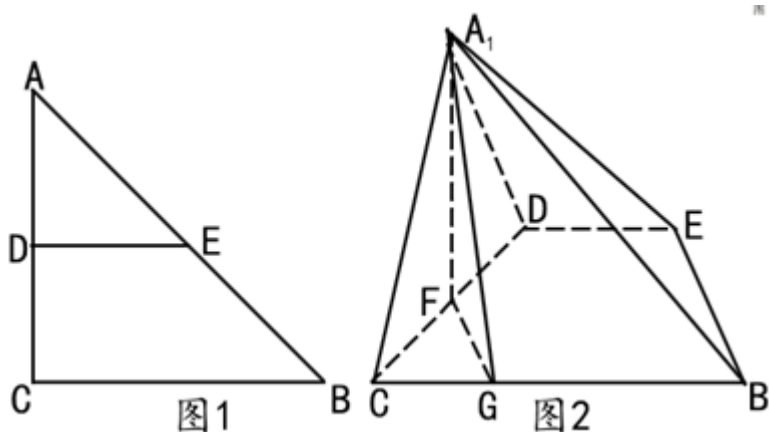
14. 已知集合 $U = \{1, 3, 5, 9\}$ ， $A = \{1, 3, 9\}$ ， $B = \{1, 9\}$ ，则 $C_U(A \cup B) =$ \_\_\_\_\_.

15. 设集合  $A = \{-1, a\}$ ,  $B = \left\{e^{\frac{1}{e}}, 2\right\}$  (其中  $e$  是自然对数的底数), 且  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则满足条件的实数  $a$  的个数为 \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \cos x - \log_2(2^x + 1) + ax (a \in R)$  为偶函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

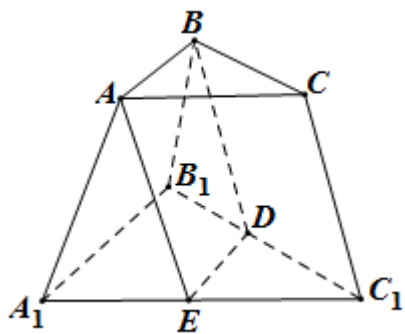
17. (12 分) 如图 1, 在等腰  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $D, E$  分别为  $AC, AB$  的中点,  $F$  为  $CD$  的中点,  $G$  在线段  $BC$  上, 且  $BG = 3CG$ 。将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折起, 使点  $A$  到  $A_1$  的位置 (如图 2 所示), 且  $A_1F \perp CD$ 。



(1) 证明:  $BE \parallel$  平面  $A_1FG$ ;

(2) 求平面  $A_1FG$  与平面  $A_1BE$  所成锐二面角的余弦值

18. (12 分) 如图, 已知在三棱台  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC = 2AB = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $A_1B_1 \perp BB_1$ .



(1) 求证:  $AB \perp CC_1$ ;

(2) 过  $AB$  的平面  $ABDE$  分别交  $B_1C_1, A_1C_1$  于点  $D, E$ , 且分割三棱台  $ABC - A_1B_1C_1$  所得两部分几何体的体积比为  $V_{AA_1E-BB_1D} : V_{ABC-BDC_1} = 4:3$ , 几何体  $ABC - EDC_1$  为棱柱, 求  $A_1B_1$  的长.

提示: 台体的体积公式  $V = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$  ( $S', S$  分别为棱台的上、下底面面积,  $h$  为棱台的高).

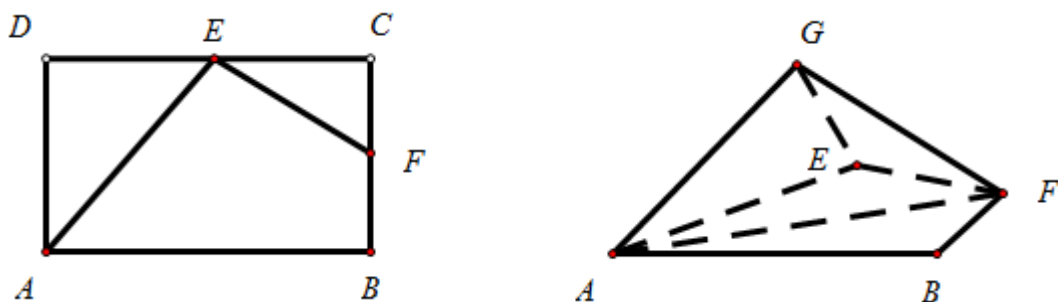
19. (12 分) 在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} + 2t \\ y = \sqrt{2} - t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sin\theta$ .

- (1) 求  $l$  的普通方程和  $C_1$  的直角坐标方程;
- (2) 把曲线  $C_1$  向下平移 1 个单位, 然后各点横坐标变为原来的 2 倍得到曲线  $C_2$  (纵坐标不变), 设点  $P$  是曲线  $C_2$  上的一个动点, 求它到直线  $l$  的距离的最小值.

20. (12 分) 已知  $f(x) = a - |x - b|$  ( $a > 0$ ), 且  $f(x) \geq 0$  的解集为  $\{x | -3 \leq x \leq 7\}$ .

- (1) 求实数  $a, b$  的值;
- (2) 若  $f(x)$  的图像与直线  $x = 0$  及  $y = m$  ( $m < 3$ ) 围成的四边形的面积不小于 14, 求实数  $m$  取值范围.

21. (12 分) 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ , 点  $E, F$  分别是线段  $DC, BC$  的中点, 分别将  $\triangle DAE$  沿  $AE$  折起,  $\triangle CEF$  沿  $EF$  折起, 使得  $D, C$  重合于点  $G$ , 连结  $AF$ .



- (I) 求证: 平面  $GEF \perp$  平面  $GAF$ ;
- (II) 求直线  $GF$  与平面  $GAE$  所成角的正弦值.

22. (10 分) 在直角坐标系中, 直线  $l$  过点  $P(1, 2)$ , 且倾斜角为  $\alpha$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . 以直角坐标系的原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2(3 + \sin^2\theta) = 12$ .

- (1) 求直线  $l$  的参数方程和曲线  $C$  的直角坐标方程, 并判断曲线  $C$  是什么曲线;
- (2) 设直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $M, N$  两点, 当  $|PM| \cdot |PN| = 2$ , 求  $\alpha$  的值.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

集合  $A$  表示半圆上的点，集合  $B$  表示直线上的点，联立方程组求得方程组解的个数，即为交集中元素的个数.

【详解】

由题可知：集合  $A$  表示半圆上的点，集合  $B$  表示直线上的点，

联立  $y = \sqrt{1-x^2}$  与  $y = 2x$ ，

可得  $\sqrt{1-x^2} = 2x$ ，整理得  $x^2 = \frac{1}{5}$ ，

即  $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

当  $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$  时， $y = 2x < 0$ ，不满足题意；

故方程组有唯一的解  $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ .

故  $A \cap B = \left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$ .

故选：C.

【点睛】

本题考查集合交集的求解，涉及圆和直线的位置关系的判断，属基础题.

2、D

【解析】

直接利用二倍角余弦公式与弦化切即可得到结果.

【详解】

$\because \tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5},$$

故选 D

【点睛】



本题考查的知识要点：三角函数关系式的恒等变换，同角三角函数关系式的应用，主要考查学生的运算能力和转化能力，属于基础题型。

3、B

【解析】

设出棱长，通过直线与直线的垂直判断直线与直线的平行，推出①的正误；判断  $F$  是  $AC_1$  的中点推出②的正误；利用直线与平面垂直推出平面与平面垂直推出③的正误；建立空间直角坐标系求出异面直线  $AC_1$  与  $CD$  所成角判断④的正误。

【详解】

解：不妨设棱长为：2，对于①连结  $AB_1$ ，则  $AB_1 = AC_1 = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore \angle AC_1B_1 \neq 90^\circ$  即  $AC_1$  与  $B_1C_1$  不垂直，又  $BC \parallel B_1C_1$ ， $\therefore$  ①不正确；

对于②，连结  $AD$ ， $DC_1$ ，在  $\triangle ADC_1$  中， $AD = DC_1 = \sqrt{5}$ ，而  $DF \perp AC_1$ ， $\therefore F$  是  $AC_1$  的中点，所以  $AF = FC_1$ ， $\therefore$  ②正确；

对于③由②可知，在  $\triangle ADC_1$  中， $DF = \sqrt{3}$ ，连结  $CF$ ，易知  $CF = \sqrt{2}$ ，而在  $\text{Rt}\triangle CBD$  中， $CD = \sqrt{5}$ ， $\therefore DF^2 + CF^2 = CD^2$ ，

即  $DF \perp CF$ ，又  $DF \perp AC_1$ ， $\therefore DF \perp$  面  $ACC_1A_1$ ， $\therefore$  平面  $DAC_1 \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ， $\therefore$  ③正确；

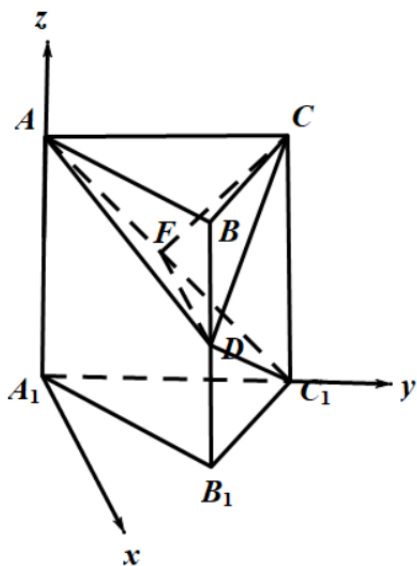
以  $A_1$  为坐标原点，平面  $A_1B_1C_1$  上过  $A_1$  点垂直于  $A_1C_1$  的直线为  $x$  轴， $A_1C_1$  所在的直线为  $y$  轴， $A_1A$  所在的直线为  $z$  轴，建立如图所示的直角坐标系；

$A_1(0,0,0)$ ， $B_1(\sqrt{3},1,0)$ ， $C_1(0,2,0)$ ， $A(0,0,2)$ ， $C(0,2,2)$ ， $D(\sqrt{3},1,1)$ ；

$\overrightarrow{AC_1} = (0,2,-2)$ ， $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3},-1,-1)$ ；

异面直线  $AC_1$  与  $CD$  所成角为  $\theta$ ， $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AC_1}| |\overrightarrow{CD}|} = 0$ ，故  $\theta = 90^\circ$ ．④不正确。

故选：B．



【点睛】

本题考查命题的真假的判断，棱锥的结构特征，直线与平面垂直，直线与直线的位置关系的应用，考查空间想象能力以及逻辑推理能力。

4、C

【解析】

由不等式恒成立问题分类讨论：①当  $a = 0$ ，②当  $a < 0$ ，③当  $a > 0$ ，考查方程  $\ln a = -\frac{1}{ae}$  的解的个数，综合①②③得解。

【详解】

①当  $a = 0$  时， $f(x) = e^{x-1} > 0 \dots 0$ ，满足题意，

②当  $a < 0$  时， $e^x - a > 0$ ， $\exists x_0 \in (-\frac{1}{ae}, +\infty)$ ， $ax + \frac{1}{e} < 0$ ，故  $f(x) \dots 0 (x \in R)$  不恒成立，

③当  $a > 0$  时，设  $g(x) = e^x - a$ ， $h(x) = ax + \frac{1}{e}$ ，

令  $g(x) = e^x - a = 0$ ，得  $x = \ln a$ ， $h(x) = ax + \frac{1}{e} = 0$ ，得  $x = -\frac{1}{ae}$ ，

下面考查方程  $\ln a = -\frac{1}{ae}$  的解的个数，

设  $\varphi(a) = a \ln a$ ，则  $\varphi'(a) = 1 + \ln a$

由导数的应用可得：

$\varphi(a) = a \ln a$  在  $(0, \frac{1}{e})$  为减函数，在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  为增函数，

则  $\varphi(a)_{\min} = -\frac{1}{e}$ ，

即  $\ln a = -\frac{1}{ae}$  有一解，

又  $g(x) = e^x - a$ ， $h(x) = ax + \frac{1}{e}$  均为增函数，

所以存在 1 个  $a$  使得  $f(x) \leq 0 (x \in R)$  成立,

综合①②③得: 满足条件的  $a$  的个数是 2 个,

故选: C.

【点睛】

本题考查了不等式恒成立问题及利用导数研究函数的解得个数, 重点考查了分类讨论的数学思想方法, 属难度较大的题型.

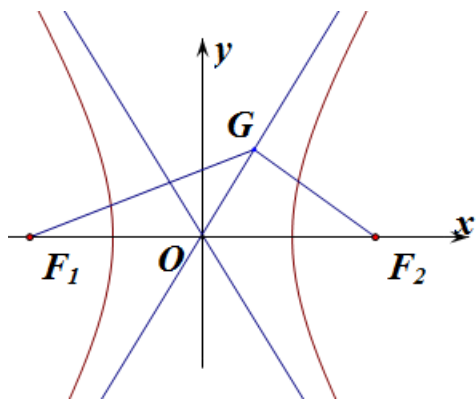
5、D

【解析】

根据  $F_2G \perp OG$ , 先确定出  $GF_2, GO$  的长度, 然后利用双曲线定义将  $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$  转化为  $a, b, c$  的关系式, 化简后可得到  $\frac{b}{a}$  的值, 即可求渐近线方程.

【详解】

如图所示:



因为  $F_2G \perp OG$ , 所以  $|GF_2| = \frac{\left| \frac{bc}{a} \right|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = b, |OG| = \sqrt{c^2 - b^2} = a,$

又因为  $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$ , 所以  $\sqrt{6}|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{GF_1}|$ , 所以  $\sqrt{6}|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{GF_2} + \overrightarrow{F_2F_1}|$ ,

所以  $6|\overrightarrow{OG}|^2 = |\overrightarrow{GF_2} + \overrightarrow{F_2F_1}|^2$ , 所以  $6a^2 = b^2 + 4c^2 + 2b \times 2c \times \cos(180^\circ - \angle GF_2F_1)$ ,

所以  $6a^2 = b^2 + 4c^2 + 2b \times 2c \times \left(-\frac{b}{c}\right)$ , 所以  $b^2 = 2a^2, \frac{b}{a} = \sqrt{2},$

所以渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{2}x$ .

故选: D.

【点睛】

本题考查根据双曲线中的长度关系求解渐近线方程,难度一般.注意双曲线的焦点到渐近线的距离等于虚轴长度的一半.

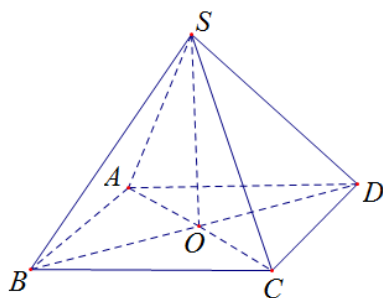
6、B

【解析】

根据正四棱锥底边边长为2,高为 $\sqrt{2}$ ,得到底面的中心到各棱的距离都是1,从而底面的中心即为球心.

【详解】

如图所示:



因为正四棱锥底边边长为2,高为 $\sqrt{2}$ ,

所以 $OB = \sqrt{2}$ ,  $SB = 2$ ,

$O$ 到 $SB$ 的距离为 $d = \frac{SO \times OB}{SB} = 1$ ,

同理 $O$ 到 $SC$ ,  $SD$ ,  $SA$ 的距离为1,

所以 $O$ 为球的球心,

所以球的半径为:1,

所以球的表面积为 $4\pi$ .

故选:B

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积,还考查了空间想象的能力,属于中档题.

7、B

【解析】

先根据题意,对原式进行化简可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,然后利用累加法求得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$ ,然后不等

式 $\frac{a_{n+1}}{n+1} < 2t^2 + at - 1$ 恒成立转化为 $2t^2 + at - 1 \geq 3$ 恒成立,再利用函数性质解不等式即可得出答案.

【详解】

由题,  $n(a_{n+1} - a_n) = a_n + 1 \Rightarrow na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

由累加法可得:  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n}\right) + \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) + \dots + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1}\right) + a_1$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2 = 3 - \frac{1}{n+1} < 3$$

对于任意的  $a \in [-2, 2], n \in N^*$ , 不等式  $\frac{a_{n+1}}{n+1} < 2t^2 + at - 1$  恒成立

$$\text{即 } 2t^2 + at - 1 \geq 3 \Rightarrow 2t^2 + at - 4 \geq 0$$

$$\text{令 } f(a) = 2t^2 + at - 4 = at + 2t^2 - 4, (a \in [-2, 2])$$

$$\text{可得 } f(2) \geq 0 \text{ 且 } f(-2) \geq 0$$

$$\text{即 } \begin{cases} t^2 + t - 2 \geq 0 \\ t^2 - t - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 1 \text{ 或 } t \leq -2 \\ t \geq 2 \text{ 或 } t \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{可得 } t \geq 2 \text{ 或 } t \leq -2$$

故选 B

【点睛】

本题主要考查了数列的通项的求法以及函数的性质的运用, 属于综合性较强的题目, 解题的关键是能够由递推数列求出通项公式和后面的转化函数, 属于难题.

8、C

【解析】

令  $2^a = 3^b = t$ , 则  $t > 0, t \neq 1$ , 将指数式化成对数式得  $a, b$  后, 然后取绝对值作差比较可得.

【详解】

$$\text{令 } 2^a = 3^b = t, \text{ 则 } t > 0, t \neq 1, \therefore a = \log_2 t = \frac{\lg t}{\lg 2}, b = \log_3 t = \frac{\lg t}{\lg 3},$$

$$\therefore |a| - |b| = \frac{|\lg t|}{\lg 2} - \frac{|\lg t|}{\lg 3} = \frac{|\lg t|(\lg 3 - \lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 3} > 0, \text{ 因此, } |a| > |b|.$$

故选: C.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/035011344332012003>