

第 04 讲 7.3.1 离散型随机变量的均值

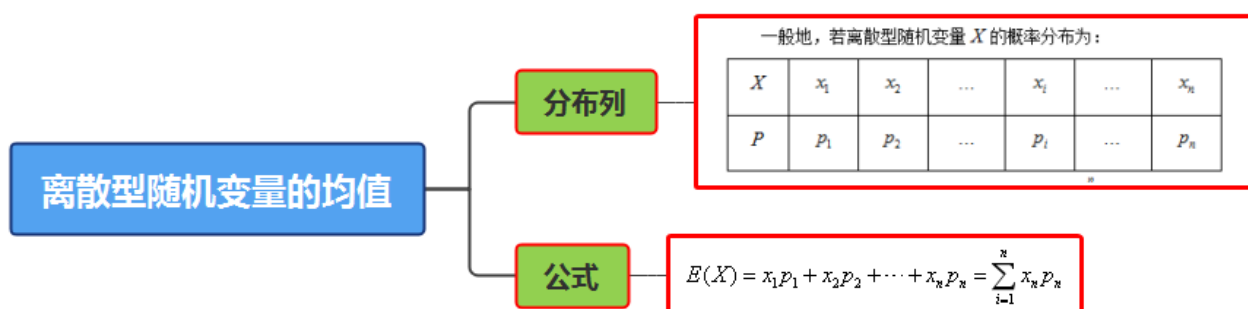
01

学习目标

课程标准	学习目标
①通过具体实例,理解离散型随机变量分布列的均值。 ②能解决与离散型随机变量相关的数学问题与实际问题中的均值的求解问题。 ③能解决一些与平均水平有关的简单问题与决策性问题。	通过本节课的学习,要求掌握离散型随机变量的均值,能解决与之相关的简单问题,有关决策性问题的处理意见与建议.会判断平均水平

02

思维导图



03

知识清单

知识点 01: 离散型随机变量的均值

(1) 离散型随机变量的均值的概念

一般地,若离散型随机变量 X 的概率分布为:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

则称 $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i$ 为随机变量 X 的均值 (mean) 或数学期望

(mathematical expectation), 数学期望简称期望.

均值是随机变量可能取值关于取值概率的加权平均数,它综合了随机变量的取值和取值的概率,反映了随机变量取值的平均水平.

【即学即练 1】(2024·全国·高三专题练习) 已知离散型随机变量 ξ 的分布列如下表:

ξ	1	3	5
P	0.3	m	0.4

则其数学期望 $E(\xi) = (\quad)$

- A. 1 B. 0.3 C. 2.3 D. 3.2

【答案】D

【详解】分布列中出现的所有的概率之和等于 1. $0.3 + m + 0.4 = 1$, $m = 0.3$,

$\therefore$ 随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi) = 1 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 5 \times 0.4 = 3.2$.

故选: D.

(2) 离散型随机变量的均值的深层理解

①离散型随机变量 X 的均值(数学期望) $E(X)$ 是个数值, 是随机变量的一个重要特征数, 反映的是离散型随机变量取值的平均水平. 即若随机试验进行了 n 次, 根据 X 的分布列, 在 n 次试验中, 有 $p_1 n$ 次出现了 x_1 , 有 $p_2 n$ 次出现了 x_2 , $\dots$, 有 $p_n n$ 次出现了 x_n , 则 n 次试验中, X 出现的平均值为

$$\frac{p_1 n x_1 + p_2 n x_2 + \dots + p_n n x_n}{n} = E(X), \text{ 即 } E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

②随机变量的均值与随机变量本身具有相同的单位.

③ $E(X)$ 是一个实数, 由 X 的分布列唯一确定, 即作为随机变量, X 是可变的, 可取不同值, 而 $E(X)$ 是不变的, 它描述 X 取值的平均状态.

(3) 两点分布的均值公式

一般地, 如果随机变量 X 服从两点分布, 那么: $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$

X	1	0
P	p	$1 - p$

【即学即练 2】(2024·全国·高二假期作业) 已知离散型随机变量 X 的分布列服从两点分布, 满足

$$P(X=0) = \frac{2}{9P(X=1)}, \text{ 且 } P(X=0) < P(X=1), \text{ 则 } E(X) = (\quad)$$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】C

【详解】解: 因为随机变量 X 的分布列服从两点分布,

所以 $P(X=0)+P(X=1)=1$,

则 $P(X=1)+\frac{2}{9P(X=1)}=1$, 解得 $P(X=1)=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$,

又因 $P(X=0)<P(X=1)$,

所以 $P(X=1)=\frac{2}{3}$, 则 $P(X=0)=\frac{1}{3}$,

所以 $E(X)=\frac{2}{3}$.

故选: C.

(4) 均值的性质

①若 X 与 Y 都是随机变量, 且 $Y=aX+b(a \neq 0)$, 则由 X 与 Y 之间分布列的关系可知 $E(Y)=aE(X)+b$.

②若 X 与 Y 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

知识点 02: 样本均值与离散型随机变量均值的比较

(1) 样本均值

样本数据 $\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k_1}; \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{k_2}; \dots; \underbrace{x_i, x_i, \dots, x_i}_{k_i}; \dots; \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{k_n}$; 记 $k_1+k_2+\dots+k_n=N$

均值: $\bar{x}=x_1f_1+x_2f_2+\dots+x_nf_n$, 其中 $f_i=\frac{k_i}{N}$.

(2) 离散型随机变量均值

离散型随机变量的分布列

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

均值 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n=\sum_{i=1}^nx_ip_n$

知识点 03: 求离散型随机变量 X 的均值步骤

(1) 理解离散型随机变量 X 的意义, 写出 X 所有可能的取值.

(2) 判断离散型随机变量 X 是否服从特殊分布 (如两点分布等). 若服从特殊分布, 则可利用公式直接求解; 若不服从特殊分布, 则继续下面步骤.

(3) 求出离散型随机变量 X 取每个值的概率 $P(X=x_i)$.

(4) 写出离散型随机变量 X 的分布列.

(5) 利用均值的定义求 $E(X)$.

其中求均值 $E(X)$ 的关键是写出离散型随机变量 X 的分布列, 前提是准确列出 X 所有可能的取值, 并真正理解 X 取值的意义.

题型 01 两点分布的均值

【典例 1】（2023 下·山西吕梁·高二山西省交城中学校统考期中）已知随机变量 X 服从两点分布， $E(X)=0.6$ ，则其成功概率为（ ）

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.5

D. 0.6

【答案】D

【详解】Q 随机变量 X 服从两点分布，设成功的概率为 p ，

$$\therefore E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p = 0.6.$$

故选：D.

【典例 2】（2023 下·浙江嘉兴·高二校考期中）已知随机变量 X 的取值为 0, 1，若 $P(X=0)=\frac{1}{5}$ ，则 X 的均值为_____.

【答案】 $\frac{4}{5}/0.8$

【详解】由题意可得， X 服从两点分布，

$$P(X=1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

故答案为： $\frac{4}{5}$.

【变式 1】（2023·全国·高三专题练习）设随机变量 X 服从两点分布，若 $P(X=1)-P(X=0)=0.4$ ，则 $E(X)=$ （ ）

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.6

D. 0.7

【答案】D

【详解】由题意得 $P(X=1)+P(X=0)=1$ ，

因为 $P(X=1)-P(X=0)=0.4$ ，

所以解得 $P(X=1)=0.7, P(X=0)=0.3$ ，

所以 $E(X)=1 \times 0.7 + 0 \times 0.3 = 0.7$ ，

故选：D

【变式 2】（2023 下·山西朔州·高二校联考阶段练习）已知随机变量 X 服从两点分布， $P(X=1)=0.34$ ，则 $P(X=0)=$ ____， $E(X)=$ _____.

【答案】 0.66 0.34

【详解】由两点分布可知 $P(X=0)=1-0.34=0.66$,

$$E(X)=0\times 0.66+1\times 0.34=0.34.$$

故答案为: 0.66;0.34.

题型 02 离散型随机变量均值公式及性质

【典例 1】(2024·全国·高三专题练习) 已知随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

且 $Y=aX+3$, 若 $E(Y)=-2$, 则 a 等于 ()

A. -3

B. -2

C. $\frac{5}{3}$

D. 3

【答案】 A

【详解】结合题意: $E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$,

因为 $Y=aX+3$, 所以 $E(Y)=aE(X)+3=\frac{5}{3}a+3=-2$, 解得: $a=-3$,

故选: A.

【典例 2】(2024·全国·高二假期作业) 设 ξ 的分布列如图, 又 $\eta=2\xi+a$, 则 $E(\eta)=$ _____.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	a

【答案】 6

【详解】由分布列的性质得 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a=1$, 得 $a=\frac{1}{3}$,

$$\text{从而 } E(\xi)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}=\frac{17}{6},$$

$$\text{而 } \eta=2\xi+a=2\xi+\frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } E(\eta)=E(2\xi+\frac{1}{3})=2E(\xi)+\frac{1}{3}=2\times\frac{17}{6}+\frac{1}{3}=6.$$

故答案为: 6.

【典例 3】(2024·全国·高三专题练习) 随机变量 X 的分布列如下列表格所示, 其中 $E[X]$ 为 X 的数学期望, 则 $E[X-E[X]]=$ _____.

X	1	2	3	4	5
p	0.1	a	0.2	0.3	0.1

【答案】0

【详解】根据概率的性质可得 $0.1 + a + 0.2 + 0.3 + 0.1 = 1$ 解得 $a = 0.3$,

所以 $E[X] = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.1 = 3$,

所以 $E[X - E[X]] = E[X - 3] = E[X] - 3 = 0$.

故答案为:0.

【变式 1】(2024·全国·高三专题练习) 随机变量 X 的分布列如表, 则 $E(2X+3)$ 的值为 ()

X	1	2	3
P	0.2	A	0.4

A. 4.4

B. 7.4

C. 21.2

D. 22.2

【答案】B

【详解】由 $0.2 + A + 0.4 = 1$ 得 $A = 0.4$,

所以 $E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.4 = 2.2$,

所以 $E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 2 \times 2.2 + 3 = 7.4$.

故选: B

【变式 2】(2024·全国·高三专题练习) 已知离散型随机变量 X 的分布列如表 若离散型随机变量 $Y = 2X + 1$, 则 $E(Y) =$ _____.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	m	$\frac{1}{6}$

【答案】 $\frac{23}{6} / 3\frac{5}{6}$

【详解】由题

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + m + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow m = \frac{5}{12},$$

$$\text{所以 } E(X) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{12} \times 1 + \frac{5}{12} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{17}{12},$$

由 $Y = 2X + 1$,

$$\text{所以 } E(Y) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \times \frac{17}{12} + 1 = \frac{23}{6},$$

故答案为: $\frac{23}{6}$.

【变式 3】(2024 上·河南漯河·高三漯河高中校考阶段练习) 已知 $E(X) + E(2X + 1) = 8$, 则 $E(X) =$ _____.

【答案】 $\frac{7}{3}$

【详解】由 $E(X) + E(2X + 1) = E(X) + 2E(X) + 1 = 8$, 可得 $E(X) = \frac{7}{3}$.

故答案为: $\frac{7}{3}$

题型 03 离散型随机变量的均值

【典例 1】(2024·福建漳州·统考模拟预测) 2023 年 12 月 11 日至 12 日中央经济工作会议在北京举行, 会议再次强调要提振新能源汽车消费. 发展新能源汽车是我国从“汽车大国”迈向“汽车强国”的必由之路. 我国某地一座新能源汽车工厂对线下的成品车要经过多项检测, 检测合格后方可销售, 其中关键的两项测试分别为碰撞测试和续航测试, 测试的结果只有三种等次: 优秀、良好、合格, 优秀可得 5 分、良好可得 3 分、合格可得 1 分, 该型号新能源汽车在碰撞测试中结果为优秀的概率为 $\frac{1}{2}$, 良好的概率为 $\frac{1}{3}$; 在续航测试中结果为优秀的概率为 $\frac{2}{5}$, 良好的概率为 $\frac{2}{5}$, 两项测试相互独立, 互不影响, 该型号新能源汽车两项测试得分之和记为 ξ .

(1) 求该型号新能源汽车参加两项测试仅有一次为合格的概率;

(2) 求离散型随机变量 ξ 的分布列与期望.

【答案】(1) $\frac{3}{10}$

(2) 分布列见解析, 数学期望为 $\frac{106}{15}$

【详解】(1) 记事件 A_i 为“该型号新能源汽车参加碰撞测试的得分为 i 分 ($i = 1, 3, 5$)”,

$$\text{则 } P(A_5) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{1}{3}, \quad P(A_1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

记事件 B_i 为“该型号新能源汽车参加续航测试的得分为 i 分 ($i = 1, 3, 5$)”,

$$\text{则 } P(B_5) = \frac{2}{5}, \quad P(B_3) = \frac{2}{5}, \quad P(B_1) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

记事件 C 为“该型号新能源汽车参加两项测试仅有一次为合格”,

$$\text{则 } P(C) = P(A_5 B_1) + P(A_3 B_1) + P(A_1 B_5) + P(A_1 B_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10},$$

则该型号新能源汽车参加两项测试仅有一次为合格的概率为 $\frac{3}{10}$.

(2) 由题知离散型随机变量 ξ 的所有可能取值分别为 2, 4, 6, 8, 10,

$$P(\xi=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30},$$

$$P(\xi=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15},$$

$$P(\xi=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10},$$

$$P(\xi=8)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3},$$

$$P(\xi=10)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5},$$

则离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

所以数学期望 $E(\xi)=2\times\frac{1}{30}+4\times\frac{2}{15}+6\times\frac{3}{10}+8\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{5}=\frac{106}{15}$.

【典例 2】（2024 上·云南·高三校联考阶段练习）某学校有 1000 人，想通过验血的方式筛查出某种病毒的携带者，如果对每个人的血样逐一化验，需要化验 1000 次，统计专家提出了一种方法：随机地按 10 人一组分组，然后将各组 10 个人的血样混合再化验，如果混合血样呈阴性，说明这 10 个人全部阴性；如果混合血样呈阳性，说明其中至少有一个人呈阳性，就需要对这组的每个人再分别化验一次．假设某学校携带病毒的人数有 10 人．（ $0.99^5 \approx 0.95, 0.99^{10} \approx 0.90$ ）

(1) 用样本的频率估计概率，若 5 个人一组，求一组混合血样呈阳性的概率；

(2) 用统计专家这种方法按照 5 个人一组或 10 个人一组，问哪种分组方式筛查出这 1000 人中该病毒携带者需要化验次数较少？为什么？

【答案】(1) 0.05

(2) 10 个人一组的分组方式筛查出这 1000 人中该病毒携带者需要化验次数较少，理由见解析

【详解】（1）由已知可得，该单位每个人携带病毒的概率为 $\frac{10}{1000}=0.01$ ．

所以 5 个人一组，该组混合血样不是阳性的概率为 $0.99^5 \approx 0.95$ ，

所以，一组混合血样呈阳性的概率为 $1-0.95=0.05$ ．

（2）设 5 个人一组，每组需要化验的次数为随机变量 X ，则 $X=1, 6$ ．

由（1）知，5 个人一组，需要重新化验的概率为 0.05，

则 X 的分布列为

X	1	6
P	0.95	0.05

所以, $E(X) = P(X=1) \times 1 + P(X=6) \times 6 = 1.25$,

总的化验次数为 $\frac{1000}{5} E(X) = 250$;

设 10 个人一组, 每组需要化验的次数为随机变量 Y , 则 $Y=1, 11$.

10 个人一组, 该组混合血样不是阳性的概率为 0.9, 则 10 个人一组, 需要重新化验的概率为 0.1, 则 Y 的分布列为

Y	1	11
P	0.9	0.1

所以 $E(Y) = 1 \times 0.9 + 11 \times 0.1 = 2$, 总的化验次数为 $\frac{1000}{10} E(Y) = 200$,

所以, 10 个人一组的分组方式筛查出这 1000 人中该病毒携带者需要化验次数较少.

【典例 3】 (2024 上·北京通州·高三统考期末) 民航招飞是指普通高校飞行技术专业 (本科) 通过高考招收飞行学生, 报名的学生参加预选初检、体检鉴定、飞行职业心理学检测、背景调查、高考选拔等 5 项流程, 其中前 4 项流程选拔均通过, 则被确认为有效招飞申请, 然后参加高考, 由招飞院校择优录取. 据统计, 每位报名学生通过前 4 项流程的概率依次约为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. 假设学生能否通过这 5 项流程相互独立, 现有某校高三学生甲、乙、丙三人报名民航招飞.

(1) 估计每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率;

(2) 求甲、乙、丙三人中恰好有一人被确认为有效招飞申请的概率;

(3) 根据甲、乙、丙三人的平时学习成绩, 预估高考成绩能被招飞院校录取的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}$, 设甲、乙、丙三人能被招飞院校录取的人数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

【答案】 (1) $\frac{1}{6}$

(2) $\frac{25}{72}$

(3) 分布列见解析, $E(X) = \frac{14}{45}$

【详解】 (1) 因为每位报名学生通过前 4 项流程的概率依次约为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$, 且能否通过相互独立,

所以估计每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率 $P = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$.

(2) 因为每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率为 $\frac{1}{6}$,

所以甲、乙、丙三人中恰好有一人被确认为有效招飞申请的概率 $P = C_3^1 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$.

(3) 因为每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率为 $\frac{1}{6}$ ，且预估甲、乙、丙三人的高考成绩能被招飞院校

录取的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ ，

所以甲能被招飞院校录取的概率 $P_1 = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$ ，

乙能被招飞院校录取的概率 $P_2 = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$ ，

丙能被招飞院校录取概率 $P_3 = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$ 。

依题意 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3，

所以 $P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{18}{25}$ ，

$P(X=1) = \frac{1}{9} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) + 2 \times \frac{1}{10} \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{4}$ ，

$P(X=2) = 2 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{13}{450}$ ，

$P(X=3) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{900}$ 。

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{18}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{450}$	$\frac{1}{900}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{18}{25} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{13}{450} + 3 \times \frac{1}{900} = \frac{14}{45}$ 。

【典例 4】 (2024 上·山西朔州·高三统考期末) 已知某足球赛事的决赛将在甲、乙两队之间进行. 其规则为：每一场比赛均须决出胜负，按主、客场制先进行两场比赛（第一场在甲队主场比赛），若某一队在前两场比赛中均获胜，则该队获得冠军；否则，两队需在中立场进行第三场比赛，且其获胜方为冠军. 已知甲队在主场、客场、中立场获胜的概率依次为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{5}$ ，且每场比赛的胜负均相互独立。

(1) 当甲队获得冠军时，求决赛需进行三场比赛的概率；

(2) 若主办方在决赛的前两场中共投资 m （千万元），则能在这两场比赛中盈利 $\frac{m}{2}$ （千万元）。如果需进行第三场比赛，且主办方在第三场比赛中投资 n （千万元），则能在该场比赛中盈利 $\sqrt{n}$ （千万元）。若主办方最多能投资一千万元，请以决赛总盈利的数学期望为决策依据，则其在前两场的投资额应为多少万元？

【答案】 (1) $\frac{6}{11}$

(2) 主办方在决赛的前两场的投资额应为 0.75 千万元，即 750 万元。

【详解】(1) 记“甲队获得冠军”为事件 A ，“决赛进行三场比赛”为事件 B ，

$$\text{由题可知 } P(AB) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5},$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{30},$$

$$\therefore \text{当甲队获得冠军时，决赛需进行三场比赛的概率为 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{6}{11}.$$

(2) 设主办方在决赛前两场中共投资 x （千万元），其中 $0 < x \leq 1$ ，

若需进行第三场比赛，则还可投资 $1-x$ （千万元），

记随机变量 ξ 为决赛的总盈利，则 ξ 可以取 $\frac{x}{2}$ ， $\frac{x}{2} + \sqrt{1-x}$ ，

$$\therefore P(\xi = \frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(\xi = \frac{x}{2} + \sqrt{1-x}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 随机变量 ξ 的分布列为

ξ	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} + \sqrt{1-x}$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\therefore \xi \text{ 的数学期望 } E(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1-x}\right) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1-x}),$$

$$\text{令 } t = \sqrt{1-x} (0 \leq t < 1), \text{ 则 } E(\xi) = \frac{-t^2 + t + 1}{2} = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{8},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \frac{3}{4} \text{ 时, } E(\xi) \text{ 取得最大值,}$$

$\therefore$ 主办方在决赛的前两场的投资额应为 0.75 千万元，即 750 万元.

【变式 1】(2024·吉林长春·东北师大附中校联考模拟预测) 为了更好地推广冰雪体育运动项目，某中学要求每位同学必须在高中三年的每个冬季学期选修滑冰、滑雪、冰壶三类体育课程之一，且不可连续选修同一类课程，若某生在选修滑冰后，下一次选修滑雪的概率为 $\frac{1}{3}$ ；在选修滑雪后，下一次选修冰壶的概率为 $\frac{3}{4}$ ，

在选修冰壶后，下一次选修滑冰的概率为 $\frac{2}{5}$.

(1) 若某生在高一冬季学期选修了滑雪，求他在高三冬季学期选修滑冰的概率：

(2) 若某生在高一冬季学期选修了滑冰，设该生在高中三个冬季学期中选修滑冰课程的次数为随机变量 X ，求 X 的分布列及期望，

$$\text{【答案】(1) } \frac{3}{10}$$

$$\text{(2) 分布列见解析, } \frac{27}{20}$$

【详解】(1) 解：若高一选修滑雪，设高三冬季学期选修滑冰为随机事件 A，

$$\text{则 } P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}.$$

(2) 随机变量 X 的可能取值为 1, 2.

$$P(X=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{20}, P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{20}.$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2
P	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{20}$

$$E(X) = \frac{13}{20} + 2 \times \frac{7}{20} = \frac{27}{20}.$$

【变式 2】(2024 上·贵州贵阳·高三贵阳一中校考阶段练习) 某校高三年级嘟嘟老师准备利用高中数学知识对甲、乙、丙三名学生在即将到来的全省适应性考试成绩进行预测，为此，他收集了三位同学近三个月的数学月考、周测成绩（满分 150 分），若考试成绩超过 100 分则称为“破百”。

甲：74, 85, 81, 90, 103, 89, 92, 97, 109, 95;

乙：95, 92, 97, 99, 89, 103, 105, 108, 101, 113;

丙：92, 102, 97, 105, 89, 94, 92, 97.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙三名同学的考试成绩相互独立。

(1) 分别估计甲、乙、丙三名同学“破百”的概率；

(2) 设这甲、乙、丙三名同学在这次决赛上“破百”的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ 。

【答案】(1) 甲同学“破百”的概率为 $\frac{1}{5}$ ，乙同学“破百”的概率为 $\frac{1}{2}$ ，丙同学“破百”的概率为 $\frac{1}{4}$

(2) 分布列见解析；期望为 $\frac{19}{20}$

【详解】(1) 甲同学“破百”的概率为 $P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$,

乙同学“破百”的概率为 $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

丙同学“破百”的概率为 $P(C) = \frac{1}{4}$.

(2) X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 则：

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{19}{40},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$

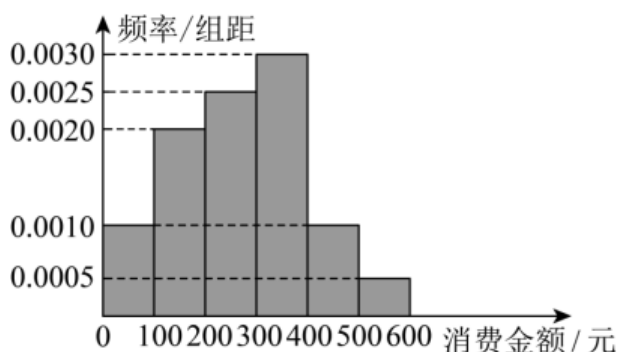
$$P(X=3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{19}{40}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{40}$

所以，期望 $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{19}{40} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{40} = \frac{19}{20}.$

【变式 3】（2024·全国·模拟预测）2023 年国庆节假期期间，某超市举行了购物抽奖赢手机活动．活动规则如下：在 2023 年 9 月 29 日到 2023 年 10 月 6 日期间，消费金额（单位：元）不低于 100 元的顾客可以参与一次活动（假设每名顾客只消费一次），每 5 人一组，每人可以随机选取 A 或 B 两个字母，其中选取相同字母的人数较少者每人获得 10 元购物券，其他人获得抽取价值 6999 元手机的资格（例如 5 人中有 2 人选取 A ，则这 2 人每人获得 10 元购物券，另外 3 人获得抽取手机的资格；5 人全部选取 A ，则这 5 人均获得抽取手机的资格），根据统计，在此活动期间，顾客在该超市消费金额的频率分布直方图如图所示．



(1) 从活动期间在该超市购物的顾客中随机选取 2 名，求这 2 名顾客中恰有 1 人获得 10 元购物券的概率

(2) 设每 5 人组获得购物券的人数为 X .

(i) 求 X 的分布列与数学期望：

(ii) 若超市计划投入的活动经费（购买手机的费用与发放的购物券金额总和）不超过顾客消费总金额的 10%，则每 1000 名顾客最多送出多少部手机？（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

【答案】(1) $\frac{207}{512}$

(2) (i) 分布列见解析， $\frac{25}{16}$ (ii) 3

【详解】 (1) 由频率分布直方图可知，每名顾客获得抽奖资格的概率为 $\frac{9}{10}.$

参与抽奖的顾客获得 10 元购物券的概率为 $\frac{2 + 2C_4^1}{2^5} = \frac{5}{16},$

则每名顾客获得 10 元购物券的概率 $P_1 = \frac{9}{10} \times \frac{5}{16} = \frac{9}{32}$,

则这 2 名顾客中恰有 1 人获得 10 元购物券的概率 $C_2^1 \cdot \left(\frac{9}{32}\right) \times \left(1 - \frac{9}{32}\right) = \frac{207}{512}$.

(2) (i) X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16}, \quad P(X=1) = \frac{2C_5^1}{2^5} = \frac{5}{16}, \quad P(X=2) = \frac{2C_5^2}{2^5} = \frac{5}{8},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$

则 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{5}{8} = \frac{25}{16}$.

(ii) 由频率分布直方图可知, 顾客消费金额的平均值

$$\bar{x} = (50 \times 0.001 + 150 \times 0.002 + 250 \times 0.0025 + 350 \times 0.003 + 450 \times 0.001 + 550 \times 0.0005) \times 100 = 275 \text{ (元)},$$

则 1000 名顾客的消费总金额为 $275 \times 1000 = 275000$ (元).

设每 1000 名顾客最多送出 n 部手机,

$$\text{则 } 6999n + \frac{1000 \times 0.9}{5} \times \frac{25}{16} \times 10 \leq 275000 \times 10\%,$$

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \leq 3$, 故每 1000 名顾客最多送出 3 部手机.

【变式 4】 (2024·河南·模拟预测) 矮化密植是指应用生物或栽培措施使果树生长树冠紧凑的方法, 它与常规的矮小栽培相比有许多优势, 如采用这种矮化果树可以建立比常规果园定植密度更高的果园, 不仅能提高土壤及光能利用率, 还能够获得更多的早期经济效益. 某乡镇计划引进 A, B 两种矮化果树, 已知 A 种矮化果树种植成功率为 $\frac{2}{3}$, 成功后每公顷收益 7.5 万元; B 种矮化果树种植成功率为 $\frac{3}{5}$, 成功后每公顷收益 9 万元. 假设种植不成功时, 种植 A, B 两种矮化果树每公顷均损失 1.5 万元, 每公顷是否种植成功相互独立.

(1) 甲种植户试种两种矮化果树各 1 公顷, 总收益为 X 万元, 求 X 的分布列及数学期望;

(2) 乙种植户有良田 6 公顷, 本计划全部种植 A , 但是甲劝说乙应该种植两种矮化果树各 3 公顷, 请按照总收益的角度分析一下, 乙应选择哪一种方案?

【答案】 (1) 分布列见解析; 9.3

(2) 乙应选择两种果树各种植 3 公顷

【详解】 (1) 依题意, 当 A, B 均种植成功时, $X = 9 + 7.5 = 16.5$, 此时 $P(X = 16.5) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$,

当 A 种植不成功, B 种植成功时, $X = 9 - 1.5 = 7.5$, 此时 $P(X = 7.5) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$,

当 A 种植成功, B 种植不成功时, $X = 7.5 - 1.5 = 6$, 此时 $P(X = 6) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15}$,

当 A, B 均种植不成功时, $X = 2 \times (-1.5) = -3$, 此时 $P(X = -3) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{15}$,

所以 X 的可能取值为: 16.5, 7.5, 6, -3, X 的分布列为:

X	16.5	7.5	6	-3
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

数学期望为 $E(x) = 16.5 \times \frac{2}{5} + 7.5 \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{4}{15} + (-3) \times \frac{2}{15} = 9.3$.

(2) 全种植 A 的收益期望为 $W_1 = \frac{2}{3} \times 6 \times 7.5 - \frac{1}{3} \times 6 \times 1.5 = 27$ 万元,

由 (1) 得, 各种一半的收益期望为 $W_2 = 3 \times 9.3 = 27.9$ 万元

因为 $W_2 > W_1$,

乙应选择两种果树各种植 3 公顷.

题型 04 均值的实际应用

【典例 1】 (2024·山西临汾·统考一模) 现有 5 个红色气球和 4 个黄色气球, 红色气球内分别装有编号为 1, 3, 5, 7, 9 的号签, 黄色气球内分别装有编号为 2, 4, 6, 8 的号签. 参加游戏者, 先对红色气球随机射击一次, 记所得编号为 a , 然后对黄色气球随机射击一次, 若所得编号为 $2a$, 则游戏结束; 否则再对黄色气球随机射击一次, 将从黄色气球中所得编号相加, 若和为 $2a$, 则游戏结束; 否则继续对剩余的黄色气球进行射击, 直到和为 $2a$ 为止, 或者到黄色气球打完为止, 游戏结束.

(1) 求某人只射击两次的概率;

(2) 若某人射击气球的次数 X 与所得奖金 Y 的关系为 $Y = 10(5 - X)$, 求此人所得奖金 Y 的分布列和期望.

【答案】 (1) $\frac{1}{10}$

(2) 分布列见解析, $\frac{20}{3}$

【详解】 (1) 设 A_i 表示事件: 对红色气球随机射击一次, 所得编号为 i , 则 $P(A_i) = \frac{1}{5} (i = 1, 3, 5, 7, 9)$,

设 B_j 表示事件: 对黄色气球随机射击一次, 所得编号为 j , 则 $P(B_j) = \frac{1}{4} (j = 2, 4, 6, 8)$,

C 表示事件: 某人只射击两次.

则 $P(C) = P(A_1 B_2 + A_3 B_6) = P(A_1 B_2) + P(A_3 B_6)$

$= P(A_1) P(B_2) + P(A_3) P(B_6)$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

即某人只射击两次的概率为 $\frac{1}{10}$.

(2) 由题知 X 的可能取值为 2, 3, 4, 5, Y 为 30, 20, 10, 0,

其概率分别为 $P(Y=30)=P(X=2)=P(C)=\frac{1}{10}$,

$$\begin{aligned} P(Y=20) &= P(X=3) \\ &= P(A_3 B_2 B_4) \times A_2^2 + P(A_5 (B_4 B_6 + B_2 B_8)) \times A_2^2 + P(A_7 B_6 B_8) \times A_2^2 \\ &= P(A_3)P(B_2)P(B_4) \times 2 + P(A_5)P(B_4)P(B_6) \times 2 \\ &\quad + P(A_5)P(B_2)P(B_8) \times 2 + P(A_7)P(B_6)P(B_8) \times 2 \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 8 = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=10) &= P(X=4) = P(A_7 B_2 B_4 B_8) \times A_3^3 + P(A_9 B_4 B_6 B_8) \times A_3^3 \\ &= P(A_7)P(B_2)P(B_4)P(B_8) \times 6 + P(A_9)P(B_4)P(B_6)P(B_8) \times 6 \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(X=5) \\ &= 1 - (P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)) = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Y 的分布列为

Y	0	10	20	30
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$

$$E(Y) = 0 \times \frac{2}{3} + 10 \times \frac{1}{10} + 20 \times \frac{2}{15} + 30 \times \frac{1}{10} = \frac{20}{3}.$$

【典例 2】 (2024 上·贵州贵阳·高三贵阳一中校考阶段练习) 某校高三年级嘟嘟老师准备利用高中数学知识对甲、乙、丙三名学生在即将到来的全省适应性考试成绩进行预测, 为此, 他收集了三位同学近三个月的数学月考、周测成绩 (满分 150 分), 若考试成绩超过 100 分则称为“破百”.

甲: 74, 85, 81, 90, 103, 89, 92, 97, 109, 95;

乙: 95, 92, 97, 99, 89, 103, 105, 108, 101, 113;

丙: 92, 102, 97, 105, 89, 94, 92, 97.

假设用频率估计概率, 且甲、乙、丙三名同学的考试成绩相互独立.

(1) 分别估计甲、乙、丙三名同学“破百”的概率;

(2) 设这甲、乙、丙三名同学在这次决赛上“破百”的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/035101004214011213>