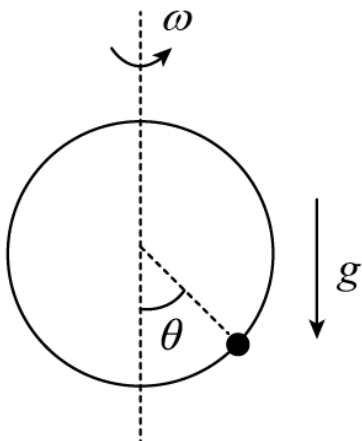


2024-2025 学年物理竞赛能力培优精练

专题 05 平衡的稳度

1. (2021 • 全国强基计划) 一光滑圆环以过圆心的固定竖直轴匀速旋转，角速度为 ω 。一珠子可在圆环上自由滑动，质量为 m ，如图所示。则图示珠子的可能处于稳定平衡的位置，用角度 θ 表示，可表示为 ()



- A. $\theta = 0$
- B. $\theta = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$
- C. $\theta = \pi$
- D. $\theta = \arccos \frac{\omega^2 R}{g}$
- E. $\theta = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$
- F. $\theta = \arcsin \frac{\omega^2 R}{g}$

【答案】AB

【详解】以圆环中心为重力势能零点，可得小圆环的机械能为

$$E_p = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

求一阶导得

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR \sin \theta - m \omega^2 R^2 \cos \theta \sin \theta$$

当

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0$$

得

$$\sin \theta = 0$$

或

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

求二阶导得

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgR \cos \theta - m\omega^2 R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

若

$$\sin \theta = 0$$

①当

$$\theta = 0$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mR(g - \omega^2 R)$$

珠子可能稳定平衡；

②当

$$\theta = \pi$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -mR(g + \omega^2 R) < 0$$

珠子处于不稳定平衡；

若

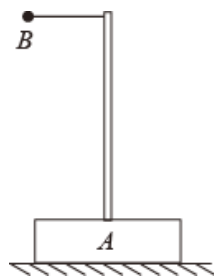
$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = m\omega^2 R^2 \sin \theta > 0$$

珠子处于稳定平衡，AB 正确，CDEF 错误。

故选 AB。

2. (2007 • 全国竞赛) 图中 A 是一带有竖立柱的木块，总质量为 M ，位于水平地面上。B 是一质量为 m 的小球，通过一不可伸长的轻绳挂于立柱的顶端。现拉动小球使绳伸直并处于水平位置。然后让小球从静止状态下摆。如在小球与立柱发生碰撞前，木块 A 始终未发生移动，则木块与地面之间的静摩擦因数至少为多大？（设 A 不会发生转动）



【答案】 $\mu_{\min} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}}$

【详解】当小球摆至与水平方向的夹角为 θ 时，小球的速度 v 如图由下式决定

$$mgl \sin \theta = \frac{1}{2}mv^2$$

设此时小球受到绳的拉力为 T ，由于小球做圆周运动，故有

$$T - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{l}$$

设地面对木块的支持力为 N ，作用与木块的摩擦力为 f ，因木块处于静止状态，有

$$T \sin \theta + Mg - N = 0$$

$$T \cos \theta - f = 0$$

设地面的静摩擦因数为 μ ，则有 $f \leq \mu N$

解以上各式，得 $\mu \geq \frac{3m \sin \theta \cos \theta}{3m \sin^2 \theta + M} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a + 2 \sin^2 \theta}$

式中 $a = \frac{2M}{3m}$

令 $F(\theta) = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a + 2 \sin^2 \theta}$

$F\theta$ 与 θ 有关，现要求不论 θ 取何值，木块 A 均不发生移动，则静摩擦因数 μ 的最小值 $\mu_{\min}$

等于 $F(\theta)$ 的最大值 $F(\theta)_{\max}$ ， $F(\theta)_{\max}$ 可如下求得

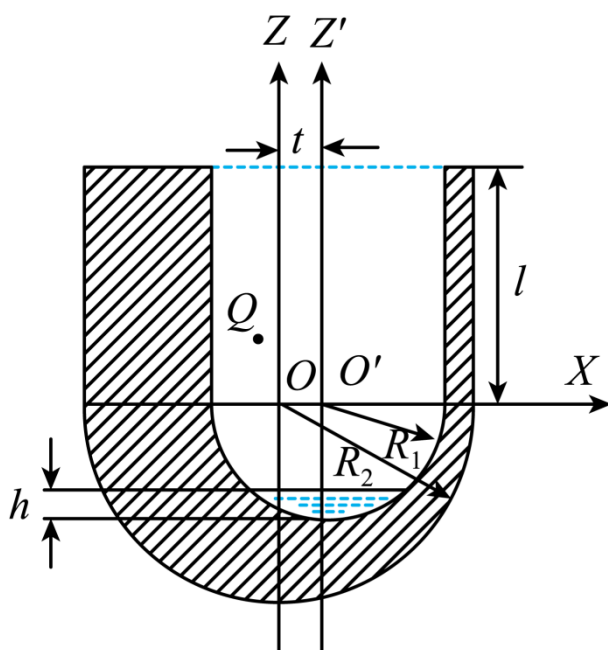
$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a \cos^2 \theta + (a+2) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\frac{a}{\tan \theta} + (a+2) \tan \theta} \\ &= \frac{2}{\left[\sqrt{\frac{a}{\tan \theta}} - \sqrt{(a+2) \tan \theta} \right]^2 + 2\sqrt{a(a+2)}} \end{aligned}$$

从上式可看出，当 $\sqrt{\frac{a}{\tan \theta}} = \sqrt{(a+2)\tan \theta}$ 时，即 $\tan \theta = \sqrt{\frac{a}{a+2}}$ 时， $F(\theta)$ 达极大值，其值为

$$F(\theta)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{a(a+2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{3m}\left(\frac{2M}{3m}+2\right)}} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2+3mM}}$$

$$\text{故 } \mu_{\min} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2+3mM}}$$

3. (2020 • 全国竞赛) 据《荀子•有坐篇》记载，孔子观于鲁桓公之庙，有欹(qī)器焉。欹器者，“虚则欹，中则正，满则覆。”悬挂式欹器实物如图 7a 所示：欹器空时，器身倾斜；注水适中，器身正立；注水过满，器身倾覆。图 7b 为悬挂式欹器的正视剖面图。整个欹器的外轮廓是相对于 Z 轴的回转面， Z' 轴为内部管腔的对称轴，容器内壁与外壁的半球壳半径分别为 $R_1 = R$ 和 $R_2 = \sqrt{3}R$ ，两半球的球心 O 和 O' 均位于 X 轴上。 Z' 轴和 Z 轴相距 $t = 3R/10$ ，欹器圆柱部分的长度 $l = 2R$ 。欹器的一对悬挂点所在直线与 XOZ 平面交于 Q 点，其坐标为 $(x_Q = -R/10, z_Q = 2\sqrt{3}R/1)$ 。欹器材质均匀，其密度 ρ_1 为水的密度 ρ_2 的 3 倍。不计摩擦。



- (1) 求空欹器自由悬挂平衡时 Z 轴与竖直方向的夹角。
- (2) 求空欹器绕一对悬挂点所在轴的转动惯量及其在平衡位置附近微振动的角频率 (已知密度为 ρ 、半径为 R 的匀质球体绕过其质心的轴的转动惯量为 $I_1 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$ ；半径为 R 、长度为 L 的匀质圆柱体绕过其质心且平行于圆柱底面的轴的转动惯量为 $I_2 = \frac{\pi\rho R^2 L(3R^2 + L^2)}{12}$)。
- (3) 让空欹器自由悬挂，并开始往欹器内缓慢注水，问欹器内水面到底部的距离 h 为多少时器身正立？

(4) 简述“满则覆”的临界条件。

【答案】(1) 40.5333° ; (2) $12.306\rho_1\pi R^5$, $0.122624\sqrt{\frac{g}{R}}$; (3) $1.23526R$; (4) 系统质心刚好高于悬挂

点; 或 $x_{CH} = -x_O$, $z_{CH} = z_O$

【详解】(1) 假设整个欹器是实心时, 它分为长圆柱部分 (I) 和半球部分 (II)。

在坐标系 XOZ 中, 圆柱部分质心的位置为:

$$x_{CI} = 0, \quad z_{CI} = \frac{l}{2} = R$$

半球部分质心的位置为:

$$x_{CII} = 0, \quad z_{CII} = \frac{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) z dz}{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) dz} = -\frac{3}{8} R_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{8} R = -0.6495R \quad (1)$$

设整个实心体的质心坐标为 $(x_{C实} = 0, z_{C实})$, 则

$$\left(\rho \pi R_2^3 l + \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3 \right) z_{C实} = \rho \pi R_2^3 l \frac{l}{2} - \rho \frac{2}{3} \pi R_2^3 \frac{3R_2}{8}$$

于是

$$x_{C实} = 0, \quad z_{C实} = \frac{3(2l^2 - R_2^2)}{4(3l + 2R_2)} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{16} R = 0.3962R \quad (2)$$

相应地, 整个欹器空心部分的质心坐标为

$$x_{C空} = t = 0.3R, \quad z_{C空} = \frac{3(2l^2 - R_1^2)}{4(3l + 2R_1)} = \frac{21}{32} R = 0.6563R \quad (3)$$

设 $m_{实}$ 和 $m_{空}$ 分别是整个欹器是实心时欹器的质量和整个欹器空心部分刚好填实所需的质量, 有

$$m_{实} = \rho_1 \pi R_2^2 \left(\frac{2R_2}{3} + l \right), \quad m_{空} = \rho_1 \pi R_1^2 \left(\frac{2R_1}{3} + l \right)$$

整个瓶子的质心坐标为

$$x_C = \frac{m_{实} x_{C实} + (-m_{空}) x_{C空}}{m_{实} + (-m_{空})} = -\frac{R_1^2 t (3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)}$$

$$= \frac{3(5 - 3\sqrt{3})}{5} R = -0.1177R \quad (4)$$

$$z_C = \frac{m_{实} z_{C实} + (-m_{空}) z_{C空}}{m_{实} + (-m_{空})} = \frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)]} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{2} (3\sqrt{3} - 5) R = 0.2942R$$

悬挂点的位置为 $(-\frac{1}{10}R, \frac{2\sqrt{3}}{11}R)$ ，欹器内没装水悬挂时欹器倾斜的角度为

$$\theta_0 = \operatorname{arccot} \frac{z_c - z_Q}{x_c - x_Q} = \operatorname{arccot} \frac{25(5\sqrt{3}-3)}{121}$$

$$= 0.707439 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 40.5333^\circ \quad (6)$$

(2) 由球绕直径的转动惯量知，半球绕其底面圆直径的转动惯量为

$$I_{11} = \frac{1}{2} I_1 = \frac{4}{15} \pi \rho R^5$$

由平行轴定理知，半球绕穿过其质心且平行其底面的转轴的转动惯量为

$$I_{1c} = I_{11} - \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \left(\frac{3}{8} R \right)^2 = \frac{83}{480} \pi \rho R^5 = 0.1729 \pi \rho R^5 \quad (7)$$

中间为实心时欹器绕悬挂点连线的转动惯量

$$I_{\text{实}} = \frac{83}{480} \pi \rho_1 R_2^5 + \frac{2}{3} \rho_1 \pi R_2^3 \left[x_Q^2 + \left(\frac{3}{8} R_2 + z_Q \right)^2 \right] + I_2 + \rho_1 \pi R_2^2 l \left[x_Q^2 + \left(\frac{l}{2} - z_Q \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$= \frac{79588 + 7591\sqrt{3}}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 15.3283 \rho_1 \pi R^5$$

空心部分绕悬挂点连线的转动惯量

$$I_{\text{空}} = I_2 + \rho_1 \pi R_1^2 l \left[(x_Q + t)^2 + \left(\frac{l}{2} - z_Q \right)^2 \right] + I_{1c} + \frac{2}{3} \rho_1 \pi R_1^3 \left[(x_Q + t)^2 + \left(\frac{3}{8} R_1 + z_Q \right)^2 \right] \quad (9)$$

$$= \frac{(24953 - 3850\sqrt{3})}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 3.0223 \rho_1 \pi R^5$$

欹器绕悬挂点连线的转动惯量

$$I = I_{\text{实}} - I_{\text{空}} = \frac{(54635 + 11441\sqrt{3})}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 12.306 \rho_1 \pi R^5 \quad (10)$$

质心到悬挂点轴线的距离

$$d = \sqrt{\left(-\frac{R_1^2 t (3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)} + x_Q \right)^2 + \left(\frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)]} - z_Q \right)^2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}-5)\sqrt{2}}{220} \sqrt{30848 - 17541\sqrt{3}} \rho_1 \pi R^3 = 0.02722 \rho_1 \pi R^3$$

$$m_{\text{欹}} = m_{\text{实}} - m_{\text{空}} = \rho_1 \pi \left[R_2^2 \left(\frac{2R_2}{3} + l \right) - R_1^2 \left(\frac{2R_1}{3} + l \right) \right] = \frac{2}{3} (5 + 3\sqrt{3}) \rho_1 \pi R^3$$

欹器绕悬挂点连线摆动的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{敬}}gd}{I}} = \sqrt{\frac{110\sqrt{2(30848-17541\sqrt{3})}}{163905+34323\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{g}{R}} = 0.122624\sqrt{\frac{g}{R}} \quad (11)$$

(3) (解法一) 设敬器竖直时里面装的水的质量为 m_s 。

此时水、敬器以及整个体系质心的横坐标 x_{CS} 、 x_C 和 x_{Ct} 分别为

$$x_{CS} = t \quad (12)$$

$$x_C = \frac{3(5-3\sqrt{3})}{5}R = -0.1177R$$

$$x_{Ct} = x_Q \quad (13)$$

故有

$$x_{Ct}(m_s + m_q) = m_s x_{CS} + m_q x_C \quad (14)$$

解得：

$$m_s = \frac{m_q(x_C - x_{Ct})}{x_{Ct} - x_{CS}} = \frac{m_q(x_C - x_Q)}{x_Q - t} = 0.3006\rho_1\pi R^3 = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (15)$$

$$\text{由于 } m_s = 0.9018\rho_2\pi R^3 > \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 \quad (16)$$

故水的体积大于底部半球的容器，即 $h > R$ 。

因有

$$m_s = \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 + \rho_2\pi R^2(h - R) = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (17)$$

解得

$$h = \frac{(23-9\sqrt{3})}{6}R = 1.23526R \quad (18)$$

此时整个体系质心的纵坐标

$$\begin{aligned} z_{Ct} &= \frac{mz_C + m_{s2}z_{Cs}}{m + m_{s2}} = \frac{3\left\{\left[\rho_1(R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2R_1^2(2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)\right]\right\}}{4\left\{\rho_1\left[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_1^3)\right] + \rho_2R_1^2(3h - R_1)\right\}} \\ &= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} = 0.271326R < z_Q \end{aligned}$$

故 $h = 1.23526R$ 时敬器正立。

(解法二)

若 $h \leq R_1$ 时敬器竖直位置， $h \leq R_1$ 时，水的质心位置为

$$\begin{cases} x_{CS_1} = t = 0.3R \\ z_{CS_1} = \frac{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2 \pi (R^2 - z^2) z dz}{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2 \pi (R^2 - z^2) dz} = -\frac{3(2R-h)^2}{4(3R-h)} \end{cases} \quad (12)$$

欹器的质量 m 和此时欹器中水的质量 m_s 分别为

$$\begin{aligned} m &= \rho_1 \left[\left(\frac{2}{3} \pi R_2^3 + \pi R_2^2 l \right) - \left(\frac{2}{3} \pi R_1^3 + \pi R_1^2 l \right) \right] = \frac{1}{3} \rho_1 \pi \left[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3) \right] \\ &= \frac{1}{3} \rho_1 \pi (R_2 - R_1) \left[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2) \right] \\ m_{s_1} &= \int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2 \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{\rho_2 \pi h^2 (3R - h)}{3} \end{aligned}$$

整个装置的质心 C_t ，的位置坐标为

$$\begin{aligned} x_{Ct} &= \frac{mx_C + m_s x_{CS}}{m + m_s} = \frac{[\rho_1 R_1^2 (3l + 2R_1) + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)] t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)} \quad (13) \\ &= \frac{3R(24R^3 - 3h^2 R + h^3)}{10[(h - 3R)h^2 - 6(5 + 3\sqrt{3})R^3]} \end{aligned}$$

欹器身正立时，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{Ct} = x_Q = -0.1h, \quad (14)$$

解得

$$h = -0.8394R, \quad h = 1.2389R, \quad h = 2.5996R, \quad \text{均不满足 } 0 < h < R, \quad (15)$$

故此时无解。

因此欹器竖直时，必有 $h > R_1$ 。

当 $h > R_1$ 时，与③、④式对比（③、④式中可视为 $l = h - R_1$ ），得水的质心位置为

$$\begin{aligned} x_{CS} &= t = 0.3R \\ z_{CS} &= \frac{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) z dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 z dz}{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 dz} = \frac{3(2h^2 - 4hR + R^2)}{4(3h - R)} \quad (16) \end{aligned}$$

此时欹器中水的质量 m_{s_2} 为

$$m_{s_2} = \rho_1 \pi R_1^2 \left(h - \frac{R_1}{3} \right)$$

整个装置的质心位置为

$$x_{C12} = \frac{mx_C + m_{S_2}x_{CS_2}}{m + m_{S_2}} = \frac{R_1^2 [\rho_1(3l + 2R_1) + \rho_2(R_1 - 3h)]t}{\rho_1[3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2(R_1 - 3h)} \quad (17)$$

$$= \frac{3(3h - 25R)R}{10[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]}$$

$$z_{C12} = \frac{mz_C + m_{S_2}z_{CS_2}}{m + m_{S_2}} = \frac{3\left\{\rho_1(R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2 R_1^2(2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)\right\}}{4\left\{\rho_1[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2(3h - R_1)\right\}} \quad (18)$$

$$= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]}$$

欹器身正立，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{C12} = x_Q = -0.1h$$

且 $z_{C12} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11}h$

当 $h > R_1$ 时，由式，有

$$h = \frac{1}{3} \left[R_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(3l + 2R_1 - \frac{x_Q R_2^2 (3l + 2R_2)}{R_1^2 (t - x_Q)} \right) \right] = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6} R = 1.23526R \quad (19)$$

而由 $z_{C12} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11}h$ 得

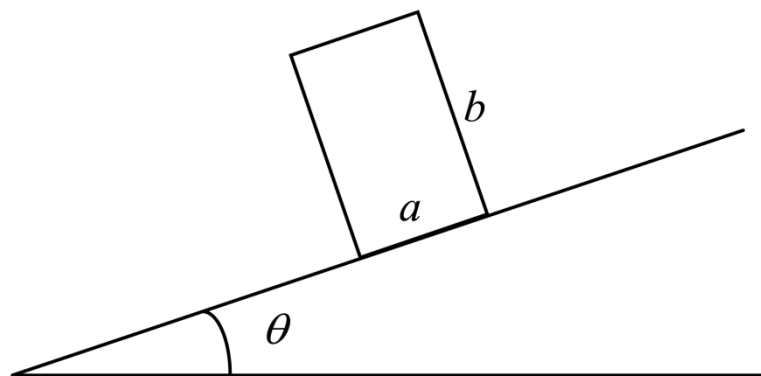
$$0 < h < 2.67979R \text{ 或 } h < -20.059R$$

故 $h = 1.23526R$ 时欹器正立。

(4) 欹器“满则覆”的临界条件是：系统质心刚好高于悬挂点；或

$$x_{CH} = -x_Q, \quad z_{CH} = z_Q \quad (20)$$

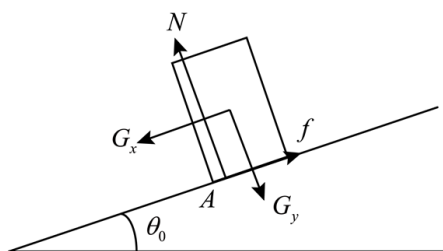
4. (2007·全国竞赛) 底边长为 a ，高度为 b 的长方形匀质物块置于斜面上。斜面和物块之间的静摩擦因数为 μ ，斜面的倾角为 θ 。当 θ 足够小时，物块静止于斜面上（如图），如逐渐将倾角增大，当 θ 取某个临界值 θ_0 时，物块或将开始滑动，或将翻倒。试分别求出发生滑动和翻倒时的 θ_0 ，并说明在什么条件下出现的是滑动，在什么条件下出现的是翻倒。



【答案】 $\operatorname{tg} \theta_0 = \mu$, $\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a}{b}$, 如 $\mu < \frac{a}{b}$, 则当 θ 增大至 $\theta = \operatorname{arctg} \mu$ 时物块开始滑动, 如 $\mu > \frac{a}{b}$, 则当 θ 增大至 $\theta = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ 时物块开始翻倒。

【详解】 1. 分别求出开始出现滑动和出现翻倒时的 θ_0 。

(1) 出现滑动



设重力 $G=mg$ 沿斜面与垂直于斜面的两个分力为 G_x 与 G_y , 斜面对物体的支承力为 N , 摩擦力为 f 如 $\theta = \theta_0$ 。时物体开始滑动 (图), 必有

$$G_x = f = \mu N, \quad G_y = N$$

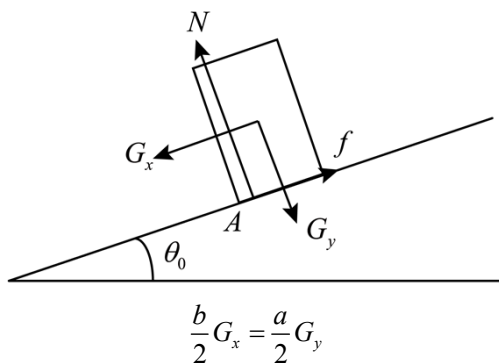
用 $G_x = mg \sin \theta_0$, $G_y = mg \cos \theta_0$ 代入, 得

$$mg \sin \theta_0 = \mu mg \cos \theta_0$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \mu$$

(2) 出现翻倒

如 $\theta = \theta_0$ 时物体将要翻倒, 则物体必是绕通过下角处的 A 轴翻转 (如图)。这时支承力 N 与摩擦力 f 都通过 A 轴, 不产生对 A 轴的力矩。翻倒的临界条件是



可得

$$bmg \sin \theta_0 = amg \cos \theta_0$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a}{b}$$

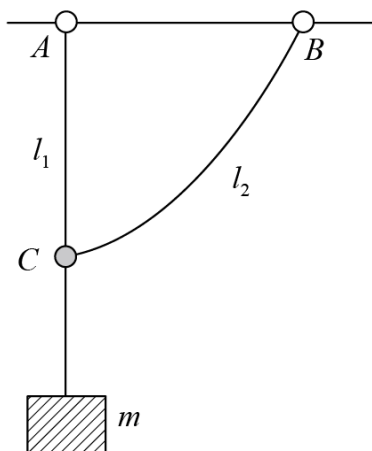
2. 因此，得出结论：

如 $\mu < \frac{a}{b}$ ，则当 θ 增大至 $\theta = \operatorname{arctg} \mu$ 时物块开始滑动。

如 $\mu > \frac{a}{b}$ ，则当 θ 增大至 $\theta = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ 时物块开始翻倒。

$\mu = \frac{a}{b}$ 的情况，不要求讨论。

5. (2007 • 全国竞赛) 如图所示，有两根不可伸长的柔软的轻绳，长度分别为 l_1 和 l_2 ，它们的下端在 C 点相连接并悬挂一质量为 m 的重物，上端分别与质量可忽略的小圆环 A 、 B 相连，圆环套在圆形水平横杆上， A 、 B 可在横杆上滑动，它们与横杆间的静摩擦系数分别为 μ_1 和 μ_2 。已知 l_1 和 l_2 的数值，且 $l_1 < l_2$ 。试求 μ_1 和 μ_2 在各种取值情况下，此系统处于静力平衡时两环之间的距离 AB 。



【答案】当 $\mu_1 = 0$ 或 $\mu_2 = \frac{F_2}{N_2} = \tan \varphi_2 = \frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}{l_1} = \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$ 时， $0 \leq AB \leq \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ ；当 $\mu_1 \neq 0$ ， $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 时，

$$AB_{\text{。}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}} \left(\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2} \right); \text{ 当 } \mu_1 \neq 0, 1+\mu_2^2 > \frac{l_2^2}{l_1^2} \text{ 且 } \frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2} \text{ 时,}$$

$$AB_{\text{。}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \left(\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2} \right)$$

【详解】解法 1

由于 l_1 和 l_2 为已知量, 只要求出 AB 的值 $\angle ABC$ 即确定 (即 A 、 B 、 C 的相对位置确定)。现对系统平衡时 AB 应取的数值分析如下:

1. 已知 $l_1 < l_2$, 则当 A 、 C 和重物在同一竖直线上时, 系统平衡, AC 张紧, 长绳 l_2 则松弛 (如图决解 16-3 所示)。将 B 沿杆右移直至 BC 绳拉直 (如图决解 16-4 所示), 系统一直保持平衡, 这与 μ_1, μ_2 的取值无关, 若使 B 继续右移一极小的距离 Δx , 则绳 BC 中将出现张力, C 点右移, AC 将倾斜, 其中张力也将改变。如果 $\mu_1 = 0$, A 环将在 AC 绳张力作用下滑动, 所以系统将失去平衡, 若 $\mu_1 \neq 0$, 设此时 BC 中张力为 T , 则 B 环与杆间正压力 $N_2 = T \cos \varphi_2$, B 环所受向左的力 $F_2 = T \sin \varphi_2$ 。如果 $F_2 > \mu_2 N_2$, 则 B 环向左滑回原处, 系统失去平衡。由此可见, 当 $\mu_1 = 0$ 或 $\mu_2, \frac{F_2}{N_2} = \tan \varphi_2 = \frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}{l_1} = \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$ 时, 系统的平衡位置只能是 A 、 C 在竖直线上, $0, AB_{\text{。}} \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ (结论一)。

2. 当 $\mu_1 \neq 0, \mu_2 > \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$, 且 $AB > \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ 时,

系统将如图决解 16-5 所示, A 环受力: $N_1 = T_1 \cos \varphi_1$;

$F_1 = T_1 \sin \varphi_1$, 当 $F_1 > \mu_1 N_1$, 即 $\tan \varphi_1 > \mu_1$ 时 A 环将不

能保持静止。同理, $\tan \varphi_2 > \mu_2$ 时, B 环将不能保持静

止, A 、 B 两环哪个先动, 将由 μ_1 、 μ_2 的数值决定。图决解 16-5 中的 φ_1 与 φ_2 是互相关联的量。由正弦定律

有 $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$, 当 AB 值增大时, θ_1 和 θ_2 均减小, φ_2 和 φ_1 随之增大。设 C 点与 AB 的距离为 h , 由几何关系

可得 $\tan \varphi_1 = \sqrt{\frac{l_1^2}{h^2} - 1}$, $\tan \varphi_2 = \sqrt{\frac{l_2^2}{h^2} - 1}$ 。

设 A 滑动时, $h = h_A$, 则 $\frac{l_1^2}{h_A^2} - 1 = \mu_1^2$, $h_A^2 = \frac{l_1^2}{1 + \mu_1^2}$

设 B 滑动时, $h = h_B$, 则 $\frac{l_2^2}{h_B^2} - 1 = \mu_2^2$, $h_B^2 = \frac{l_2^2}{1 + \mu_2^2}$

比较 h_A 和 h_B 的大小即可知 AB 增大 (即 h 减小) 时 A 、 B 两环谁先滑动.

(a) 若 $h_A > h_B$, 则 A 先滑动, 即 $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的条件下, 当 $h = h_A$ 时, A 即将滑动, 此时

$$\theta_{1A} = \arcsin \frac{h_A}{l_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$AD = \sqrt{l_1^2 - h_A^2} = \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$\theta_{2A} = \arcsin \frac{h_A}{l_2} = \arcsin \frac{l_1}{l_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$BD = \sqrt{l_2^2 - h_A^2} = \frac{\sqrt{l_2^2 + \mu_1 l_2^2 - l_1^2}}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \left(\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1 l_2^2 - l_1^2} \right)$$

由此可得结论二:

在 $\mu_1 \neq 0$, $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的情况下, 若系统保持平衡, AB 的数值一定满足下面的要求:

$$AB \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \left(\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1 l_2^2 - l_1^2} \right)$$

(注意, 此时 $\mu_2^2 > \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$ 的条件自然得到满足)

(b) 若 $h_A < h_B$, 则 B 先滑动, 即 $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的条件下, 当 $h = h_B$ 时, B 即将滑动, 此时

$$\theta_{1B} = \arcsin \frac{h_B}{l_1} = \arcsin \frac{l_2}{l_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$AD = \sqrt{l_1^2 - h_B^2} = \frac{\sqrt{l_1^2 + \mu_2 l_1^2 - l_2^2}}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

$$\theta_{2B} = \arcsin \frac{h_B}{l_2} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}$$

$$BD = \sqrt{l_2^2 - h_B^2} = \frac{\mu_2 l_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}$$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \left(\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2} \right) = d_B$$

由此可得结论三：

当 μ_1 、 μ_2 满足下列二条件时，在 $\mu_1 \neq 0$ ， $1+\mu_2^2 > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 且 $\frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的情况下，若系统保持平衡， AB 的数值一定满足下面的要求：

$$AB_n \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \left(\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2} \right)$$

若 $\frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}$ ，则 $h_A = h_B$ ， A 、 B 将同时开始要滑动，此时 AB 的数值为

$$AB = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1+\mu_1^2}} l_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}} l_2$$

AB 的数值满足的条件为

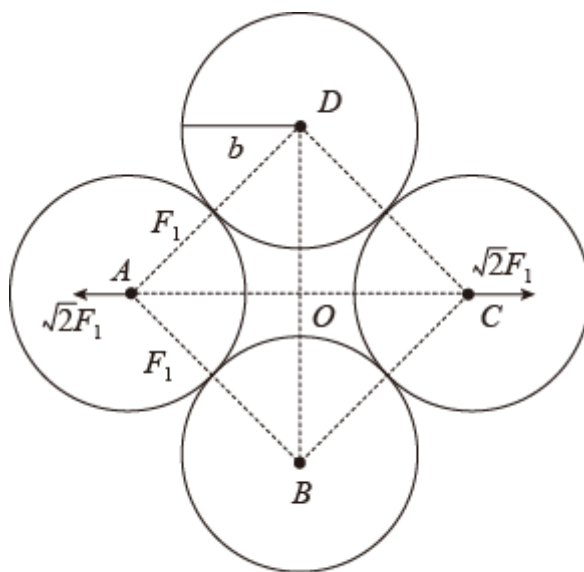
$$AB_n \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1+\mu_1^2}} l_1$$

此结果已包括在结论二和结论三中符号“ $\leq$ ”的等号中。

6. (2007·全国竞赛) 5 个质量相等的匀质球，其中 4 个半径均为 a 的球，静止放在半径为 R 的半球形碗内，它们的球心在同一水平面内。另 1 个半径为 b 的球放在 4 球之上。设接触面都是光滑的，试求碗的半径 R 的值满足什么条件时下面的球将相互分离。

【答案】 $R > \sqrt{25b^2 + 50ab - 23a^2} + a$

【详解】 设半径为 b 的球放在 4 个球上后，下面 4 个球的位置未变。以 m 表示每个球的质量，下面 4 个球的球心形成一个位于水平面内的正方形 $ABCD$ ，俯视图如图决解 20-1-1 所示。 O 为正方形对角线的交点，各球之间的相互作用力大小均为 F_L 根据对称性，并注意到接触面都是光滑的，可知每个球受到相邻两球作用力的合力都为 $\sqrt{2}F_L$ ，方向沿对角线。



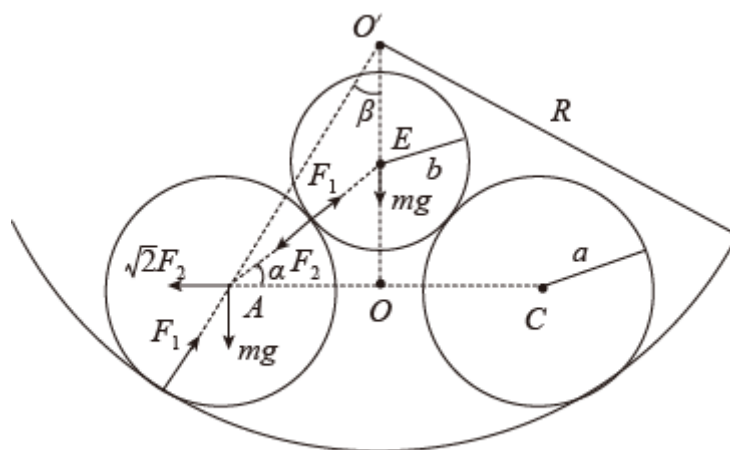
图决解20-1-1

由几何对称性分析,可知对角线 AC 、上面球的球心 E 和碗的球心 O' 应在同一竖直平面内,如图决解20-1-2所示。设上面球与下面每个球的相互作用力的大小均为 F_2 ,对 A 球, F_2 的方向沿球心 A 、 E 连线。平衡时对半径为 b 的球有

$$mg = 4F_2 \sin \alpha \quad (1)$$

式中 α 是球心连线 AE 与水平线 AC 之间的夹角,有

$$\cos \alpha = \frac{AO}{AE} = \frac{\sqrt{2}a}{a+b} \quad (2)$$



图决解20-1-2

对于下面每个球,如球 A ,受到的作用力有重力 mg , B 、 D 两球对它的作用的合力 $\sqrt{2}F_1$,上面球的作用力 F_2 和碗面的作用力 F_3 。由于体系对称且接触面光滑,各力均通过球心 A , F_3 还通过 O' ,平衡时有

$$\sqrt{2}F_1 + F_2 \cos \alpha - F_3 \sin \beta = 0 \quad (3)$$

$$F_3 \cos \beta - mg - F_2 \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

式中 β 是 F_3 方向与竖直线的夹角，有

$$\sin \beta = \frac{AO}{AO'} = \frac{\sqrt{2}a}{R-a} \quad (5)$$

由式 (1) 可得

$$F_2 = \frac{mg}{4 \sin \alpha} \quad (6)$$

由式 (4) 和 (6) 可得

$$F_3 = \frac{5mg}{4 \cos \beta} \quad (7)$$

由式 (3)、(6) 和 (7) 可得

$$F_1 = \frac{mg}{4\sqrt{2}} (5 \tan \beta - \cot \alpha) \quad (8)$$

如果 $F_1 \geq 0$ ，表示下面的 4 个球相互接触，4 个球在原来的位置；如果 $F_1 < 0$ ，则下面的 4 个球将相互分离。当下面的 4 个球分离时，由式 (8) 得

$$5 \tan \beta - \cot \alpha < 0 \quad (9)$$

利用式 (2) 和 (5)，式 (9) 化为

$$\frac{5\sqrt{2}a}{\sqrt{R^2 - 2Ra - a^2}} < \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{b^2 + 2ab - a^2}} \quad (10)$$

解此不等式，可得

$$R > \sqrt{25b^2 + 50ab - 23a^2} + a \quad (11)$$

即碗的半径 R 满足上式时，下面的球将分离。

要式 (11) 有解，应有

$$25b^2 + 50ab - 23a^2 \geq 0 \quad (12)$$

$$\text{即 } b \geq \left(\frac{4}{5}\sqrt{3} - 1 \right) a \quad (13)$$

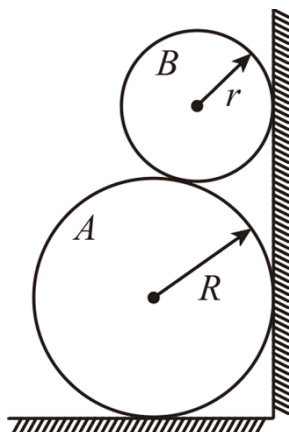
由于下面各球距 O 的最小距离为 $(\sqrt{2} - 1)a$ ，现上面的球能放在 4 个球的上面，表明

$$b > (\sqrt{2} - 1)a \quad (14)$$

而 $\sqrt{2} > 4\sqrt{3}/5$ ，所以只要第 5 个球能够放在 4 个球的上面，式 (12) 一定成立。

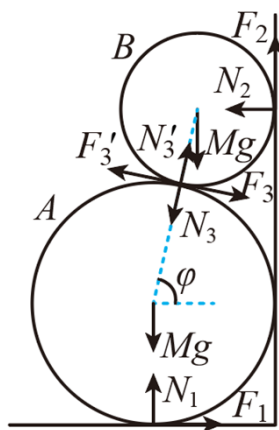
7. (2019 • 全国竞赛) 有一半径为 R 的圆柱 A，静止在水平地面上，并与竖直墙面相接触。现有另一质量与 A 相同，半径为 r 的较细圆柱 B，用手扶着圆柱 A，将 B 放在 A

的上面，并使之与墙面相接触，如图所示，然后放手。已知圆柱 A 与地面的静摩擦系数为 0.20，两圆柱之间的静摩擦系数为 0.30，若放手后，两圆柱体能保持如图所示的平衡，问：圆柱 B 与墙面间的静摩擦系数和圆柱的 B 半径 r 的值各应满足什么条件？



【答案】 $R \geq r \geq 0.29R$

【详解】放上圆柱 B 后，圆柱 B 有向下运动的倾向，对圆柱 A 和墙面有压力。圆柱 A 倾向于向左运动，对墙面没有压力。平衡是靠各接触点的摩擦力维持的。现设系统处于平衡状态，取圆柱 A 受地面的正压力为 N_1 ，水平摩擦力为 F_1 ；圆柱 B 受墙面的正压力为 N_2 ，竖直摩擦力为 F_2 ，圆柱 A 受圆柱 B 的正压力为 N_3 ，切向摩擦力为 F_3 ；圆柱 B 受圆柱 A 的正压力为 N_3' ，切向摩擦力为 F_3' ，如图所示。各力以图示方向为正方向。



已知圆柱 A 与地面的摩擦系数 $\mu_1 = 0.20$ ，两圆柱间的摩擦系数 $\mu_3 = 0.30$ 。设圆柱 B 与墙面的摩擦系数为 μ_2 ，过两圆柱中轴的平面与地面的交角为 φ 。

设两圆柱的质量均为 M ，为了求出 N_1 、 N_2 、 N_3 以及为保持平衡所需的 F_1 、 F_2 、 F_3 之值，下面列出两圆柱所受力和力矩的平衡方程。

对圆柱 A，有

$$Mg - N_1 + N_3 \sin \varphi + F_3 \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

$$F_1 - N_3 \cos \varphi + F_3 \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

$$F_1 R = F_3 R. \quad (3)$$

对圆柱 B , 有

$$Mg - F_2 - N'_3 \sin \varphi + F'_3 \cos \varphi = 0, \quad (4)$$

$$N_2 - N'_3 \cos \varphi + F'_3 \sin \varphi = 0, \quad (5)$$

$$F'_3 r = F_2 r. \quad (6)$$

由于 $F_3 = F'_3$, 得

$$F_1 = F_2 = F_3 = F'_3 = F, \quad (7)$$

式中 F 代表 F_1, F_2, F_3 和 F'_3 的大小. 又因 $N'_3 = N_3$, 于是式①②④⑤四式成为

$$Mg - N_1 + N_3 \sin \varphi + F \cos \varphi = 0, \quad (8)$$

$$F - N_3 \cos \varphi + F \sin \varphi = 0, \quad (9)$$

$$Mg - F - N_3 \sin \varphi + F \cos \varphi = 0, \quad (10)$$

$$N_2 - N_3 \cos \varphi + F \sin \varphi = 0. \quad (11)$$

以上四式是 N_1 、 N_2 、 N_3 和 F 的联立方程, 解这联立方程可得

$$N_2 = F, \quad (12)$$

$$N_3 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + \sin \varphi} Mg, \quad (13)$$

$$N_2 = F = \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi + \sin \varphi} Mg, \quad (14)$$

$$N_1 = \frac{2 + \cos \varphi + 2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + \sin \varphi} Mg. \quad (15)$$

式⑫⑬⑭⑮是平衡时所需要的力, N_1 、 N_2 、 N_3 没有问题, 但 F_1, F_2, F_3 三个力能不能达到所需要的数值 F , 即式⑫⑭要受摩擦系数的制约. 三个力中只要有一个不能达到所需的 F 值, 在那一点就要发生滑动而不能保持平衡.

首先讨论圆柱 B 与墙面的接触点. 接触点不发生滑动, 要求

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/035103321100012022>