5.4　多项式的因式分解

一、复数域与实数域

二、有理数域

一、复数域与实数域

1. 代数基本定理

$\forall f(x) \in C[x]$，若 $\partial(f(x)) \geq 1$，则 $f(x)$ 在复数域 C 上至少有一根.

推论1

$\forall f(x) \in C[x]$，若 $\partial(f(x)) \geq 1$，则存在 $x-a \in C[x]$，

使 $(x-a) \mid f(x)$.

即，$f(x)$ 在复数域上必有一次因式.

推论2

复数域上的不可约多项式只有一次多项式，即

$\forall f(x)\in C[x]$, $\partial(f(x))>1$, 则 $f(x)$可约.

2. 复系数多项式因式分解定理

$\forall f(x)\in C[x]$, 若$\partial(f(x))\geq 1$, 则 $f(x)$在复数域 C 上可唯一地分解成一次因式的乘积.

推论1

$\forall f(x)\in C[x]$, 若 $\partial(f(x))\geq 1$, 则 $f(x)$ 在 C 上具有原则分解式

$$f(x)=a(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_s)^{r_s}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是不同的复数，$r_1,r_2,\cdots,r_s\in Z^+$

推论2

$\forall f(x)\in C[x]$，若 $\partial(f(x))=n$，则 $f(x)$ 有n个复根（重根按重数计算）.

3、实系数多项式

引理：若 ~是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，则 ~ 的共轭复数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的复根.

证：设 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\quad a_i \in R$

若 ~为根，则

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

两边取共轭有 $f(\overline{\alpha})=a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_0=0$

$\therefore$ $\overline{\alpha}$ 也是为 $f(x)$ 复根.

定理5.14（实系数多项式因式分解定理）

$\forall f(x) \in R[x]$，若 $\partial(f(x)) \geq 1$， 则 $f(x)$可唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

推论1

$\forall f(x)\in R[x]$, $f(x)$ 在R上具有原则分解式

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}$$

$$\mathrm{L\ L}\ (x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r\in R$,

$$k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_s\in Z^+,$$

且 $p^2-4q<0$, $i=1,2\cdots r$ ，即 $x^2+p_ix+q_i$ 为

R上的不可约多项式.

推论2

实数域上不可约多项式只有一次多项式和某些二次不可约多项式，全部次数≥3的多项式皆可约.

例5.10 求 x^4-1 与 x^3-1 在 C 上与在 R 上的原则分解式.

解： 1) 在实数域上：

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

1) 在复数域上：

$$x^4-1$$

$$=(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$=(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$$

$$x^3-1$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$=(x-1)(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(x+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$$

二、有理数域

问题的引入

① 由实数域因式分解定理，作为一种特殊情形：

对 $\forall f(x)\in Q[x], \partial\left(f(x)\right)\geq 1,$ 则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积.

但是，怎样作出它的分解式却很复杂，没有一种一般的措施.

② 我们懂得，在C上只有一次多项式才是不可约多项式；

在 R 上，不可约多项式只有一次多项式与某些二次多项式；

但在Q上有任意次数的不可约多项式．如

$$x^n - 2,\quad \forall n \in Z^+.$$

怎样判断Q上多项式的不可约性呢？

③ 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题.
这是因为任一有理数可表成两个整数的商.

实际上，设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$,

则可选用合适整数 c，使 $cf(x)$ 为整系数多项式.

若 $cf(x)$ 的各项系数有公因子，就能够提出来，得

$$cf(x)=dg(x),\ \text{也即}\quad f(x)=\frac{d}{c}g(x),$$

其中 $g(x)$ 是整系数多项式，且各项系数没有异于 $+1$ 的公因子.

例, $\frac{3}{2}x^3+3x^2+\frac{3}{7}x+3=\frac{3}{14}(7x^3+14x^2+2x+14)$

1. 本原多项式

定义5.8 设 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0\neq 0$, $b_i\in Z$, $i=0,1,2,\cdots,n$. 若 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 没有异于 +1 的公因子，即 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 是互素的，则称 $g(x)$ 为**本原多项式**.

例 $7x^3+14x^2+2x+14$