

2022-2023 学年北师大八年级数学下册精选压轴题培优卷

专题 22 解分式方程

考试时间：120 分钟 试卷满分：100 分

评卷人	得分

一、选择题(每题 2 分, 共 20 分)

1. (本题 2 分) (2023 春·湖北武汉·八年级校考阶段练习) 定义运算 “ $*$ ”: $x*y = \begin{cases} \frac{26}{x-y}, & x > y \\ \frac{y}{y-x}, & x < y \end{cases}$. 如果

$8*a=13$, 那么 a 的值为 ()

- A. 6 B. 9 C. $\frac{26}{3}$ 或 9 D. 6 或 $\frac{26}{3}$

【答案】 D

【思路点拨】 分 $a < 8$ 和 $a > 8$, 两种情况进行求解即可.

【规范解答】 解: 由题意, 得:

当 $a < 8$ 时, $8*a = \frac{26}{8-a} = 13$,

解得: $a = 6$; 经检验, $a = 6$ 是分式方程的解;

当 $a > 8$ 时, $8*a = \frac{a}{a-8} = 13$,

解得: $a = \frac{26}{3}$; 经检验, $a = \frac{26}{3}$ 是分式方程的解;

综上, a 的值为 6 或 $\frac{26}{3}$;

故选 D.

【考点评析】 本题考查定义新运算. 理解并掌握新运算的规则, 是解题的关键.

2. (本题 2 分) (2023 秋·山西朔州·八年级统考期末) 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x+2} + 1 = \frac{n-1}{x+2}$ 无解, 则 $n =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

【答案】 A

【思路点拨】 解分式方程, 可得 $x = \frac{n-3}{2}$, 根据题意可知分式方程的增根为 $x = -2$, 即有 $\frac{n-3}{2} = -2$, 求解即可获得答案.

【规范解答】解： $\frac{x}{x+2} + 1 = \frac{n-1}{x+2}$ ，

去分母，得 $x+x+2=n-1$ ，

合并同类项、系数化为1，得 $x = \frac{n-3}{2}$ ，

由题意可知，分式方程的增根为 $x = -2$ ，

即有 $\frac{n-3}{2} = -2$ ，解得 $n = -1$ 。

故选：A。

【考点评析】 本题主要考查了解分式方程以及分式方程的增根的知识，通过分析确定该分式方程的增根为 $x = 2$ 是解题关键。

3. (本题2分) (2022秋·重庆沙坪坝·八年级统考期末) 若关于 y 的分式方程 $\frac{ay}{y-1} - 2 = \frac{y-5}{1-y}$ 的解为整数，

且 $x^2 + 2(a-1)x + 9$ 是一个完全平方式，则满足条件的整数 a 的值为 ()

A. ± 2

B. 4

C. -2

D. 4 或 -2

【答案】C

【思路点拨】 先解分式方程，再根据 $x^2 + 2(a-1)x + 9$ 是一个完全平方式求出 a 的值，最后找出符合条件的值。

【规范解答】 方程两边同时乘以 $(y-1)$ 得 $ay - 2(y-1) = 5 - y$

去括号得 $ay - 2y + 2 = 5 - y$

移项合并同类项得 $y = \frac{3}{a-1}$

$\because x^2 + 2(a-1)x + 9$ 是一个完全平方式，

$\therefore 2(a-1) = \pm 2 \times 1 \times 3 = \pm 6$ ，

解得 $a = -2$ ， $a = 4$

\because 关于 y 的分式方程 $\frac{ay}{y-1} - 2 = \frac{y-5}{1-y}$ 的解为整数，

当 $a = -2$ 时， $y = \frac{3}{-2-1} = -1$ ，经检验， $y = -1$ 是原分式方程的解；

当 $a = 4$ 时， $y = \frac{3}{4-1} = 1$ ，此时分式分母为0；

故选 C。

【考点评析】 本题考查了解分式方程和完全平方式，求出 y 的值后注意检验。

4. (本题 2 分) (2023 秋·重庆涪陵·八年级统考期末) 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} 3x > 2(x+3) \\ x > a \end{cases}$ 的解集

为 $x > 6$, 且关于 y 的分式方程 $\frac{y}{3-y} = 1 + \frac{3-a}{y-3}$ 的解是非负整数, 则所有满足条件的整数 a 的值之和是

()

A. 4

B. 6

C. 12

D. 16

【答案】 B

【思路点拨】 先由不等式组的解集求得 $a \leq 6$, 再解分式方程得 $y = \frac{a}{2}$, 然后根据分式方程的解为非负整数且 $y \neq 3$ 得到 a 的值, 进而可求解.

【规范解答】 解: $\begin{cases} 3x > 2(x+3) \textcircled{1} \\ x > a \textcircled{2} \end{cases}$,

解①得 $x > 6$,

\therefore 该不等式组的解集为 $x > 6$,

$\therefore a \leq 6$,

解方程 $\frac{y}{3-y} = 1 + \frac{3-a}{y-3}$,

$-y = y - 3 + 3 - a$,

$2y = a$

$\therefore y = \frac{a}{2}$,

\therefore 分式方程的解为非负整数, 且 $y \neq 3$,

$\therefore a$ 的值为 0, 2, 4,

\therefore 所有满足条件的整数 a 的值之和是 $0+2+4=6$,

故选: B.

【考点评析】 本题考查解一元一次不等式组、解分式方程、分式方程的解, 理解分式方程的解, 掌握一元一次不等式组的解法, 正确求出 a 值是解答的关键, 注意分式有意义的条件.

5. (本题 2 分) (2022 秋·全国·八年级专题练习) 关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+1}{2} \geq 1 \\ x+5 > a \end{cases}$ 有解, 且

使关于 y 的分式方程 $\frac{ay-2}{y-3} = 2 - \frac{1}{3-y}$ 的解为整数, 则所有满足条件的整数 a 的值之和是 ()

A. 8

B. 5

C. 3

D. 2

【答案】D

【思路点拨】解不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+1}{2} \geq 1 \textcircled{1} \\ x+5 > a \textcircled{2} \end{cases}$ ，又因为不等式组有解，得到 $a < 4$ ，由于 $\frac{ay-2}{y-3} = 2 - \frac{1}{3-y}$ ，

得到： $y = \frac{3}{2-a}$ ，因为 $a < 4$ ，且 $y \neq 3$ ，且整数，得到 $a = 3, -1$ ；

即可求解；

【规范解答】解： $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+1}{2} \geq 1 \textcircled{1} \\ x+5 > a \textcircled{2} \end{cases}$

由①得： $x \leq -1$ ，

由②得： $x > a-5$ ，

因为不等式组有解，

$\therefore a-5 < x \leq -1$ ；

$\therefore a-5 < -1$ ；

$\therefore a < 4$ ，

由 $\frac{ay-2}{y-3} = 2 - \frac{1}{3-y}$ ，

得 $\frac{ay-2}{y-3} = \frac{2y-5}{y-3}$ ，

得到： $y = \frac{3}{2-a}$ ，

$\therefore a < 4$ ，且 $y \neq 3$ ，为整数，

$\therefore a = 3, -1$ ；

$3 + (-1) = 2$ 。

故选：D

【考点评析】本题主要考查了分式方程的解，一元一次不等式组的解集，有理数的混合运算，考虑解分式方程可能产生增根是解题的关键。

6. (本题2分) (2021春·全国·八年级专题练习) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-3(x-2) > -2 \\ \frac{a+x}{2} < x \end{cases}$ 有解，关于 y 的

分式方程 $\frac{ay-1}{4-y} + \frac{3}{y-4} = -2$ 有整数解，则符合条件的所有整数 a 的和为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 5

【答案】B

【思路点拨】先解不等式组，由不等式组有解，可得 $a < 4$ ，再解分式方程，当 $a \neq 2$ 且 $a \neq 1$ 时，分式方程的解为： $y = -\frac{4}{a-2}$ ，再由 y, a 为整数，分类讨论可得答案。

【规范解答】解：
$$\begin{cases} x-3(x-2) > -2 \textcircled{1} \\ \frac{a+x}{2} < x \textcircled{2} \end{cases}$$

由①得： $x-3x+6 > -2$,

$\therefore -2x > -8$,

$\therefore x < 4$,

由②得： $a+x < 2x$,

$\therefore x > a$,

\therefore 关于 x 的不等式组
$$\begin{cases} x-3(x-2) > -2 \\ \frac{a+x}{2} < x \end{cases}$$
 有解，

$\therefore a < 4$,

Q $\frac{ay-1}{4-y} + \frac{3}{y-4} = -2$,

$\therefore ay-1-3 = -2(4-y)$,

$\therefore ay-2y = -4$,

$\therefore (a-2)y = -4$,

当 $a=2$ 时，方程无解，则 $a \neq 2$,

$\therefore y = \frac{-4}{a-2} = -\frac{4}{a-2}$,

检验： $y-4 \neq 0$,

$\therefore -\frac{4}{a-2} - 4 \neq 0$,

$\therefore \frac{4}{a-2} \neq -4$,

$\therefore a-2 \neq -1$,

$\therefore a \neq 1$,

$\therefore y, a$ 为整数，

$\therefore a-2 = \pm 1$ 或 $a-2 = \pm 2$ 或 $a-2 = \pm 4$,

$\therefore a = 3$ 或 $a = 1$ 或 $a = 4$ 或 $a = 0$ 或 $a = 6$ 或 $a = -2$,

$\therefore a < 4$, $a \neq 2$, $a \neq 1$,

解不等式 $\frac{2x-3}{6} \geq \frac{2}{3}$ 得, $x \geq \frac{7}{2}$,

∵ 不等式组无解,

$$\therefore \frac{7}{2} \geq \frac{2a-1}{2},$$

解得 $a \leq 4$;

由分式方程 $3 - \frac{a}{y-2} = \frac{y-6}{2-y}$,

解得: $y = \frac{a+12}{4}$,

∵ 分式方程有正整数解,

∴ $y > 0$ 且 $y \neq 2$,

即 $\frac{a+12}{4} > 0$ 且 $\frac{a+12}{4} \neq 2$,

解得 $a > -12$ 且 $a \neq -4$,

∴ $-12 < a \leq 4$ 且 $a \neq -4$,

∵ $\frac{a+12}{4}$ 是正整数,

∴ $a = -8, 0, 4$,

∴ 满足条件的所有整数 a 的和 $= -8 + 0 + 4 = -4$,

故选: A.

【考点评析】 本题考查了解分式方程, 解一元一次不等式组, 熟练掌握解分式方程和一元一次不等式组的方法是解题的关键.

9. (本题 2 分) (2020 秋·重庆北碚·八年级西南大学附中校考期末) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-4}{2} \leq -\frac{x}{2} + 1 \\ 7x+4 > -a \end{cases}$

有且仅有四个整数解, 且关于 y 的分式方程 $\frac{a}{2-y} + \frac{2}{y-2} = -2$ 有非负数解, 则所有满足条件的整数 a 的值之和是 ()

A. 3

B. 1

C. 0

D. -3

【答案】 B

【思路点拨】 先解不等式组, 根据不等式组有且仅有四个整数解, 得出 $-4 < a \leq 3$, 再解分式方程

$\frac{a}{2-y} + \frac{2}{y-2} = -2$, 根据分式方程有非负数解, 得到 $a \geq -2$ 且 $a \neq 2$, 进而得到满足条件的整数 a 的值之和.

【规范解答】解：
$$\begin{cases} \frac{x-4}{2} \leq -\frac{x}{2} + 1 \\ 7x+4 > -a \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -\frac{a+4}{7} \end{cases}$$

∴ 不等式组有且仅有四个整数解，即整数解为：3、2、1、0；

$$\therefore -1 \leq -\frac{a+4}{7} < 0,$$

$$\therefore -4 < a \leq 3;$$

$$\therefore \frac{a}{2-y} + \frac{2}{y-2} = -2,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(a+2),$$

∴ 分式方程有非负数解，

$$\therefore y = \frac{1}{2}(a+2) \geq 0, \text{ 且 } y = \frac{1}{2}(a+2) \neq 2,$$

解得： $a \geq -2$ ，且 $a \neq 2$ ，

$$\therefore -2 \leq a \leq 3, \text{ 且 } a \neq 2;$$

∴ 满足条件的整数 a 的值为：-2，-1，0，1，3，

∴ 满足条件的整数 a 的值之和是 1.

故选：B.

【考点评析】 本题主要考查了解分式方程，解一元一次不等式组，熟练掌握解分式方程和不等式组的能力，并根据题意得到关于 a 的范围是解题的关键.

10. (本题 2 分) (2018 秋·山东德州·八年级统考期末) 若数 a 使关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-1} + \frac{a}{1-x} = 4$ 的解为

正数，且使关于 y 的不等式组 $\begin{cases} \frac{y+2}{3} - \frac{y}{2} > 1 \\ 2(y-a) \leq 0 \end{cases}$ 的解集为 $y < -2$ ，则符合条件的所有整数 a 的和为()

A. 10

B. 12

C. 14

D. 16

【答案】 A

【思路点拨】 根据分式方程的解为正数即可得出 $a < 6$ 且 $a \neq 2$ ，根据不等式组的解集为 $y < -2$ ，即可得出 $a \geq -2$ ，找出 $-2 \leq a < 6$ 且 $a \neq 2$ 中所有的整数，将其相加即可得出结论.

【规范解答】解： 分式方程 $\frac{2}{x-1} + \frac{a}{1-x} = 4$ 的解为 $x = \frac{6-a}{4}$ 且 $x \neq 1$ ，

∴ 关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-1} + \frac{a}{1-x} = 4$ 的解为正数，

$$\therefore \frac{6-a}{4} > 0 \text{ 且 } \frac{6-a}{4} \neq 1, \text{ 即 } a < 6 \text{ 且 } a \neq 2$$

$$\begin{cases} \frac{y+2}{3} - \frac{y}{2} > 1 \text{①} \\ 2(y-a) \leq 0 \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得： $y < -2$ ；

解不等式②得： $y \leq a$ 。

∴关于 y 的不等式组 $\begin{cases} \frac{y+2}{3} - \frac{y}{2} > 1 \\ 2(y-a) \leq 0 \end{cases}$ 的解集为 $y < -2$ ，

∴ $a \geq -2$ 。

∴ $-2 \leq a < 6$ 且 $a \neq 2$ 。

∴ a 为整数，

∴ $a = -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5$ ，

$$(-2) + (-1) + 0 + 1 + 3 + 4 + 5 = 10.$$

故符合条件的所有整数 a 的和是 10。

故选 A。

【考点评析】 本题考查分式方程的解以及解一元一次不等式、一元一次不等式组，根据分式方程的解为正数结合不等式组的解集为 $y < -2$ ，找出 $-2 \leq a < 6$ 且 $a \neq 2$ 是解题的关键。

评卷人	得分

二、填空题(每题 2 分, 共 20 分)

11. (本题 2 分) (2021 春·四川成都·八年级校考期中) 已知 m 是不等式组 $\begin{cases} m-2 < 3m-10 \\ m < 8 \end{cases}$ 的正整数解，

则分式方程 $\frac{2}{x-2} = \frac{m}{x+1}$ 有整数解的概率为_____。

【答案】 $\frac{1}{3}$

【思路点拨】 先解不等式组求出解集，确定正整数 m 的值，再解分式方程，得到方程有整数解时 m 的值，然后利用概率公式求解即可。

【规范解答】 解：解不等式 $m-2 < 3m-10$ ，得 $m > 4$ ，

所以不等式组 $\begin{cases} m-2 < 3m-10 \\ m < 8 \end{cases}$ 的解集为 $4 < m < 8$ ，

∴ 正整数 $m = 5, 6, 7$ 。

分式方程去分母得： $2(x+1) = m(x-2)$ ，

整理，得 $(m-2)x = 2m+2$ ，

当 $m-2 \neq 0$ 即 $m \neq 2$ 时， $x = \frac{2m+2}{m-2}$ ，

即 $x = 2 + \frac{6}{m-2}$ ，

∴ 分式方程有整数解，且 $x \neq 2$ ， $x \neq -1$ ，

∴ 只有 $m=5$ 满足要求，

∴ 分式方程 $\frac{2}{x-2} = \frac{m}{x+1}$ 有整数解的概率为： $\frac{1}{3}$ 。

故答案为： $\frac{1}{3}$ 。

【考点评析】 本题考查了概率公式，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。也考查了一元一次不等式组的整数解以及解分式方程。

12. (本题 2 分) (2022 秋·山东济宁·八年级济宁学院附属中学校考期中) 对于两个不相等的有理数 a, b ，我们规定符号 $\text{Max}\{a, b\}$ 表示 a, b 中的较大值，如： $\text{Max}\{2, 4\} = 4$ ，按照这个规定，方程 $\text{Max}\{-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\} = \frac{2}{3-x}$ 的解为_____。

【答案】 $x=1$ 或 $x=-3$

【思路点拨】 分类讨论 $-\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x}$ 的大小情况，利用题中的新定义得出对应方程，求解即可。

【规范解答】 解：(1) 当 $-\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ 时，方程整理得： $\frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$ ，

去分母得： $3-x = 2x$ ，

解得： $x=1$ ，

经检验 $x=1$ 是分式方程的解；

(2) 当 $-\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$ 时，方程整理得： $-\frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$ ，

去分母到： $x-3 = 2x$ ，

解得： $x=-3$ ，

经检验 $x=-3$ 是分式方程的解。

故答案为： $x=1$ 或 $x=-3$ 。

【考点评析】 此题考查了解分式方程，关键在于理解把新定义方程转化为对应的分式方程，分情况讨论注意要验根，避免增根。

13. (本题 2 分) (2022 秋·全国·八年级专题练习) 已知有理数 $a \neq 1$ ，我们把 $\frac{1}{a-1}$ 称为 a 的差倒数，如：2

的差倒数是 $\frac{1}{2-1}=1$ ， -1 的差倒数是 $\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$ ，如果 m 的差倒数正好是 m ，那么 $m^4 + \frac{1}{m^4}$ 的值是

_____.

【答案】 7

【思路点拨】 由 m 的差倒数正好是 m 得到 $m^2 = m + 1$ ，求得 $m^4 = 3m + 2$ ，整体代入 $m^4 + \frac{1}{m^4}$ ，计算整理后即可得到答案.

【规范解答】 解：∵ m 的差倒数正好是 m ，

$$\therefore \frac{1}{m-1} = m,$$

$$\therefore m^2 - m = 1,$$

$$\therefore m^2 = m + 1,$$

$$\therefore m^4 = (m^2)^2 = (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 = m + 1 + 2m + 1 = 3m + 2,$$

$$\therefore m^4 + \frac{1}{m^4} = 3m + 2 + \frac{1}{3m+2} = \frac{9m^2 + 12m + 5}{3m+2} = \frac{9(m+1) + 12m + 5}{3m+2} = \frac{21m + 14}{3m+2} = \frac{7(3m+2)}{3m+2} = 7,$$

故答案为：7

【考点评析】 此题考查了分式方程、分式的加法、完全平方公式等知识，整体代入是解题的关键.

14. (本题 2 分) (2022 秋·八年级课时练习) 关于 x 的方程 $\frac{3}{x-3} - \frac{ax}{x^2-9} = \frac{4}{x+3}$ 无解，则 $a =$ _____.

【答案】 -1 或 -8 或 6

【思路点拨】 根据分式方程无解的两种情况：分式方程有增根，即分母为零；分式方程转化为整式方程后，整数方程无解，即未知数系数为 0 来求解.

【规范解答】 解： $\frac{3}{x-3} - \frac{ax}{x^2-9} = \frac{4}{x+3}$ ，

变形为

$$\frac{3}{x-3} - \frac{ax}{(x+3)(x-3)} = \frac{4}{x+3},$$

去分母得

$$3x + 9 - ax = 4x - 12,$$

$$\therefore \frac{3}{x-3} - \frac{ax}{x^2-9} = \frac{4}{x+3} \text{ 无解,}$$

∴ 分式方程有增根，即分母为 0 时， $(x+3)(x-3) = 0$ ，

$$\text{解得 } x_1 = -3, x_2 = 3,$$

把 $x_1 = -3$ 代入 $3x + 9 - ax = 4x - 12$ 中得

$$3a = -24,$$

解得 $a = -8,$

把 $x_1 = 3$ 代入 $3x + 9 - ax = 4x - 12$ 中得

$$3a = 18,$$

解得 $a = 6,$

当化为整式方程时，未知数系数为 0 时，

$$\therefore a + 1 = 0,$$

解得 $a = -1.$

综上所述， a 的值为 $-1, 6$ 或 -8 时， $\frac{3}{x-3} - \frac{ax}{x^2-9} = \frac{4}{x+3}$ 无解.

【考点评析】 本题主要考查了分式方程无解的条件，理解分式方程无解包括有增根和化成整数方程后无解的情况是解答关键.

15. (本题 2 分) (2023 秋·天津和平·八年级天津市汇文中学校考期末) 若关于 x 的分式方程 $\frac{m+3}{2x-1} = 1$ 的解为非负数，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -4$ 且 $m \neq -3$

【思路点拨】 先解关于 x 的分式方程，求得 x 的值，然后再依据“解是非负数”建立不等式求 m 的取值范围.

【规范解答】 解：去分母得， $m+3=2x-1$ ，

$$\therefore x = \frac{m+4}{2},$$

\because 方程的解是非负数，

$$\therefore m+4 \geq 0 \text{ 即 } m \geq -4,$$

又因为 $2x-1 \neq 0$ ，

$$\therefore x \neq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{m+4}{2} \neq \frac{1}{2},$$

$$\therefore m \neq -3,$$

则 m 的取值范围是 $m \geq -4$ 且 $m \neq -3$.

故答案为： $m \geq -4$ 且 $m \neq -3$.

【考点评析】 本题考查了分式方程的解及分式有意义的条件，理解题意得出相应不等式求解即可.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/036135215124011011>