专题 53 复数

【考点预测】

知识点一、复数的概念

（1）i 叫虚数单位，满足 $i^2=-1$，当 $k\in Z$ 时，$i^{4k}=1,i^{4k+1}=i,i^{4k+2}=-1,i^{4k+3}=-i$．

（2）形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数叫复数，记作 $a+bi\in C$．

①复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 一一对应，a 叫 z 的实部，b 叫 z 的虚部；$b=0\Leftrightarrow z\in R$，$Z$ 点组成实轴；$b\neq 0,z$ 叫虚数；$b\neq 0$ 且 $a=0$，z 叫纯虚数，纯虚数对应点组成虚轴（不包括原点）．两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数．

②两个复数 $a+bi,c+di(a,b,c,d\in R)$ 相等 $\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$（两复数对应同一点）

③复数的模：复数 $a+bi(a,b\in R)$ 的模，也就是向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，即有向线段 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度，其计算公式为 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，显然，$|\overline{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2},z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$．

知识点二、复数的加、减、乘、除的运算法则

1、复数运算

（1）$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$

（2）$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\begin{cases}(a+bi)\cdot(a-bi)=\mathrm{z}\cdot\overline{\mathrm{z}}=a^2+b^2=|z|^2\\(\text{注意}z^2=|z|^2)\\z+\overline{z}=2a\end{cases}$$

其中 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，叫 z 的模；$\overline{z}=a-bi$ 是 $z=a+bi$ 的共轭复数 $(a,b\in R)$．

（3）$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}(c^2+d^2\neq 0)$．

实数的全部运算律（加法和乘法的交换律、结合律、分配律及整数指数幂运算法则）都适用于复数．

注意：复数加、减法的几何意义

以复数 z_1,z_2 分别对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2，对角线 OZ 表示的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 就是复数 z_1+z_2 所对应的向量．z_1-z_2 对应的向量是 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$．

2、复数的几何意义

（1）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 对应平面内的点 $z(a,b)$；

（2）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 对应平面向量 $\overrightarrow{OZ}$；

（3）复平面内实轴上的点表示实数，除原点外虚轴上的点表示虚数，各象限内的点都表示复数．

（4）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 的模 $|z|$ 表示复平面内的点 $z(a,b)$ 到原点的距离．

3、复数的三角形式

（1）**复数的三角表示式**

一般地，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 形式，其中 r 是复数 z 的模；θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角，叫做复数 $z=a+bi$ 的辐角．$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式，简称三角形式．

（2）**辐角的主值**

任何一个不为零的复数的辐角有无限多个值，且这些值相差 2π 的整数倍．规定在 $0\le\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值为辐角的主值．通常记作 $\arg z$，即 $0\le\arg z<2\pi$．复数的代数形式可以转化为三角形式，三角形式也可以转化为代数形式．

（3）**三角形式下的两个复数相等**

两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角的主值分别相等．

（4）**复数三角形式的乘法运算**

①两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和，即

$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$.

②复数乘法运算的三角表示的几何意义

复数 z_1,z_2 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$，把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转角 θ_2（如果 $\theta_2<0$，就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转角 $|\theta_2|$），再把它的模变为原来的 r_2 倍，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 表示的复数就是积 z_1z_2．

（5）**复数三角形式的除法运算**

两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差，即 $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$.

【题型归纳目录】

题型一：复数的概念

题型二：复数的运算

题型三：复数的几何意义

题型四：复数的相等与共轭复数

题型五：复数的模

题型六：复数的三角形式

题型七：与复数有关的最值问题

【典例例题】

题型一：复数的概念

例 1．（2023·全国·高三专题练习）已知 z_1,z_2 为复数，有以下四个命题，其中真命题的序号是（　　）

①若 $|z_1|\le1$，则 $-1\le z_1\le1$；

②若 $z_1=\overline{z_1}$，则 $\overline{z_1}\in \mathrm{R}$；

③若 $|z_1|+|z_2|=0$，则 $z_1=z_2=0$；

④若 z_1+z_2 是虚数，则 z_1,z_2 都是虚数.

A．①④　　B．②　　C．②③　　D．①②③

例 2．（2023·全国·高三专题练习）已知复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$

①在复平面内 z 对应点的坐标为(1，－1)；

②复数的虚部为 $-\mathrm{i}$；

③复数的共轭复数为 $\mathrm{i}-1$；

④ $|z|=\sqrt{2}$；

⑤复数 z 是方程 $x^2-2x+2=0$ 在复数范围内的一个根.

以上 5 个结论中正确的命题个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例 3．（2023·全国·高三专题练习）已知复数 z_1 和 z_2，则“$z_1>z_2$”是“$z_1-z_2>0$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

变式 1．（2023·广西贵港·模拟预测（理））已知复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^{2022}}$，则（　　）

A．z 的虚部为 i　　B．z 的实部为 -2　　C．$z<2$　　D．$|z|<2$

变式 2．（2023·宁夏·石嘴山市第三中学模拟预测（文））已知 $a\in \mathbf{R}$，若复数 $z=a^2+2a+a\mathrm{i}$ 是纯虚数，则 $a=$（　　）

A．0　　B．2　　C．0 或 -2　　D．-2

变式 3．（2023·陕西·二模（理））已知复数 $z_1=a-3\mathrm{i}$，$z_2=2+\mathrm{i}$（i 为虚数单位），若 z_1z_2 是纯虚数，则实数 $a=$（　　）

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．-6　　D．6

变式 4．（2023·上海交大附中高三阶段练习）设 i 是虚数单位，若 $\mathrm{i}(b\mathrm{i}+1)$ 是纯虚数，则实数 b=________.

【方法技巧与总结】

无论是复数模、共轭复数、复数相等或代数运算都要认清复数包括实部和虚部两部分，所以在解决复数有关问题时要将复数的实部和虚部都认识清楚.

题型二：复数的运算

例 4．（2023·四川·树德中学高三阶段练习（理））复数$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2023}=$（　）

A．-1　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

例 5．（2023·浙江省杭州第二中学高三阶段练习）已知ω是方程$x^2+x+1=0$的虚数根，则$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2023}=$（　）

A．0　　B．±1　　C．$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D．$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

例 6．（2023·湖南岳阳·高三阶段练习）已知复数$1+\mathrm{i}$（i为虚数单位）为实系数方程$x^2+px+q=0$的一根，则$p+q=$（　）

A．4　　B．2　　C．0　　D．-2

变式 5．（2023·重庆市清华中学校高三阶段练习）已知$2+i$是关于x的方程$x^2+ax+5=0$的根，则实数$a=$（　）

A．$2-i$　　B．-4　　C．2　　D．4

变式 6．（2023·浙江省苍南中学高三阶段练习）若 $(1+\mathrm{i})\overline{z}=1-3\mathrm{i}$ （i为虚数单位)，则$z=$（　）

A．$-1+2\mathrm{i}$　　B．$-1-2\mathrm{i}$　　C．$1+2\mathrm{i}$　　D．$1-2\mathrm{i}$

变式 7．（2023·四川·绵阳南山中学实验学校高三阶段练习(理))若复数z的虚部小于0，$|z|=\sqrt{5}$，且$z+\overline{z}=4$，则$iz=$（　）

A．$1+3i$　　B．$2+i$　　C．$1+2i$　　D．$1-2i$

【方法技巧与总结】

设$z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in R)$，则

（1）$z_1\pm z_2=a\pm c+(b\pm d)i$

（2）$z_1\cdot z_2=ac-bd+(ad+bc)i$

（3）$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(z_2\neq0)$

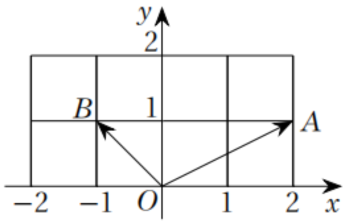
题型三：复数的几何意义

例 7．（2023·广东·广州市天河外国语学校高三阶段练习（理））复数满足 $z+|z|=4+8\mathrm{i}$，则复数 z

在复平面内所对应的点在（　　）

A．第一象限　　　　B．第二象限　　　　C．第三象限　　　　D．第四象限

例 8．（2023·全国·模拟预测）如图，在复平面内，复数 z_1， z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 对应的点位于（　　）



A．第一象限　　　　B．第二象限　　　　C．第三象限　　　　D．第四象限

例 9．（2023·四川·射洪中学高三阶段练习（理））在复平面内，复数 $(1-2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}^2$ 对应的点位于（　　）

A．第一象限　　　　B．第二象限　　　　C．第三象限　　　　D．第四象限

变式 8．（2023·江苏·高三开学考试）　已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z\left(1+\mathrm{i}\right)=4-3\mathrm{i}$，则复数 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A．　第一象限　　　B．　第二象限　　　C．　第三象限　　　D．　第四象限

变式 9．（2023·北京师大附中高三阶段练习）若复数 $z=\frac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-\mathrm{i}\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 在复平面内对应的点位于实轴上，则 $a=$（　　）

A．4　　　　B．2　　　　C．-3　　　　D．-4

变式 10．（2023·辽宁·朝阳市第一高级中学高三阶段练习）已知复数 $z=\frac{2+\mathrm{i}^{2023}}{1+\mathrm{i}}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面中对应的点在第（　　）象限

A．一　　　　B．二　　　　C．三　　　　D．四

变式 11．（2023·北京实验学校平谷校区高三阶段练习）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(2,-1)$，则 $z\cdot\mathrm{i}=$（　　）

A．$1+2\mathrm{i}$　　　　B．$-1+2\mathrm{i}$　　　　C．$5-4\mathrm{i}$　　　　D．$3-4\mathrm{i}$

变式 12．（2023·全国·高三专题练习）已知复数 $z=\frac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$（i

为虚数单位）在复平面内对应的点在第三象限，则实数a的取值范围是（　）

A．$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},2\right)$　　C．$(-\infty,-2)$　　D．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

变式 13．（2023·河北张家口·三模）已知复数z满足$z(a+\mathrm{i})=2+3\mathrm{i}$，若复数$z$在复平面上对应的点在第二或第四象限，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$　　B．$\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

C．$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

【方法技巧与总结】

复数的几何意义在于复数的实质是复平面上的点，其实部、虚部分别是该点的横坐标、纵坐标，这是研究复数几何意义的最重要的出发点.

题型四：复数的相等与共轭复数

例 10．（2023·江苏南通·高三阶段练习）已知复数z满足$\frac{z-3\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$为负实数，$\frac{z-3}{z+1}$为纯虚数，则$\bar{z}=$（　）.

A．$\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B．$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C．$-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D．$1+\sqrt{3}i$

例 11．（2023·陕西·安康市教学研究室三模（理））设 i 是虚数单位，$\left(1+\frac{2}{\mathrm{i}}\right)(a-\mathrm{i})=-5\mathrm{i}$，其中$a$为实数，则$a=$（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

例 12．（2023·辽宁·沈阳市第四中学高三阶段练习）已知 i 是虚数单位，若复数$z=a+b\mathrm{i}$（a、$b\in\mathrm{R}$）满足$z\mathrm{i}=\bar{z}$，则（　）

A．$a^2+b^2=1$　　B．$a+b=1$

C．$a+b=0$　　D．$a^2-b^2=1$

变式 14．（2023·四川·模拟预测（文））设$(2-\mathrm{i})a=\left(-\frac{4}{b}+2\mathrm{i}\right)b$，其中$a,b$为实数，则（　）

A．$a=-2,b=1$　　B．$a=2,b=-1$　　C．$a=1,b=-2$

D．$a=-1,\ b=2$

变式 15．（2023·广东·执信中学高三阶段练习）设$-(z+\bar{z})+2(z-\bar{z})=-4-4\mathrm{i}$，则$z=$（　）

A．$2-\mathrm{i}$　　B．$2+\mathrm{i}$　　C．$1-2\mathrm{i}$　　D．$1+2\mathrm{i}$

变式 16．（2023·河北·高三阶段练习）已知复数 z 满足 $z+\mathrm{i}z=\mathrm{i}$，复数 $\overline{z}$ 复数 z 的共轭复数，则复数 $\overline{z}$ 的虚部为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D．$-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

变式 17．（2023·安徽·高二阶段练习）复数 $z=\frac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）的共轭复数 $\overline{z}=$（　）

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．$3\mathrm{i}$　　D．$-3\mathrm{i}$

变式 18．（2023·江苏省泰兴中学高三阶段练习）已知 $z+\overline{z}=4$，$|z|=\sqrt{5}$，则 $z=$（　）

A．$1+2\mathrm{i}$　　B．$1+2\mathrm{i}$ 或 $1-2\mathrm{i}$

C．$2+\mathrm{i}$　　D．$2+\mathrm{i}$ 或 $2-\mathrm{i}$

变式 19．（2023·浙江·绍兴鲁迅中学高三阶段练习）若 $-\mathrm{i}\left(z+\mathrm{i}\right)=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．2　　D．10

变式 20．（2023·福建·福州十八中高三开学考试）若复数 z 满足 $2\left(z+\overline{z}\right)+3\left(z-\overline{z}\right)=2+3\mathrm{i}$，则 $z=$（　）

A．$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B．$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

C．$2+2\mathrm{i}$　　D．$2-2\mathrm{i}$

变式 21．（2023·广东广州·高三阶段练习）若 $\left(1-\mathrm{i}\right)z=2\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=$（　）

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$1+\mathrm{i}$　　C．$-1-\mathrm{i}$　　D．$-1+\mathrm{i}$

【方法技巧与总结】

复数相等：$a+bi=c+di\Leftrightarrow \underline{a=c\text{且}b=d}(a,b,c,d\in R)$

共轭复数：$a+bi=c+di\Leftrightarrow \underline{a=c\text{且}b=-d}(a,b,c,d\in R)$．

题型五：复数的模

例 13．（2023·全国·模拟预测）已知复数 z 满足：$\left(2+\mathrm{i}\right)\overline{z}=3+4\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A．$\frac{29}{25}$　　B．$\frac{\sqrt{29}}{5}$　　C．5　　D．$\sqrt{5}$

例 14．（2023·江西·临川一中高三阶段练习（理））若复数 z 满足 $(1-2\mathrm{i})z=(2+\mathrm{i})^2$，则 $|z|=$（　）

A．3　　B．5　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{3}$

例 15．（2023·湖南省临澧县第一中学高三阶段练习）已知复数$z=\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则$|\bar{z}|=$（ ）

A．5　　B．3　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

变式 22．（2023·全国·高三专题练习）已知复数z的实部为 1，且$|z-\bar{z}|=2|z+\bar{z}|$，则$z=$（ ）

A．$1+\sqrt{2}\mathrm{i}$　　B．$1+\sqrt{5}\mathrm{i}$　　C．$1\pm 2\mathrm{i}$　　D．$1\pm 4\mathrm{i}$

变式 23．（2023·全国·高三专题练习）若复数$z=3+a\mathrm{i}$满足条件$|z|<5$，则实数a的取值范围是（ ）

A．$(-4,4)$　　B．$(-5,5)$　　C．$(0,5)$　　D．$(-3,3)$

变式 24．（2023·全国·高三开学考试）已知$z=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2022}$,则$|z|=$( )

A．$\sqrt{2}$　　B．1　　C．2　　D．0

变式 25．（2023·广东·新会陈经纶中学高三阶段练习）已知复数$i-2$是关于x的方程$x^2+px+q=0(p,q\in R)$的一个根，则$|pi+q|=$ （ ）

A．25　　B．5　　C．$\sqrt{41}$　　D．41

【方法技巧与总结】

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

题型六：复数的三角形式

例 16．（2023·全国·模拟预测（文））欧拉公式$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$把自然对数的底数 e、虚数单位 i、三角函数联系在一起，充分体现了数学的和谐美．若复数z满足$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+\mathrm{i}\right)\cdot z=1$，则$z$的虚部为（ ）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

例 17．（2023·全国·高三专题练习（文））欧拉公式$e^{ix}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$（i 为虚数单位）是由瑞士著名数学家欧拉发明的，它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数与指数函数的关系，它在复变函数论里占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”，$\frac{\mathrm{i}}{e^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}}$表示的复数位于复平面内（ ）．

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

例 18．（2023

·全国·高三专题练习（文））1748 年，瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写下公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，这个公式在复变函数中有非常重要的地位，即著名的“欧拉公式”，被誉为“数学中的天桥”，据欧拉公式，则下列选项不正确的是（　）

A．$e^{\frac{\pi i}{2}}=i$　　B．$\left|e^{\frac{\pi i}{4}}\right|=1$　　C．$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$　　D．$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}+e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2}$

变式 26．（2023·山西省长治市第二中学校高三阶段练习（理））棣莫弗公式 $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$ （其中 i 为虚数单位）是由法国数学家棣莫弗（1667-1754 年）发现的，根据棣莫弗公式可知，复数 $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^7$ 在复平面内所对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

变式 27．（2023·全国·高三专题练习）复数的三角形式 $\overline{\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}}$（用辐角主值表示）为 ____.

变式 28．（2023·黑龙江·佳木斯一中三模（理））任意一个复数 Z 都可以表示成三角形式即 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.棣莫弗定理是由法国数学家棣莫弗（1667—1754 年）创立的，指的是设两个复数（用三角函数形式表示）$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则：$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$，”已知复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $z^{17}+z=$______.

【方法技巧与总结】

一般地，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 形式，其中 r 是复数 z 的模；θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角，叫做复数 $z=a+bi$ 的辐角．$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式，简称三角形式．

题型七：与复数有关的最值问题

例 19．（2023·上海市松江二中高三阶段练习）已知复数 z_1，z_2 满足 $|z_1+1|+|z_1-1|=2\sqrt{2}$，$|z_2-2i|=2$，（其中 i 是虚数单位），则 $|z_1-z_2|$ 的最大值为（　）

A．3　　B．5　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{2}+2$

例 20．（2023·全国·高三专题练习）已知复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1+1|=|z_1-1|$，且 $|z_2-2-3i|=1$，则 $|z_1-z_2|$ 的最小值是（　）

A．$\sqrt{13}-1$　　B．2　　C．3　　D．1

例 21．（2023·全国·高三专题练习）复数 z 满足 $|z-1|+|z+1|=4$，则 $|z|$ 的取值范围是（　）

A．$[\sqrt{3},2]$　　B．$[1,2]$　　C．$[2,3]$　　D．$[1,\sqrt{3}]$

变式 29．（2023·全国·高三专题练习）若复数 z 满足 $\left|z-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right|=3$，则 $|z|$ 的最大值为（　）

A．1　　B．2　　C．5　　D．6

变式 30．（2023·全国·高三专题练习）18 世纪末，挪威测量学家维塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数，使复数及其运算具有了几何意义，例如 $|z|=|OZ|$，也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点的距离．已知复数 z 满足 $|z|=2$，则 $|z-3-4\mathrm{i}|$ 的最大值为（　）

A．3　　B．5　　C．7　　D．9

变式 31．（2023·四川·树德中学高三阶段练习（理））如果复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$，那么 $|z|$ 的最大值是（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．$2i$

变式 32．（2023·甘肃张掖·高三阶段练习(理))已知复数 $z_0=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}-1$（i 表示虚数单位),复数 z 满足 $\left|z-z_0\right|=1$，则 $|z|$ 的取值范围是（　）

A．$\left[0,1\right]$　　B．$\left[0,4\right]$　　C．$\left[0,2\right]$　　D．$[1,2]$

变式 33．（2023·全国·高三专题练习）已知复数 z_1 和 z_2 满足 $\left|z_1-8-14i\right|=\sqrt{5}\left|z_1-4-6i\right|$，$\left|z_1-z_2\right|=3$，则 $\left|\overline{z}_2\right|$ 的取值范围为（　）

A．$\left[0,13\right]$　　B．$\left[3,9\right]$　　C．$\left[0,10\right]$　　D．$\left[3,13\right]$

变式 34．（2023·全国·高三专题练习）对于给定的复数 z，若满足 $|z-4i|=2$ 的复数对应的点的轨迹是圆，则 $|z-1|$ 的取值范围是（　）

A．$[\sqrt{17}-2,\sqrt{17}+2]$　　B．$[\sqrt{17}-1,\sqrt{17}+1]$

C．$[\sqrt{3}-2,\sqrt{3}+2]$　　D．$[\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1]$

变式 35．（2023·江苏省如皋中学高三阶段练习）对于给定的复数 z_0，若满足 $\left|z-4i\right|+\left|z-z_0\right|=2$ 的复数 z 对应的点的轨迹是椭圆，则 $\left|z_0-1\right|$ 的取值范围是（　）

A．$\left(\sqrt{17}-2,\sqrt{17}+2\right)$　　B．$\left(\sqrt{17}-1,\sqrt{17}+1\right)$

C．$\left(\sqrt{3}-2,\sqrt{3}+2\right)$　　　　D．$\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)$

变式 36．（2023·全国·高三专题练习（文））大数学家欧拉发现的公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$把自然对数的底数 e，虚数单位 i 和三角函数联系在一起，充分体现了数学的和谐美，这个公式被誉为“数学中的天桥”．若复数z的模是 1，纯虚数$z_1=a\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right)+1-2\mathrm{i}$（$a$是实数），则$\left|z-z_1\right|$的最大值是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【方法技巧与总结】

利用几何意义进行转化

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·全国·高三专题练习）复平面内存在复数$z_1=1,z_2=-1$，$z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$对应的三点$Z_1,Z_2,Z_3$，若点$Z_4$可与$Z_1,Z_2,Z_3$共圆，则下列复数中可以表示为$z_4$的是（　　）

A．$\tan15°+\cot30°\mathrm{i}$　　　　B．$\cos45°+\sin30°\mathrm{i}$

C．$\tan30°+\sin15°\mathrm{i}$　　　　D．$\sin75°+\sin15°\mathrm{i}$

2．（2023·江苏·南京市秦淮中学高三阶段练习）已知复数$z=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$，则$z$的虚部为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3．（2023·山东·日照一中高三阶段练习）已知复数$z=\frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$，则$z$的共轭复数的虚部为（　　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}i$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{4}{5}\mathrm{i}$

4．（2023·广东广州·高三阶段练习）已知$z=4-\mathrm{i}$，且$az+b\overline{z}=4+3\mathrm{i}$，其中$a$，$b$为实数，则$|a+b\mathrm{i}|=$（　　）

A．1　　B．3　　C．$\sqrt{5}$　　D．5

5．（2023·广东·高三阶段练习）复数z满足$2z+(z-5)\mathrm{i}=0$，则$|z|=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

6．（2023·江苏扬州·高三阶段练习）已知i为虚数单位，则复数$z=\frac{1-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

7．（2023·四川省内江市第六中学高三开学考试（文））已知复数z满足$z(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，则$z\cdot\overline{z}=$（　　）.

A．5　　B．$\sqrt{10}$　　C．22　　D．2

8．（2023·福建省漳州第一中学高三阶段练习）已知复数z满足$z(1+\mathrm{i})=2+b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R})$，若$z$为纯虚数，则$b=$

（　）

A．-1　　B．1　　C．-2　　D．2

9．（2023·福建·三明一中高三阶段练习）复平面内表示复数$z=\dfrac{6+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则$|z|=$（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$2\sqrt{5}$

10．（2023·江西·临川一中高三阶段练习（文））若复数z满足$\dfrac{z+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，则$\overline{z}=$（　）

A．$-1+3\mathrm{i}$　　B．$-1-2\mathrm{i}$　　C．$1+2\mathrm{i}$　　D．$1-3\mathrm{i}$

11．（2023·江苏南通·高三阶段练习）欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$（其中$\mathrm{e}=2.718\cdots$，i为虚数单位）是由瑞士著名数学家欧拉创立，该公式建立了三角函数与指数函数的关系，在复变函数论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”根据欧拉公式，下列结论中正确的是（　）

A．$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$的实部为0　　B．$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$在复平面内对应的点在第一象限

C．$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|=1$　　D．$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$的共轭复数为1

二、多选题

12．（2023·辽宁·朝阳市第一高级中学高三阶段练习）在复数范围内，方程$x^3=8$的虚数根是（　）

A．$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B．$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C．$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D．$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

13．（2023·河北·高三阶段练习）若复数z在复平面对应的点为Z，则下列说法正确的有（　）

A．若$z=\mathrm{i}$，则$z+z^2+z^3+\cdots+z^{14}=-1+\mathrm{i}$

B．若$|z-1|=2$，则Z在复平面内的轨迹为圆

C．若$z=x+y\mathrm{i}$，满足$|z-2\mathrm{i}|=1$，则$\dfrac{y}{x}$的取值范围为$\left[-\sqrt{3},3\right]$

D．若$|z|=3$，则$|z+4|+|z-4|$的取值范围为$[8,10]$

14．（2023·广东·珠海市第三中学二模）设i为虚数单位，若$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$，则$n$可以是（　）

A．2020　　B．2022　　C．2024　　D．2026

15．（2023·江苏·姜堰中学高三阶段练习）已知复数$z=\dfrac{-50\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$，则下列说法正确的是（　）

A．复数z在复平面内对应的点在第四象限　　B．复数z的虚部为-6

C．复数z的共轭复数$z=-8+6\mathrm{i}$　　D．复数z的模$|z|=10$

16．（2023·湖南·雅礼中学高三阶段练习）1748年，瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写下公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$（$x\in R$,i为虚数单位），这个公式在复变函数中有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”，据此公式，则有（　）

A．$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$　　B．$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{2022}=1$

C．$\left|e^{ix}+e^{-ix}\right|\le 2$　　D．$-2\le e^{ix}-e^{-ix}\le 2$

三、填空题

17．（2023·天津二十中高三阶段练习）已知$(x+y\mathrm{i})\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$，$x,y\in\mathbf{R}$则$x+y=$___________.

18．（2023·河北保定·高三阶段练习）若复数$z=(2-3\mathrm{i})^2+m\left(m\in\mathbf{R}\right)$为纯虚数，则$|m+\mathrm{i}|=$___________.

19．（2023·江苏南通·高三阶段练习）如图，在复平面内，复数z_1,z_2对应的向量分别是$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$，若$zz_2=z_1^2$，则复数$z$=___________.

20．（2023·全国·高三专题练习）设m为实数，复数$z_1=1+\mathrm{i},z_2=m+3\mathrm{i}$，（其中 i 为虚数单位），若$z_1\cdot\overline{z_2}$为纯虚数，则$m$的值为_______.

21．（2023·全国·高三专题练习）已知z＝2+i（其中 i 为虚数单位），则$\overline{z}$=______.

专题 53 复数

【考点预测】

知识点一、复数的概念

（1）i 叫虚数单位，满足 $i^2=-1$，当 $k\in Z$ 时，$i^{4k}=1,i^{4k+1}=i,i^{4k+2}=-1,i^{4k+3}=-i$．

（2）形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数叫复数，记作 $a+bi\in C$．

①复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 一一对应，a 叫 z 的实部，b 叫 z 的虚部；$b=0\Leftrightarrow z\in R,Z$ 点组成实轴；$b\neq 0,z$ 叫虚数；$b\neq 0$ 且 $a=0$，z 叫纯虚数，纯虚数对应点组成虚轴（不包括原点）．两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数．

②两个复数 $a+bi,c+di(a,b,c,d\in R)$ 相等 $\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$（两复数对应同一点）

③复数的模：复数 $a+bi(a,b\in R)$ 的模，也就是向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模，即有向线段 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度，其计算公式为 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，显然，$|\overline{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2},z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$．

知识点二、复数的加、减、乘、除的运算法则

1、复数运算

（1）$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$

（2）$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\begin{cases}(a+bi)\cdot(a-bi)=\mathrm{z}\cdot\overline{\mathrm{z}}=a^2+b^2=|z|^2\\(\text{注意}z^2=|z|^2)\\z+\overline{z}=2a\end{cases}$$

其中 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，叫 z 的模；$\overline{z}=a-bi$ 是 $z=a+bi$ 的共轭复数 $(a,b\in R)$．

（3）$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}(c^2+d^2\neq 0)$．

实数的全部运算律（加法和乘法的交换律、结合律、分配律及整数指数幂运算法则）都适用于复数．

注意：复数加、减法的几何意义

以复数 z_1,z_2 分别对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2，对角线 OZ 表示的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 就是复数 z_1+z_2 所对应的向量．z_1-z_2 对应的向量是 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$．

2、复数的几何意义

（1）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 对应平面内的点 $z(a,b)$；

（2）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 对应平面向量 $\overrightarrow{OZ}$；

（3）复平面内实轴上的点表示实数，除原点外虚轴上的点表示虚数，各象限内的点都表示复数．

（4）复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 的模 $|z|$ 表示复平面内的点 $z(a,b)$ 到原点的距离．

3、复数的三角形式

（1）复数的三角表示式

一般地，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 形式，其中 r 是复数 z 的模；θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角，叫做复数 $z=a+bi$ 的辐角．$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式，简称三角形式．

（2）辐角的主值

任何一个不为零的复数的辐角有无限多个值，且这些值相差 2π 的整数倍．规定在 $0\le\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值为辐角的主值．通常记作 $\arg z$，即 $0\le\arg z<2\pi$．复数的代数形式可以转化为三角形式，三角形式也可以转化为代数形式．

（3）三角形式下的两个复数相等

两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角的主值分别相等．

（4）复数三角形式的乘法运算

①两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和，即 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$．

②复数乘法运算的三角表示的几何意义

复数 z_1,z_2 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$，把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转角 θ_2（如果 $\theta_2<0$，就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转角 $|\theta_2|$），再把它的模变为原来的 r_2 倍，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 表示的复数就是积 z_1z_2．

（5）复数三角形式的除法运算

两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差，即 $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$．

【题型归纳目录】

【典例例题】

题型一：复数的概念

例 1.（2023·全国·高三专题练习）已知 z_1, z_2 为复数，有以下四个命题，其中真命题的序号是（　　）

①若 $|z_1| \le 1$，则 $-1 \le z_1 \le 1$；

②若 $z_1 = \overline{z_1}$，则 $\overline{z_1} \in \mathrm{R}$；

③若 $|z_1| + |z_2| = 0$，则 $z_1 = z_2 = 0$；

④若 $z_1 + z_2$ 是虚数，则 z_1, z_2 都是虚数.

A．①④　　　　B．②　　　　C．②③　　　　D．①②③

答案：C

【解析】z_1, z_2 为复数，

①若 $|z_1| \le 1$，因为 z_1 没有大小（虚部为 0，即为实数时除外），故 $-1 \le z_1 \le 1$ 是错误的，

②若 $z_1 = \overline{z_1}$，设 $z_1 = a + b\mathrm{i}(a, b \in \mathrm{R})$，则 $\overline{z_1} = a - b\mathrm{i}(a, b \in \mathrm{R})$，由 $z_1 = \overline{z_1}$，得 $b = 0$，所以 $\overline{z_1} \in \mathrm{R}$，正确，

③若 $|z_1| + |z_2| = 0$，则 $z_1 = z_2 = 0$，正确，

④若 $z_1 + z_2$ 是虚数，z_1, z_2 不一定都是虚数，比如 $z_1 = 1 - 3\mathrm{i}, z_2 = -1$，而 $z_1 + z_2$ 是虚数，故错误，

故②③正确，

故选：C.

例 2.（2023·全国·高三专题练习）已知复数 $z = \dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$

①在复平面内 z 对应点的坐标为(1，－1)；

②复数的虚部为 $-\mathrm{i}$；

③复数的共轭复数为 $\mathrm{i} - 1$；

④$|z| = \sqrt{2}$；

⑤复数 z 是方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 在复数范围内的一个根.

以上 5 个结论中正确的命题个数为（　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

答案：C

【解析】因为 $z = \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = 1 - \mathrm{i}$，

所以在复平面内 z 对应点的坐标为(1，－1)，所以①正确；

复数 z 的虚部为 -1，所以②错误；

复数 z 的共轭复数为 $1 + \mathrm{i}$，所以③错误；

$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，所以④正确；

方程$x^2-2x+2=0$在复数范围内的根为$\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm\mathrm{i}$，

所以复数z是方程$x^2-2x+2=0$在复数范围内的一个根，所以⑤正确；

所以正确的命题个数为 3 个，

故选：C.

例 3.（2023·全国·高三专题练习）已知复数z_1和z_2，则“$z_1>z_2$”是“$z_1-z_2>0$”的（　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

答案：A

【解析】$\because z_1>z_2$，$\therefore$复数z_1和z_2是实数，$\therefore z_1-z_2>0$成立，

当$z_1-z_2>0$时，例如$(2-3\mathrm{i})-(-5-3\mathrm{i})=7>0$，推不出$2-3\mathrm{i}>-5-3\mathrm{i}$，

所以“$z_1>z_2$”是“$z_1-z_2>0$”的充分不必要条件.

故选：A

变式 1.（2023·广西贵港·模拟预测（理））已知复数$z=\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^{2022}}$，则（　）

A．z的虚部为i　B．z的实部为-2　C．$z<2$　D．$|z|<2$

答案：B

【解析】因为$z=\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^{2022}}=\frac{2-\mathrm{i}}{-1}=-2+\mathrm{i}$，

所以z的实部为-2，虚部为1，所以 A 选项错误，B 选项正确.

$z=-2+\mathrm{i}$与2不能比较大小，C 选项错误.

$|z|=\sqrt{5}>2$，D 选项错误.

故选：B

变式 2.（2023·宁夏·石嘴山市第三中学模拟预测（文））已知$a\in\mathbf{R}$，若复数$z=a^2+2a+a\mathrm{i}$是纯虚数，则$a=$（　）

A．0　B．2　C．0 或-2　D．-2

答案：D

【解析】由复数$z=a^2+2a+a\mathrm{i}$为纯虚数，

得$\begin{cases}a^2+2a=0\\a\neq 0\end{cases}$，解得$a=-2$.

故选：D.

变式 3.（2023·陕西·二模（理））已知复数$z_1=a-3\mathrm{i}$，$z_2=2+\mathrm{i}$（i为虚数单位），若z_1z_2是纯虚数，则实数$a=$（　）

A．$-\frac{3}{2}$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．-6　　　　D．6

答案：A

【解析】$z_1z_2=(a-3i)(2+i)=(2a+3)+(a-6)i$是纯虚数，

所以$(2a+3)=0$且$a-6\neq 0$，可得$a=-\frac{3}{2}$.

故选：A.

变式4．（2023·上海交大附中高三阶段练习）设i是虚数单位，若$i(bi+1)$是纯虚数，则实数b=_________.

答案：0

【解析】由题意得$i(bi+1)=-b+i$，因为$i(bi+1)$是纯虚数，则$-b=0$，即b=0，

故答案为：0

【方法技巧与总结】

无论是复数模、共轭复数、复数相等或代数运算都要认清复数包括实部和虚部两部分，所以在解决复数有关问题时要将复数的实部和虚部都认识清楚.

题型二：复数的运算

例4．（2023·四川·树德中学高三阶段练习（理））复数$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2023}=$（　　）

A．-1　　　　B．1　　　　C．$-i$　　　　D．i

答案：C

【解析】因为$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$，因此，$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2023}=i^{2023}=i^{4\times 505+3}=i^3=-i$.

故选：C.

例5．（2023·浙江省杭州第二中学高三阶段练习）已知ω是方程$x^2+x+1=0$的虚数根，则$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2023}=$（　　）

A．0　　　　B．± 1　　　　C．$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　　　D．$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

答案：C

【解析】由题设$\omega^2+\omega+1=0$，且$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，

而$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2023}=(1+\omega)+\omega^2(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{2021}(1+\omega+\omega^2)=1+\omega$，

所以原式等于$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

故选：C

例6．（2023·湖南岳阳·高三阶段练习）已知复数$1+i$（i为虚数单位）为实系数方程