

空间向量与立体几何-清北答案解析

模块1：向量法证明空间位置关系

H 考点：向量法证明空间位置关系

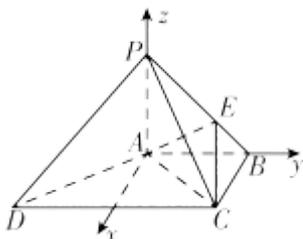
例题1

1

【答案】见解析

【解析】证明：证法一：

以A为原点、AB、AP所在直线分别为y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系。



设 $PA = AB = BC = a$ ，则 $A(0, 0, 0)$ ， $B(0, a, 0)$ ， $C(a, a, 0)$ ， $P(0, 0, a)$ ， $E\left(0, \frac{2a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 。

设 $D(a, y, 0)$ ，则 $\overrightarrow{PC} = (a, a, -a)$ ， $\overrightarrow{AD} = (a, y, 0)$ ，

$\therefore PC \perp AD$ ，

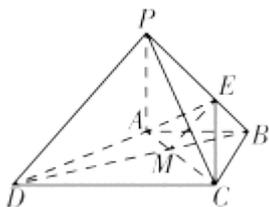
$\therefore \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2 + ay = 0$ ，解得 $y = -a$ ；

则有 $D(a, -a, 0)$ ， $\overrightarrow{PD} = (a, -a, -a)$ ，

$\overrightarrow{EA} = \left(0, -\frac{2a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ ， $\overrightarrow{EC} = \left(a, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ ，

$\therefore \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}$ ， $PD \notin$ 平面 EAC ， $\therefore PD \parallel$ 平面 EAC 。

证法二：



$\because AB = BC$ ， $AB \perp BC$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$PA \perp$ 平面 $ABCD \Rightarrow PA \perp AD$ ，又 $AD \perp PC$ ， $\therefore AD \perp$ 平面 PAC ，

$\therefore AD \perp AC$ 。又 $AB \parallel DC$ ， $\therefore \triangle DAC$ 也是等腰直角三角形，

$\therefore DC = \sqrt{2}AC = 2AB$ 。如图，连接 BD ，交 AC 于点 M ，

则 $\frac{DM}{MB} = \frac{DC}{AB} = 2$ 。

在 $\triangle BPD$ 中, $\frac{PE}{EB} = \frac{DM}{MB} = 2$,

$\therefore PD \parallel EM$. 又 $PD \not\subset$ 平面 EAC , $EM \subset$ 平面 EAC ,

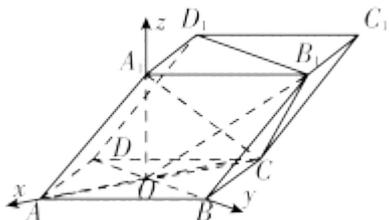
$\therefore PD \parallel$ 平面 EAC .

例题2

1

【答案】见解析

【解析】由题设易知 OA, OB, OA_1 两两垂直, 以 O 为原点建立空间直角坐标系, 如图.



$\because AB = AA_1 = \sqrt{2}, \therefore OA = OB = OA_1 = 1$,

$\therefore A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), D(0, -1, 0), A_1(0, 0, 1); \because \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}, \therefore B_1(-1, 1, 1)$,

$\because \overrightarrow{A_1C} = (-1, 0, -1), \overrightarrow{BD} = (0, -2, 0), \overrightarrow{BB_1} = (-1, 0, 1), \therefore \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0;$

$\therefore A_1C \perp BD, A_1C \perp BB_1, BD \cap BB_1 = B, \therefore A_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D .

模块2：向量法求角度

H 考点：向量法求空间角

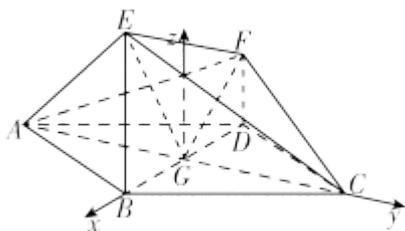
例题3

1

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】解：连接 BD , 设 BD 与 AC 交于点 G , 连接 EG, FG, EF .

如图, 以 G 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$, 垂直于平面 $ABCD$ 向上的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $G-xyz$.



在菱形 $ABCD$ 中, 不妨设 $GB = 1$.

由 $\angle ABC = 120^\circ$, 可得 $AG = GC = \sqrt{3}$.

可得 $A(0, -\sqrt{3}, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$,

由 $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = BC$, 可知 $AE = EC$.

又 $AE \perp EC$, 所以 $EG = \sqrt{3}$, 且 $EG \perp AC$.

在 $\text{Rt}\triangle EBG$ 中, 可得 $BE = \sqrt{2}$, 故 $DF = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $E(1, 0, \sqrt{2})$, $F(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

所以 $\overrightarrow{AE} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CF} = (-1, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

故 $\cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CF} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{CF}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例题4

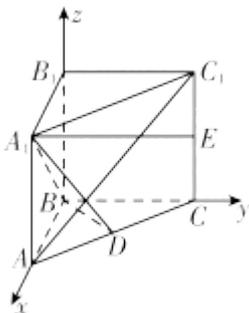
1

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】在矩形 ACC_1A_1 中, $\because AC_1 \perp$ 平面 A_1BD , $\therefore AC_1 \perp A_1D$, 可知 $\triangle A_1AD \sim \triangle ACC_1$,

则 $\frac{AC}{AA_1} = \frac{CC_1}{AD} = \frac{CC_1}{\frac{1}{2}AC}$, 故 $AC = \sqrt{2}AA_1$, 从而 $AB = BC$.

以点 B 为坐标原点, BA 为 x 轴, BC 为 y 轴, BB_1 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 不妨设 $AB = 2$,



则 $A(2, 0, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, $C_1(0, 2, 2)$, $E(0, 2, 1)$,

可得 $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 2, 2)$, $\overrightarrow{A_1E} = (-2, 2, -1)$.

由题意可知 $\overrightarrow{AC_1}$ 即为平面 A_1BD 的一个法向量,

设 A_1E 与平面 A_1BD 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1E} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1E}|}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\overrightarrow{A_1E}|} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

达标检测1

1

【答案】A

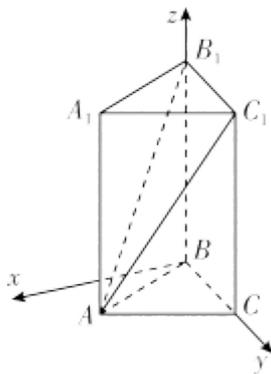
【解析】如图，以 B 为坐标原点，以与 BC 垂直的直线为 x 轴， BC 所在直线为 y 轴， BB_1 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $B_1(0, 0, 3)$, $C_1(0, 2, 3)$,

$\overrightarrow{AB_1} = (-\sqrt{3}, -1, 3)$, $\overrightarrow{B_1C_1} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 3)$. 设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$, \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{B_1C_1} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x - y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } z = 1, \text{ 则 } x = \sqrt{3}, \text{ 得 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1),$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BB_1}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BB_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BB_1}| |\vec{n}|} = \frac{3}{3 \times 2} = \frac{1}{2}, \therefore BB_1 \text{ 与平面 } AB_1C_1 \text{ 所成的角的正弦值为 } \frac{1}{2}, \therefore BB_1$$

与平面 AB_1C_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 故选A.



例题5

1

【答案】 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】取 CB 的中点 D , 连接 OD ,

如图, 分别以 OE , OD , OA 为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } A(0, 0, \sqrt{3}a), E(a, 0, 0), B(2, 2\sqrt{3} - \sqrt{3}a, 0),$$

$$\overrightarrow{AE} = (a, 0, -\sqrt{3}a), \overrightarrow{EB} = (2-a, 2\sqrt{3} - \sqrt{3}a, 0),$$

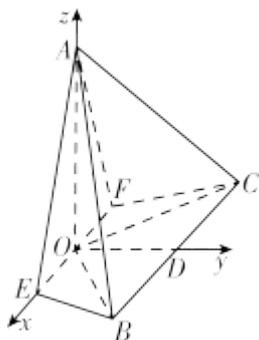
平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$,

设平面 AEB 的法向量 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} ax - \sqrt{3}az = 0 \\ (2-a)x + \sqrt{3}(2-a)y = 0 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \vec{n}_2 = (\sqrt{3}, -1, 1),$$

所以二面角 $F-AE-B$ 的余弦值 $\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.



例题6

1

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】解法一：如图1，取 D_1 为 A_1B_1 的中点，连接 DD_1 ，则 $DD_1 // AA_1 // CC_1$ 。

又由 (1) 知 $CD \perp$ 平面 A_1ABB_1 。故 $CD \perp A_1D, CD \perp D_1D$ ，所以 $\angle A_1DD_1$ 为所求的二面角

A_1-CD-C_1 的平面角。因 A_1D 为 A_1C 在面 A_1ABB_1 中的射影，又已知 $AB_1 \perp A_1C$ 由三垂线定理的逆定理得 $AB_1 \perp A_1D$ 。从而 $\angle A_1AB_1, \angle A_1DA$ 都与 $\angle B_1AB$ 互余。因此 $\angle A_1AB_1 = \angle A_1DA$ ，所以

$\text{Rt}\triangle A_1AD \sim \text{Rt}\triangle B_1A_1A$ 。因此 $AA_1 : AD = A_1B_1 : AA_1$ ，即 $AA_1^2 = AD \cdot A_1B_1 = 8$ ，得

$AA_1 = 2\sqrt{2}$ ，从而 $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}$ 。所以 $\text{Rt}\triangle A_1D_1D$ 中，

$$\cos \angle A_1DD_1 = \frac{DD_1}{A_1D} = \frac{AA_1}{A_1D} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

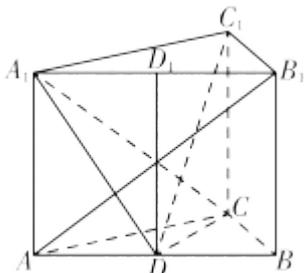


图1

解法二：如图2，过 D 作 $DD_1 // AA_1$ 交 A_1B_1 于 D_1 ，在直三棱柱中，有 DB, DC, DD_1 两两垂直，以 D 为原点，射线 DB, DC, DD_1 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正半轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 。

设直三棱柱的高为 h ，则 $A(-2, 0, 0), A_1(-2, 0, h), B_1(2, 0, h), C(0, \sqrt{5}, 0), C_1(0, \sqrt{5}, h)$ ，从而

$$\overrightarrow{AB_1} = (4, 0, h), \overrightarrow{A_1C} = (2, \sqrt{5}, -h)$$

由 $AB_1 \perp A_1C$ ，可得 $8 - h^2 = 0, h = 2\sqrt{2}$ ，故 $\overrightarrow{DA_1} = (-2, 0, 2\sqrt{2}), \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 2\sqrt{2})$ ，

$$\overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{5}, 0)$$

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，则有 $\vec{m} \perp \overrightarrow{DC}, \vec{m} \perp \overrightarrow{DA_1}$

所以 $\vec{m} \cdot \vec{DC} = 0$ 且 $\vec{m} \cdot \vec{DA}_1 = 0$, 即 $\begin{cases} \sqrt{5}y_1 = 0 \\ -2x_1 + 2\sqrt{2}x_1 = 0 \end{cases}$, 取 $z_1 = 1$, 则 $\vec{m} = (\sqrt{2}, 0, 1)$

设平面 C_1CD 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\vec{n} \perp \vec{DC}$, $\vec{n} \perp \vec{CC}_1$, 即 $\sqrt{5}y_2 = 0$ 且 $2\sqrt{2}z_2 = 0$, 取 $x_2 = 1$, 得 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

所以 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+1} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以二面角 $A_1 - CD - C_1$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

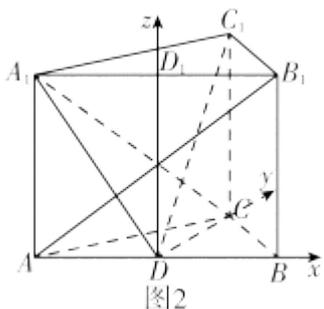


图2

模块3：向量法求距离

H 考点：向量法求点面距离

例题7

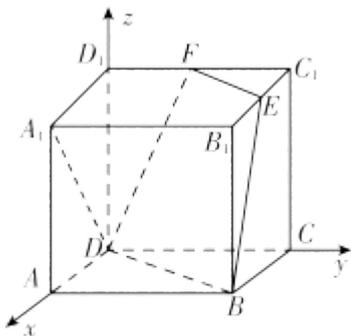
1

【答案】1

【解析】如图，建立空间直角坐标系，则 $\vec{DB} = (1, 1, 0)$, $\vec{DF} = (0, \frac{1}{2}, 1)$, $\vec{DA}_1 = (1, 0, 1)$. 设平面 $DBEF$ 的法

向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则有 $\vec{n} \cdot \vec{DB} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{DF} = 0$, 即 $x + y = 0$, $\frac{1}{2}y + z = 0$, 令 $x = 1$, 得

$y = -1$, $z = \frac{1}{2}$, 所以 $\vec{n} = (1, -1, \frac{1}{2})$, 则 A_1 到平面 $DBEF$ 的距离 $h = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{DA}_1|}{|\vec{n}|} = 1$.



例题8

1

【答案】点 N 到平面 MBD 的距离 $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

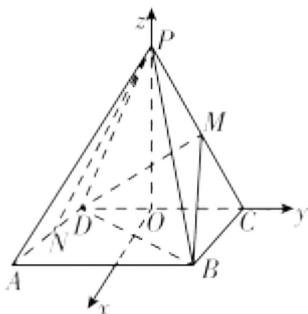
【解析】解：因为 $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, 0)$, $\overrightarrow{BM} = \left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 MBD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取} y = -1, \text{得} x = 1, z = \sqrt{3}.$$

所以 $\vec{m} = (1, -1, \sqrt{3})$, 又 $\overrightarrow{DN} = (1, 0, 0)$,

$$\text{所以点} N \text{到平面} MB D \text{的距离} d = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



例题9

1

【答案】见解析

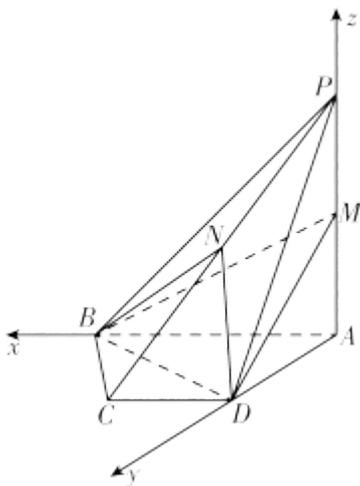
【解析】解：设点 N 在平面 BDM 内的射影为点 $H(a, b, c)$, 则 $\overrightarrow{NH} = \left(a - \frac{1}{2}, b - 1, c - 1\right)$,

$$N \text{到平面} B D M \text{的距离} d = \frac{|\overrightarrow{DN} \cdot \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \frac{|\frac{1}{2} - 1 + 2|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}},$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{DM} = -2b + 2 + c - 1 = 0 \\ \overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{DB} = 2a - 1 - 2b + 2 = 0 \\ |\overrightarrow{NH}| = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{cases}, \text{解得} a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{1}{2}, \text{或} a = \frac{3}{4}, b = \frac{5}{4},$$

$$c = \frac{3}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{线段} HA \text{的长为} \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$



达标检测2

1

【答案】D

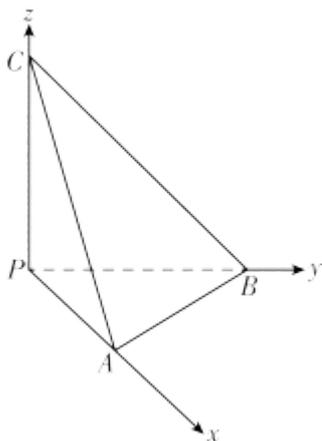
【解析】解：∵三棱锥 $P-ABC$ 中， PA, PB, PC 两两垂直，∴以 P 为原点， PA 所在直线为 x 轴， PB 所在直线为 y 轴， PC 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，∵ $PA = 1, PB = 2, PC = 3$,∴ $P(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$, $\overrightarrow{CP} = (0, 0, -3), \overrightarrow{CA} = (1, 0, -3), \overrightarrow{CB} = (0, 2, -3)$,设平面 ABC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = x - 3z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 2y - 3z = 0 \end{cases}, \text{取} z = 2, \text{得} \vec{n} = (6, 3, 2),$$

∴点 P 到平面 ABC 的距离为：

$$d = \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}.$$

故选：D.



模块4：课堂总结

模块5：直击高考

H 2019全国 I 理18

例题10

1

【答案】见解析

【解析】证明：如图，过点 N 作 $NH \perp AD$ 交 AD 于点 H ，则 $NH \parallel AA_1$ ，且 $NH = \frac{1}{2}AA_1$ ，

又 $MB \parallel AA_1$ ， $MB = \frac{1}{2}AA_1$ ， \therefore 四边形 $NMBH$ 为平行四边形，则 $NM \parallel BH$ ，

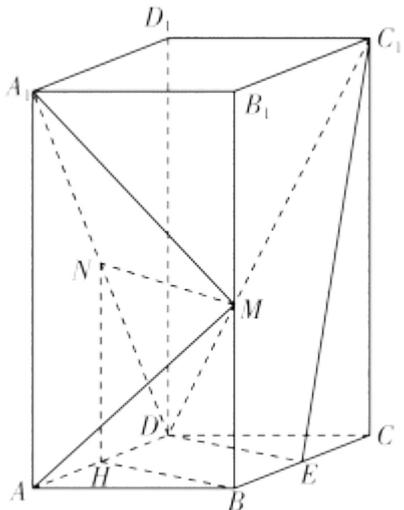
由 $NH \parallel AA_1$ ， N 为 A_1D 中点，得 H 为 AD 中点，而 E 为 BC 中点，

$\therefore BE \parallel DH$ ， $BE = DH$ ，则四边形 $BEDH$ 为平行四边形，则 $BH \parallel DE$ ，

$\therefore NM \parallel DE$ ，

$\because NM \not\subset$ 平面 C_1DE ， $DE \subset$ 平面 C_1DE ，

$\therefore MN \parallel$ 平面 C_1DE .



2

【答案】见解析

【解析】解：以 D 为坐标原点，以垂直于 DC 的直线为 x 轴， DC 所在的直线为 y 轴， DD_1 所在的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$ ， $M(\sqrt{3}, 1, 2)$ ， $A_1(\sqrt{3}, -1, 4)$ ，

$\overrightarrow{NM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ， $\overrightarrow{NA_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$ ，

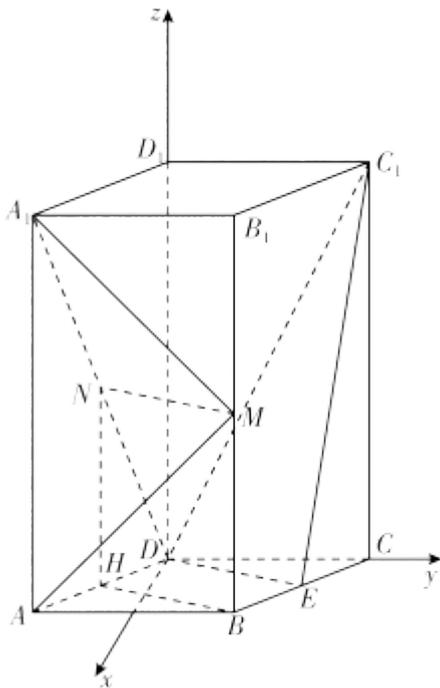
设平面 A_1MN 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{NA_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取} x = \sqrt{3}, \text{得} \vec{m} = (\sqrt{3}, -1, -1),$$

又平面 MAA_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

\therefore 二面角 $A - MA_1 - N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



模块6：随堂测

随堂测

随堂题1

1

【答案】A

【解析】解：方法一提示： $\sin \theta = \frac{d(O - PCD)}{OD}$,

等体积法求出 $d(O - PCD)$, 即 $\frac{1}{3}S_{\triangle PCD} \cdot d(O - PCD) = \frac{1}{3}S_{\triangle OCD} \cdot d(P - OCD)$,

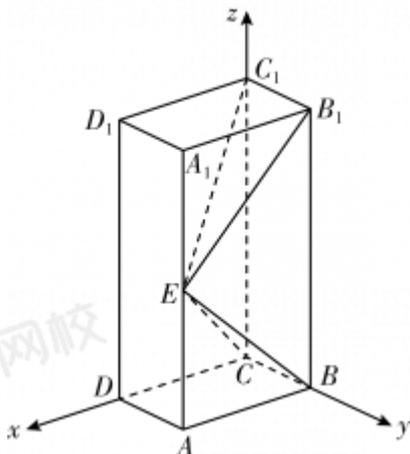
再证明 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 则 $d(P - OCD) = PO$, 求出 $\sin \theta = \frac{d(O - PCD)}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 即可.

方法二：设 CD 中点为 E , 连接 OE , 则 $OE \parallel BC$, 所以 $OE \perp$ 平面 PAB ,

所以 OB, OP, OE 两两互相垂直,

以 O 为原点, 分别以 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OE}$ 为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $O - xyz$, 如图.

\therefore 二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



随堂题3

1

【答案】见解析

【解析】由题意知 $C_1(0, 2\sqrt{11}, \sqrt{5})$, $B(2\sqrt{5}, 2\sqrt{11}, 0)$,

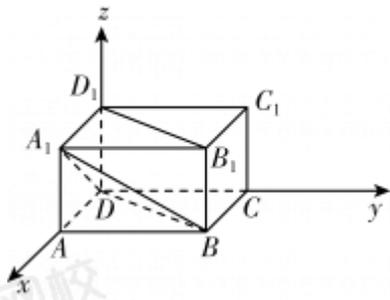
$$\overrightarrow{DC_1} = (0, 2\sqrt{11}, \sqrt{5}), \quad \overrightarrow{DA_1} = (2\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}), \quad \overrightarrow{DB} = (2\sqrt{5}, 2\sqrt{11}, 0),$$

设平面 A_1BD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{11}y = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{ 得 } \vec{n} = \left(1, -\sqrt{\frac{5}{11}}, -2\right),$$

\therefore 点 C_1 到平面 A_1BD 的距离:

$$d = \frac{|\overrightarrow{DC_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{60}{11}}} = \frac{2\sqrt{33}}{3}.$$



立体几何中的动点问题-清北答案解析

模块1：存在性问题

H 考点：平行垂直的存在性问题

例题1

1

【答案】见解析

【解析】设 $G(0, t, 1)$ ，则 $\overrightarrow{AG} = (-1, t, 1)$ ， $F\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ ，设平面 BEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\because \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right), \therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 1 \text{ 得 } \vec{n} = (2, 2, 1), \therefore AG // \text{平面 } BEF,$$

$\therefore \overrightarrow{AG} \cdot \vec{n} = (-1, t, 1) \cdot (2, 2, 1) = 0$ ，解得 $t = \frac{1}{2}$ ， \therefore 当 G 是 D_1C_1 的中点时， $AG //$ 平面 BEF 。

例题2

1

【答案】见解析

【解析】设 M 是棱 PC 上一点，则存在 $\lambda \in [0, 1]$ 使得 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$ 。

因此点 $M(0, \lambda, 1 - \lambda)$ ， $\overrightarrow{BM} = (-1, \lambda - 1, 1 - \lambda)$ ， $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 0)$ 。

由 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，得 $1 + 2(\lambda - 1) = 0$ ，解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 。

因为 $\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ ，

所以在棱 PC 上存在点 M ，使得 $BM \perp AC$ 。

此时， $\frac{PM}{PC} = \frac{1}{2}$ 。

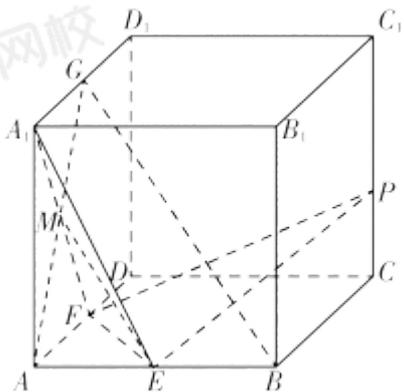
达标检测1

1

【答案】1

【解析】如图，连接 AG ，与 A_1F 交于点 M ，连接 ME ，要使得 $BG //$ 平面 A_1EF ，则必须有 $GB // ME$ ，所以

$$\frac{AM}{MG} = \frac{AE}{EB} = 1, \text{ 进一步得出 } \frac{D_1G}{A_1G} = 1.$$



H 考点：空间角的存在性问题

例题3

1

【答案】见解析

【解析】线段 A_1C 上存在点 F 符合题意.

建立如图所示的坐标系，设 $\overrightarrow{A_1F} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$.

设 $F(x_1, y_1, z_1)$ ，则有 $(x_1, y_1, z_1 - 2) = (2\lambda, 2\lambda, -2\lambda)$,

所以 $x_1 = 2\lambda, y_1 = 2\lambda, z_1 = 2 - 2\lambda$ ，从而 $F(2\lambda, 2\lambda, 2 - 2\lambda)$,

所以 $\overrightarrow{DF} = (2\lambda, 2\lambda + 1, 2 - 2\lambda)$ ，又 $\overrightarrow{BC} = (0, 4, 0)$,

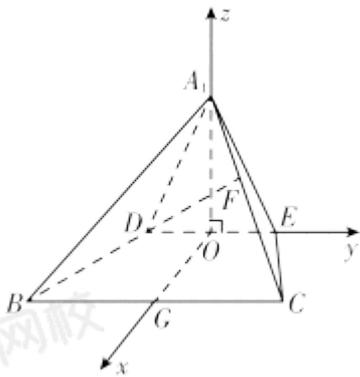
$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{BC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DF}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{4|2\lambda + 1|}{4\sqrt{(2\lambda)^2 + (2\lambda + 1)^2 + (2 - 2\lambda)^2}},$$

$$\text{令 } \frac{|2\lambda + 1|}{\sqrt{(2\lambda)^2 + (2\lambda + 1)^2 + (2 - 2\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

整理得 $3\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$.

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ ，舍去 $\lambda = 2$.

故线段 A_1C 上存在点 F 符合题意，且 $\frac{A_1F}{A_1C} = \frac{1}{3}$.



例题4

1

【答案】存在点 N 符合条件，且 N 是棱 DC 的中点。

【解析】解：以 M 为原点， \overrightarrow{MB} 为 x 轴正方向， \overrightarrow{MC} 为 y 轴正方向，垂直于 AB 且与 DE 相交的方向为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $M-xyz$ 。

所以 $M(0,0,0)$ ， $C(0,\sqrt{2},0)$ ， $E(-\sqrt{2},0,1)$ ， $B(\sqrt{2},0,0)$ ， $D(\sqrt{2},0,2)$ ，

设平面 EMC 的法向量为 $\vec{n} = (x', y', z')$ ，则 $\overrightarrow{ME} \cdot \vec{n} = -\sqrt{2}x' + z' = 0$ ， $\overrightarrow{MC} \cdot \vec{n} = \sqrt{2}y' = 0$ ，

令 $x' = 1$ ，则 $\vec{n} = (1, 0, \sqrt{2})$ 。

在棱 DC 上存在一点 N ，设 $N(x, y, z)$ ，

且 $\overrightarrow{DN} = \lambda \overrightarrow{DC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)，

$\therefore (x - \sqrt{2}, y, z - 2) = \lambda(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$ ，

解得 $x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda$ ， $y = \sqrt{2}\lambda$ ， $z = 2 - 2\lambda$ ，

$\therefore \overrightarrow{MN} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, \sqrt{2}\lambda, 2 - 2\lambda)$ ，

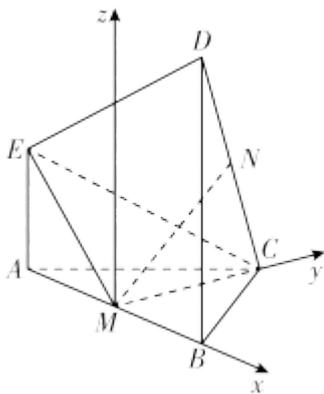
\therefore 直线 MN 与平面 EMC 所成的角为 60° ，

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}(2 - 2\lambda)}{\sqrt{3} \times \sqrt{2(1 - \lambda)^2 + 2\lambda^2 + 4(1 - \lambda)^2}}$$

$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，

\therefore 存在点 N 符合条件，且 N 是棱 DC 的中点。



例题5

1

【答案】见解析

【解析】解：假设在棱 CC_1 上存在点 $E(0,0,t)$ ，使得二面角 $A-EB_1-B$ 的余弦值是 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ ，

则 $\overrightarrow{AE} = (-1, 0, t)$ ， $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 2, 4)$ ，

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 AEB_1 的法向量，

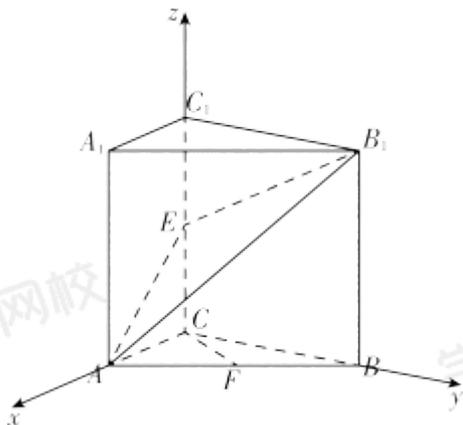
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = -x + tz = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AB}_1 = -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}, \text{取} z = 1, \text{得} \vec{n} = \left(t, \frac{t-4}{2}, 1 \right),$$

平面 BEB_1 的法向量 $\vec{m} = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{t-4}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{17}}{17},$$

由 $t > 0$, 解得 $t = 1$.

\therefore 在棱 CC_1 上存在点 E , 使得二面角 $A - EB_1 - B$ 的余弦值是 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$, $CE = 1$.



达标检测2

1

【答案】C

【解析】解：存在，在棱 BB' 上取一点 P ，如图，

由题意可知， $BP \perp$ 平面 ABC ，

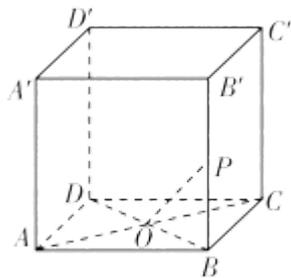
连接 AC ， BD 交于点 O ，易知 $BO \perp AC$ ， $BO = \sqrt{2}$ ，

连接 PO ，则 $\angle POB$ 为二面角 $P - AC - B$ 的平面角，

当 $\angle POB = 30^\circ$ 时，即 $\tan \angle POB = \frac{PB}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

解得 $BP = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

\therefore 当 $BP = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，二面角 $P - AC - B$ 的大小为 30° 。

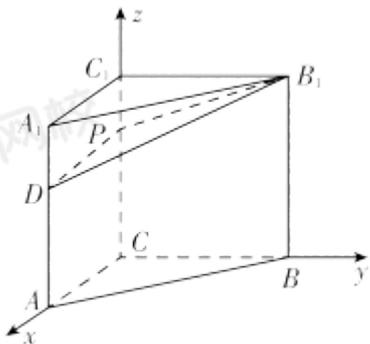


H 考点：最值问题**达标检测3**

1

【答案】B

【解析】解：建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $D(1, 0, 2)$, $B_1(0, 1, 3)$,设 $P(0, 0, z)$,则 $\overrightarrow{PD} = (1, 0, 2 - z)$, $\overrightarrow{PB_1} = (0, 1, 3 - z)$,

$$\therefore \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PB_1} = 0 + 0 + (2 - z)(3 - z) = \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

故当 $z = \frac{5}{2}$ 时, $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PB_1}$ 取得最小值为 $-\frac{1}{4}$,

故选：B.

例题6

1

【答案】B

【解析】由(1)知四边形 $MNQP$ 为平行四边形, $\therefore MN = PQ$.

$$\because DD_1 = AD = DC = BC = 1, \therefore AD_1 = BD = \sqrt{2}.$$

$$\because D_1M = DN = a, \therefore \frac{D_1P}{1} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{DQ}{1} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{即 } D_1P = DQ = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore MN = PQ = \sqrt{(1 - D_1P)^2 + DQ^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \quad (0 < a < \sqrt{2}),$$

故当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, MN 的长度有最小值, 为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即当 M, N 分别移动到 AD_1, BD 的中点时, MN 的长度最小, 此时 MN 的长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例题7

1

【答案】D

【解析】解: 以 D 为原点, 建立如图所示空间直角坐标系,

则 $P(4, 0, 2), C(0, 4, 0), D_1(0, 0, 4), B(4, 4, 0)$,

设 $M(4, a, b), 0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4$, 则 $\overrightarrow{D_1M} = (4, a, b-4), \overrightarrow{CP} = (4, -4, 2)$,

$\therefore D_1M \perp CP$,

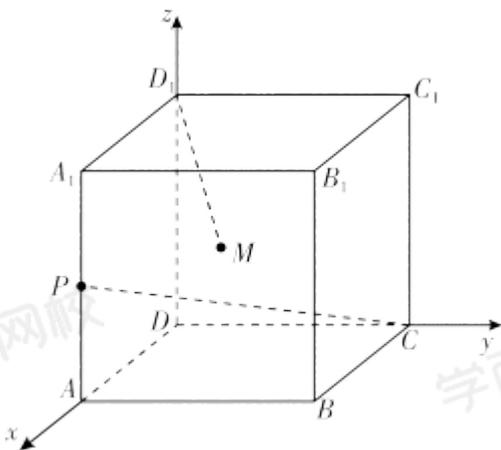
$\therefore \overrightarrow{D_1M} \cdot \overrightarrow{CP} = 16 - 4a + 2b - 8 = 0$, 解得 $2a - b = 4$,

$\therefore M(4, a, 2a-4)$,

$$\begin{aligned} \therefore |BM| &= \sqrt{(4-4)^2 + (4-a)^2 + (4-2a)^2} \\ &= \sqrt{5a^2 - 24a + 32} = \sqrt{5\left(a - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}. \end{aligned}$$

\therefore 当 $a = \frac{12}{5}$ 时, $\triangle BCM$ 的面积取得最小值, 为 $S = 2 \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

故选: D.



例题8

1

【答案】A

【解析】解: 以点 C 为原点, 以 CD, CB, CC' 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系, 如图所示:

则 $C(0, 0, 0), C'(0, 0, 2\sqrt{3})$. 设 $P(0, a, 0), Q(b, 0, 0)$, 于是 $0 < a \leq 4, 0 < b \leq 3$.

$$\overrightarrow{QC'} = (-b, 0, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{PC'} = (0, -a, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{CC'} = (0, 0, 2\sqrt{3}),$$

设平面 PQC' 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC'} = -ay + 2\sqrt{3}z = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{QC'} = -bx + 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

取 $z = 1$, 得 $\vec{n} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{b}, \frac{2\sqrt{3}}{a}, 1 \right)$,

$\therefore |\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{CC'} \rangle| = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

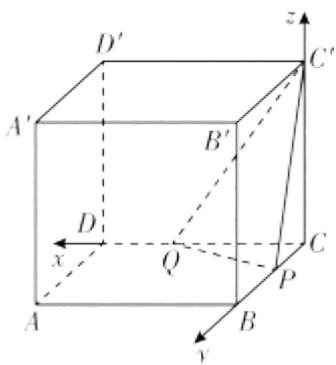
$\therefore |\vec{n} \cdot \overrightarrow{CC'}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CC'}| \cdot |\vec{n}| \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$,

解得 $ab \geq 8$.

\therefore 当 $ab = 8$ 时, $S_{\triangle PQC} = 4$, 三棱锥 $C' - PQC$ 的体积最小,

$(V_{C'-PQC})_{\min} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

故选: A.



模块3：课堂总结

模块4：直击高考

H 2019天津理17

例题9

1

【答案】见解析

【解析】证明: 以 A 为坐标原点, 分别以 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} 所在直线为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,

可得 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 2)$.

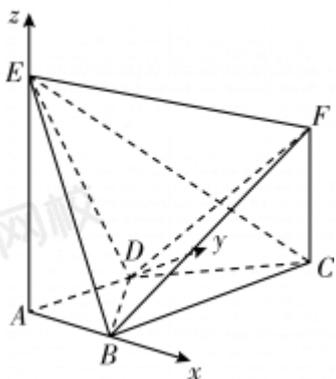
设 $CF = h$ ($h > 0$), 则 $F(1, 2, h)$.

由题意易知 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ 是平面 ADE 的一个法向量,

又 $\overrightarrow{BF} = (0, 2, h)$, 可得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

又 \therefore 直线 $BF \not\subset$ 平面 ADE ,

$\therefore BF \parallel$ 平面 ADE .



2

【答案】见解析

【解析】解：依题意， $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{BE} = (-1, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{CE} = (-1, -2, 2)$ 。

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -x + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 1, \text{ 得 } \vec{n} = (2, 2, 1).$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{4}{9}.$$

\therefore 直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

3

【答案】见解析

【解析】解：设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 BDF 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 2y + hz = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y = 1, \text{ 可得 } \vec{m} = \left(1, 1, -\frac{2}{h} \right),$$

$$\text{由题意, 得 } \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| 4 - \frac{2}{h} \right|}{3 \times \sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } h = \frac{8}{7}.$$

经检验，符合题意。

\therefore 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

模块5：随堂测

随堂测

随堂题1

1

【答案】见解析

【解析】解：如图，由(1)知， $\overrightarrow{DQ} = (6, m-6, 0)$ ， $\overrightarrow{DD_1} = (0, -3, 6)$ 是平面 PQD 内的两个不共线向量。

设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ 是平面 PQD 的一个法向量，则
$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DQ} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 6x + (m-6)y = 0 \\ -3y + 6z = 0 \end{cases}.$$

取 $y = 6$ ，得 $\vec{n}_1 = (6-m, 6, 3)$ 。又平面 AQD 的一个法向量是 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ ，所以

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{(6-m)^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{(6-m)^2 + 45}}.$$

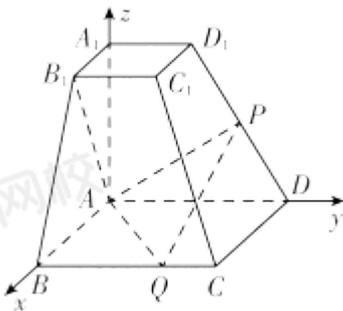
而二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$ ，因此 $\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2 + 45}} = \frac{3}{7}$ ，解得 $m = 4$ 或 $m = 8$ (舍去)。此时

 $Q(6, 4, 0)$ 。设 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DD_1}$ ，而 $\overrightarrow{DD_1} = (0, -3, 6)$ ，得 $P(0, 6-3\lambda, 6\lambda)$ ，所以 $\overrightarrow{PQ} = (6, 3\lambda-2, -6\lambda)$ 。因为 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ，且平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\vec{n}_3 = (0, 1, 0)$ ，所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_3 = 0$ ，即

$$3\lambda - 2 = 0, \text{ 亦即 } \lambda = \frac{2}{3}, \text{ 从而 } P(0, 4, 4).$$

于是将四面体 $ADPQ$ 视为以 $\triangle ADQ$ 为底面的三棱锥 $P-ADQ$ ，则其高为4，故四面体 $ADPQ$ 的体积

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ADQ} \cdot h = 24.$$



随堂题2

1

【答案】B

【解析】解：由题意可知该四面体的体积最大时，就是折叠成直二面角，

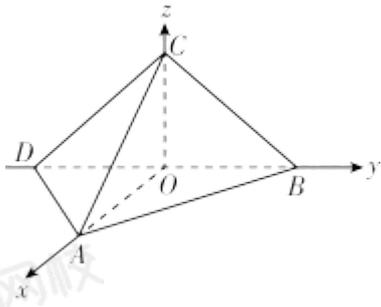
建立空间直角坐标系，如图：

设正方形的对角线长为2，则 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{DC} = (1, 0, 1)$ ，

设直线 AB 与 CD 所成的角为 θ ，则
$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

所以 $\theta = 60^\circ$ 。

故选：B.



直线的方程与相关位置关系-清北答案解析

模块1：直线的基本量与方程

H 考点：直线的倾斜角与斜率

例题1

1

【答案】C

【解析】当 $30^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 时, $\tan \theta \geq \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$;

当 $90^\circ < \theta < 120^\circ$ 时, $\tan \theta < \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, 即 $k < -\sqrt{3}$,

可得 k 的取值范围是: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$,

故选: C.

例题2

1

【答案】 $(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【解析】解: 将 $\frac{y+1}{x-1}$ 看作点 $P(x, y)$ 与 $C(1, -1)$ 连线的斜率, 连接 AC 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 连接 BC 的斜率为 -5 , 结合

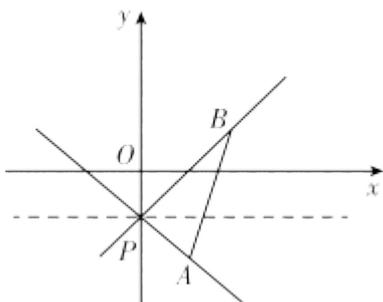
图形可知斜率的取值范围为 $(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

达标检测1

1

【答案】A

【解析】如图,



$\because A(1, -2), B(2, 1), P(0, -1), \therefore k_{PA} = \frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1, k_{PB} = \frac{-1 - 1}{0 - 2} = 1$, 则使直线 l 与

线段 AB 有公共点的直线 l 的斜率的范围为 $[-1, 1]$, 倾斜角的范围为 $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$. 由补集思想可得, 直线 l 与连接 A, B 的线段没有公共点的斜率的范围为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, 直线的倾斜角的范围为 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. 故选: A.

H 考点: 直线的方程

例题3

1

【答案】C

【解析】联立已知的两直线方程得: $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, 所以两直线的交点坐标为 $(2, 1)$,

因为直线 l 在两坐标轴上的截距互为相反数,

①当直线 l 与两坐标轴的截距不为0时, 设直线 l 的方程为 $x - y = a$,

直线 l 过两直线的交点, 所以把 $(2, 1)$ 代入直线 l 的方程得: $a = 1$, 则直线 l 的方程为 $x - y = 1$, 即 $x - y - 1 = 0$;

②当直线 l 与两坐标轴的截距等于0时, 设直线 l 的方程为 $y = kx$,

直线 l 过两直线的交点, 所以把 $(2, 1)$ 代入直线 l 的方程得: $k = \frac{1}{2}$, 则直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$, 即 $x - 2y = 0$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x - 2y = 0$. 故选C.

达标检测2

1

【答案】D

【解析】∵直线斜率为 $\frac{3}{4}$ 且截距都存在,

∴可设截距式方程 $\frac{x}{4b} + \frac{y}{-3b} = 1$,

与坐标轴围成的三角形面积是 $S = \frac{1}{2} |4b| |3b| = 6b^2 = 6$,

∴ $b = \pm 1$, 代入截距式方程并化为一般式方程为 $3x - 4y + 12 = 0$ 或 $3x - 4y - 12 = 0$,

故选D.

例题4

1

【答案】D

【解析】解: 将直线方程整理成 $m(x + 2y - 1) = x + y - 5$, 该式对于任意 m 都成立, 只需要

$x + 2y - 1 = x + y - 5 = 0$ 同时成立, 解得 $x = 9, y = -4$.

模块2：直线的位置关系与距离

H 考点：直线的位置关系与距离

达标检测3

1

【答案】A

【解析】解：∵ $\begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \\ B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} 6 - a(a+1) = 0 \\ 2(a+1) - 6 \neq 0 \end{cases}$$

解方程组得 $a = -3$.

故选：A.

例题5

1

【答案】见解析

【解析】解法1：设点 $P(x, y)$ ，∵ $|PA| = |PB|$ ，

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \text{ ①.}$$

又点 P 到直线 l 的距离等于2，

$$\therefore \frac{|4x + 3y - 2|}{5} = 2 \text{ ②.}$$

由①②联立方程组，解得 $P(1, -4)$ 或 $\left(\frac{27}{7}, -\frac{8}{7}\right)$.

解法2：设点 $P(x, y)$ ，∵ $|PA| = |PB|$ ，

∴ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，且 AB 垂直平分线的方程是 $y = x - 5$.

∴ 设点 $P(x, x - 5)$.

∴ 点 P 到 l 的距离等于2，

$$\therefore \frac{|4x + 3(x - 5) - 2|}{5} = 2.$$

由上式得到 $x = 1$ 或 $\frac{27}{7}$ ，

∴ $P(1, -4)$ 或 $\left(\frac{27}{7}, -\frac{8}{7}\right)$.

例题6

1

【答案】C

【解析】解：直线 $mx - y + 1 - 2m = 0$ 可化为 $y - 1 = m(x - 2)$,

由直线点斜式方程可知直线恒过定点 $Q(2, 1)$ 且斜率为 m ,

结合图象可知当 PQ 与直线 $mx - y + 1 - 2m = 0$ 垂直时, 点到直线的距离最大,

此时 $m \cdot \frac{2-1}{3-2} = -1$, 解得 $m = -1$,

故选: C.

例题7

1

【答案】D

【解析】解：由题意可知, 动直线 $x + my = 0$ 经过定点 $A(0, 0)$,

动直线 $mx - y - m + 3 = 0$, 即 $m(x - 1) - y + 3 = 0$, 经过定点 $B(1, 3)$,

\therefore 动直线 $x + my = 0$ 和动直线 $mx - y - m + 3 = 0$ 始终垂直, 点 P 又是两条直线的交点,

$\therefore PA \perp PB$, $\therefore |PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$.

由基本不等式可得 $|PA|^2 + |PB|^2 \leq (|PA| + |PB|)^2 \leq 2(|PA|^2 + |PB|^2)$,

即 $10 \leq (|PA| + |PB|)^2 \leq 20$, 可得 $\sqrt{10} \leq |PA| + |PB| \leq 2\sqrt{5}$.

故选: D.

模块3：对称问题

H 考点：对称问题

例题8

1

【答案】C

【解析】设对称点为 (x_0, y_0) , 由题意得,

$$\begin{cases} \frac{y_0 - 4}{x_0 + 3} = -1 \\ \frac{x_0 - 3}{2} - \frac{y_0 + 4}{2} - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -4 \end{cases}, \text{ 即对称点为 } (5, -4), \text{ 故选C.}$$

例题9

1

【答案】D

【解析】直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(1, -1)$ 对称的直线, 和直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 平行, 排除A、C, 在直线

$2x + 3y - 6 = 0$ 上选特殊点 $(0, 2)$, 它关于点 $(1, -1)$ 对称点 $(2, -4)$, 显然 $(2, -4)$ 不在 $2x + 3y + 7 = 0$ 上. 故选D.

达标检测4

1

【答案】C

【解析】解：由于直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 和直线 $l_2: Ax + By + C_2 = 0 (C_1 \neq C_2)$ 平行，设直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 关于直线 $l_2: Ax + By + C_2 = 0 (C_1 \neq C_2)$ 对称的直线为直线

$$l_3: Ax + By + C_3 = 0,$$

则根据直线 l_2 到直线 l_1 的距离等于它到直线 l_3 的距离，可得 $C_1 + C_3 = 2C_2$ ，

$$\therefore C_3 = 2C_2 - C_1,$$

故对称直线为： $Ax + By + (2C_2 - C_1) = 0$ ， 故选：C.

例题10

1

【答案】A

【解析】由 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ，即直线 l 和 l_1 的交点 $A(-2, -1)$ ，由题意可得， $A(-2, -1)$ 在直线 l_2 上，在直线 l_1 上取一点 $C(0, 3)$ ，设出点 C 关于直线 l 的对称点 B 的坐标为 (m, n) ，由

$$\begin{cases} \frac{n-3}{m-0} \times 1 = -1 \\ \frac{m}{2} - \frac{n+3}{2} + 1 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}, \text{ 故 } B(2, 1), \text{ 故直线 } AB \text{ 的斜率 } k_{AB} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}, \text{ 故直线 } AB$$

的方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$ ，即 $x - 2y = 0$ ，即 l_2 的方程为 $x - 2y = 0$ ， 故选A.

模块4：课堂总结

模块5：直击高考

H 2018北京理7

例题11

1

【答案】C

【解析】解：由题意 $d = \frac{|\cos \theta - m \sin \theta - 2|}{\sqrt{1^2 + (-m)^2}} = \frac{|\sqrt{m^2 + 1} \sin(\theta + \alpha) - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ， $\tan \alpha = -\frac{1}{m}$ ，∴当 $\sin(\theta + \alpha) = -1$ 时，

$$d_{\max} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq 3.$$

∴ d 的最大值为3.

故选：C.

模块6：随堂测

随堂测

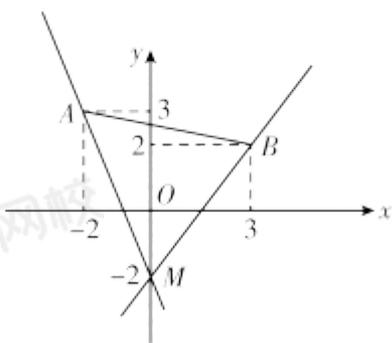
随堂题1

1

【答案】D

【解析】解：∵直线 $ax + y + 2 = 0$ 过定点 $(0, -2)$ ，斜率为 $-a$ ，

如图，



$$k_{MA} = -\frac{5}{2}, k_{MB} = \frac{4}{3},$$

∴若直线 $ax + y + 2 = 0$ 与线段 AB 有交点，

$$\text{则 } -a \geq \frac{4}{3} \text{ 或 } -a \leq -\frac{5}{2}.$$

$$\text{即 } a \leq -\frac{4}{3} \text{ 或 } a \geq \frac{5}{2}.$$

$$\therefore \text{答案为: } \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

故选：D.

随堂题2

1

【答案】D

【解析】由题意可知，动直线 $ax + y - 1 = 0$ 经过定点 $M(0, 1)$ ，动直线 $x - ay + 2a - 1 = 0$ ，即 $x - 1 + a(-y + 2) = 0$ ，经过定点 $N(1, 2)$ ，∴过定点 M 的直线 $ax + y - 1 = 0$ 与过定点 N 的直线 $x - ay + 2a - 1 = 0$ 始终垂直， P 又是两条直线的交点，∴有 $PM \perp PN$ ，∴ $|PM|^2 + |PN|^2 = |MN|^2 = 2$ 。故 $|PM| \cdot |PN| \leq \frac{|PM|^2 + |PN|^2}{2} = 1$ (当且仅当 $|PM| = |PN| = 1$ 时取“=”)，故选D.

随堂题3

1

【答案】A**【解析】**解：在直线 $y = -3x + b$ 上任意取一点 $A(1, b - 3)$,则点 A 关于直线 $x + y = 0$ 的对称点 $B(-b + 3, -1)$ 在直线 $y = -ax + 3$ 上,故有 $-1 = -a(-b + 3) + 3$, 即 $-1 = ab - 3a + 3$, $\therefore ab = 3a - 4$,

结合所给的选项,

故选：A.

圆的方程与相关位置关系-清北答案解析

模块1：圆的方程

H 考点：圆的方程

例题1

1

【答案】 $(x-2)^2 + y^2 = 9$ 【解析】由题意设圆 C 的方程为 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($a > 0$),由点 $M(0, \sqrt{5})$ 在圆 C 上, 且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$$\text{得} \begin{cases} a^2 + 5 = r^2 \\ \frac{|2a|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \text{ 由 } a > 0, \text{ 解得 } a = 2, r = 3.$$

∴圆 C 的方程为: $(x-2)^2 + y^2 = 9$.故答案为: $(x-2)^2 + y^2 = 9$.

例题2

1

【答案】B

【解析】圆 $x^2 + y^2 - 2kx + 2y + 2 = 0$ ($k > 0$)的圆心为 $(k, -1)$, 半径为 $\sqrt{k^2 - 1}$,圆 $x^2 + y^2 - 2kx + 2y + 2 = 0$ ($k > 0$)与两坐标轴无公共点,所以 $\sqrt{k^2 - 1} < 1$, 解得 $1 < k < \sqrt{2}$,

故选: B.

达标检测1

1

【答案】D

【解析】由曲线 C 的方程 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 5a^2 - 4 = 0$ 可化为 $(x+a)^2 + (y-2a)^2 = 4$,故曲线 C 为圆, 圆的圆心为 $(-a, 2a)$, 圆的半径为2,若曲线 $C: x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 5a^2 - 4 = 0$ 上所有的点均在第二象限内,则 $a > 0$, 且 $|-a| > 2$, 解得 $a > 2$, 故 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$, 故选D.

模块2：圆与圆的位置关系

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/037156031010006131>