

§ 1.3 空间几何体的表面积与体积

§ 1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积

一、教材分析

本节一开始的“思考”从学生熟悉的正方体和长方体的展开图入手，分析展开图与其表面积的关系，目的有两个：其一，复习表面积的概念，即表面积是各个面的面积的和；其二，介绍求几何体表面积的方法，把它们展成平面图形，利用平面图形求面积的方法，求立体图形的表面积。

接着，教科书安排了一个“探究”，要求学生类比正方体、长方体的表面积，讨论棱柱、棱锥、棱台的表面积问题，并通过例1进一步加深学生的认识.教学中可以引导学生讨论得出：棱柱的展开图是由平行四边形组成的平面图形，棱锥的展开图是由三角形组成的平面图形，棱台的展形图是由梯形组成的平面图形.这样，求它们的表面积的问题就可转化为求平行四边形、三角形和梯形的面积问题.

教科书通过“思考”提出“如何根据圆柱、圆锥的几何结构特征，求它们的表面积？”的问题.教学中可引导学生回忆圆柱、圆锥的形成过程及其几何特征，在此基础上得出圆柱的侧面可以展开成为一个矩形，圆锥的侧面可以展开成为一个扇形的结论，随后的有关圆台表面积问题的“探究”，也可以按照这样的思路进行教学.值得注意的是，圆柱、圆锥、圆台都有统一的表面积公式，得出这些公式的关键是要分析清楚它们的底面半径、母线长与对应的侧面展开图中的边长之间的关系，教学中应当引导学生认真分析，在分别学习了圆柱、圆锥、圆台的表面积公式后，可以引导学生用运动、变化的观点分析它们之间的关系.由于圆柱可看成上下两底面全等的圆台；圆锥可看成上底面半径为零的圆台，因此圆柱、圆锥就可以看成圆台的特例.这样，圆柱、圆锥的表面积公式就可以统一在圆台的表面积公式之下.

关于体积的教学.我们知道，几何体占有空间部分的大小，叫做几何体的体积.这里的“大小”没有比较大小的含义，而是要用具体的“数”来定量的表示几何体占据了多大的空间，因此就产生了度量体积的问题.度量体积时应知道：①完全相同的几何体，它的体积相等；②一个几何体的体积等于它的各部分体积的和.体积相等的两个几何体叫做等积体.相同的两个几何体一定是等积体，但两个等积体不一定相同.体积公式的推导是建立在等体积概念之上的.

柱体和锥体的体积计算，是经常要解决的问题.虽然有关公式学生已有所了解，但进一步了解这些公式的推导，有助于学生理解和掌握这些公式，为此，教科书安排了一个“探究”，要求学生思考一下棱锥与等底等高的棱柱体积之间的关系.教学中，可以引导学生类比圆柱与圆锥之间的体积关系来得出结论.

与讨论表面积公式之间的关系类似，教科书在得出柱体、锥体、台体的体积公式后，安排了一个“思考”，目的是引导学生思考这些公式之间的关系，建立它们之间的联系.实际上，这几个公式之间的关系，是由柱体、锥体和台体之间的关系决定的.这样，在台体的体积公式中，令 $S'=S$ ，得柱体的体积公式；令 $S'=0$ ，得锥体的体积公式.

值得注意的是在教学过程中，要重视发挥思考和探究等栏目的作用，培养学生的类比思维能力，引导学生发现这些公式之间的关系，建立它们的联系.本节的重点应放在公式的应用上，防止出现：教师在公式推导过程中“纠缠不止”，要留出“空白”，让学生自己去思考和解决问题.如果有条件，可以借助于信息技术来展示几何体的展开图.对于空间想象能力较差的学生，可以通过制作实物模型，经过操作确认来增强空间想象能力.

二、教学目标

1. 知识与技能

- (1) 了解柱体、锥体与台体的表面积（不要求记忆公式）.
- (2) 能运用公式求解柱体、锥体和台体的全面积.
- (3) 培养学生空间想象能力和思维能力.

2. 过程与方法

让学生经历几何体的侧面展开过程，感知几何体的形状，培养转化化归能力.

3. 情感、态度与价值观

通过学习，使学生感受到几面体表面积的求解过程，激发学生探索创新的意识，增强学习的积极性.

三、重点难点

教学重点：了解柱体、锥体、台体的表面积和体积计算公式及其应用.

教学难点：表面积和体积计算公式的应用.

四、课时安排

1 课时

五、教学设计

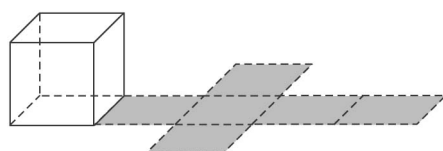
(一) 导入新课

思路 1.在过去的学习中,我们已经接触过一些几何体的面积和体积的求法及公式,哪些几何体可以求出表面积和体积?(引导学生回忆,互相交流,教师归类)几何体的表面积等于它的展开图的面积,那么,柱体、锥体、台体的侧面展开图是怎样的?你能否计算?

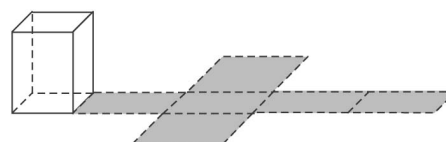
思路 2.被誉为世界七大奇迹之首的胡夫大金字塔,在 1889 年巴黎埃菲尔铁塔落成前的四千多年的漫长岁月中,胡夫大金字塔一直是世界上最高的建筑物.在四千多年前生产工具很落后的中古时代,埃及人是怎样采集、搬运数量如此之多,每块又如此之重的巨石垒成如此宏伟的大金字塔,真是一个十分难解的谜.胡夫大金字塔是一个正四棱锥外形的建筑,塔底边长 230 米,塔高 146.5 米,你能计算建此金字塔用了多少石块吗?

(二) 推进新课、新知探究、提出问题

①在初中,我们已经学习了正方体和长方体的表面积,以及它们的展开图(图 1),你知道上述几何体的展开图与其表面积的关系吗?



正方体及其展开图(1)



长方体及其展开图(2)

图 1

②棱柱、棱锥、棱台也是由多个平面图形围成的几何体,它们的展开图是什么?如何计算它们的表面积?

③如何根据圆柱、圆锥的几何结构特征,求它们的表面积?

④联系圆柱、圆锥的侧面展开图,你能想象圆台侧面展开图的形状,并且画出它吗?如果圆台的上、下底面半径分别是 r' , r , 母线长为 l , 你能计算出它的表面积吗?

⑤圆柱、圆锥和圆台的表面积之间有什么关系?

活动: ①学生讨论和回顾长方体和正方体的表面积公式.

②学生思考几何体的表面积的含义,教师提示就是求各个面的面积的和.

③让学生思考圆柱和圆锥的侧面展开图的形状.

④学生思考圆台的侧面展开图的形状.

⑤提示学生用动态的观点看待这个问题.

讨论结果: ①正方体、长方体是由多个平面图形围成的几何体,它们的表面积就是各个面的面积的和.因此,我们可以把它们展成平面图形,利用平面图形求面积的方法,求立体图形的表面积.

②棱柱的侧面展开图是平行四边形,其表面积等于围成棱柱的各个面的面积的和;棱锥的侧面展开图是由多个三角形拼接成的,其表面积等于围成棱锥的各个面的面积的和;棱台的侧面展开图是由多个梯形拼接成的,其表面积等于围成棱台的各个面的面积的和.

③它们的表面积等于侧面积与底面积的和,利用它们的侧面展开图来求得它们的侧面积,由于底面是圆面,其底面积直接应用圆的面积公式即得.其中,圆柱的侧面展开图是矩形,圆锥的侧面展开图是扇形.

我们知道,圆柱的侧面展开图是一个矩形(图 2).如果圆柱的底面半径为 r , 母线长为 l , 那么圆柱的底面面积为 πr^2 , 侧面面积为 $2\pi rl$. 因此, 圆柱的表面积 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r(r+l)$.

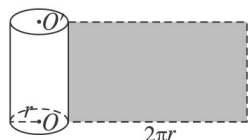


图 2

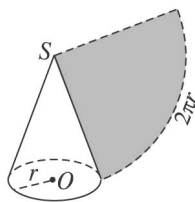


图 3

圆锥的侧面展开图是一个扇形（图 3）.如果圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 那么它的表面积 $S = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r+l)$.

点评: 将空间图形问题转化为平面图形问题, 是解决立体几何问题基本的、常用的方法.

④圆台的侧面展开图是一个扇环（图 4），它的表面积等于上、下两个底面的面积和加上侧面的面积，即 $S = \pi(r^2 + r'^2 + rl + r'l)$.

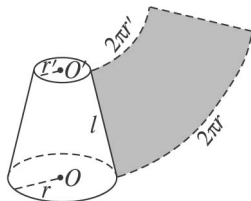


图 4

⑤圆柱、圆锥、圆台侧面积的关系:

圆柱和圆锥都可以看作是圆台退化而成的几何体.圆柱可以看作是上下底面全等的圆台, 圆锥可看作是上底面退化成一点的圆台, 观察它们的侧面积, 不难发现:

$$S_{\text{圆柱表}} = 2\pi r(r+l) \xleftarrow{r_1=r_2=r} S_{\text{圆台表}} = \pi(r_1l+r_2l+r_1^2+r_2^2) \xrightarrow{r_1=0, r_2=r} S_{\text{圆锥表}} = \pi r(r+l).$$

从上面可以很清楚地看出圆柱和圆锥的侧面积公式都可以看作由圆台侧面积公式演变而来.

提出问题

①回顾长方体、正方体和圆柱的体积公式, 你能将它们统一成一种形式吗? 并依次类比出柱体的体积公式?

②比较柱体、锥体、台体的体积公式:

$$V_{\text{柱体}} = Sh (S \text{ 为底面积, } h \text{ 为柱体的高});$$

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh (S \text{ 为底面积, } h \text{ 为锥体的高});$$

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h (S, S' \text{ 分别为上、下底面积, } h \text{ 为台体的高}).$$

你能发现三者之间的关系吗? 柱体、锥体是否可以看作“特殊”的台体? 其体积公式是否可以看作台体体积公式的“特殊”形式?

活动: ①让学生思考和讨论交流长方体、正方体和圆柱的体积公式.

②让学生类比圆柱、圆锥和圆台的表面积的关系?

讨论结果:

①棱长为 a 的正方体的体积 $V = a^3 = a^2a = Sh$;

长方体的长、宽和高分别为 a, b, c , 其体积为 $V = abc = (ab)c = Sh$;

底面半径为 r 高为 h 的圆柱的体积是 $V = \pi r^2h = Sh$,

可以类比, 一般的柱体的体积也是 $V = Sh$, 其中 S 是底面面积, h 为柱体的高.

圆锥的体积公式是 $V = \frac{1}{3}Sh$ (S 为底面面积, h 为高), 它是同底等高的圆柱的体积的 $\frac{1}{3}$.

棱锥的体积也是同底等高的棱柱体积的 $\frac{1}{3}$, 即棱锥的体积 $V = \frac{1}{3}Sh$ (S 为底面面积, h 为高).

由此可见, 棱柱与圆柱的体积公式类似, 都是底面面积乘高; 棱锥与圆锥的体积公式类似, 都是底面

面积乘高的 $\frac{1}{3}$.

由于圆台（棱台）是由圆锥（棱锥）截成的，因此可以利用两个锥体的体积差，得到圆台（棱台）的体积公式 $V = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$,

其中 S' , S 分别为上、下底面面积, h 为圆台（棱台）高.

注意：不要求推导公式，也不要求记忆.

②柱体可以看作是上、下底面相同的台体，锥体可以看作是有一个底面是一个点的台体.因此柱体、锥体可以看作“特殊”的台体.当 $S'=0$ 时，台体的体积公式变为锥体的体积公式;当 $S'=S$ 时，台体的体积公式变为柱体的体积公式，因此，柱体、锥体的体积公式可以看作台体体积公式的“特殊”形式.

柱体和锥体可以看作由台体变化得到，柱体可以看作是上、下底面相同的台体，锥体可以看作是有一个底面是一个点的台体，因此很容易得出它们之间的体积关系,如图 5:

$$\begin{array}{ccc} V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') & & \\ \swarrow S=S' & & \searrow S'=0 \\ V_{\text{柱体}} = Sh & & V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh \end{array}$$

图 5

（三）应用示例

思路 1

例 1 已知棱长为 a ，各面均为等边三角形的四面体 $S-ABC$ （图 6），求它的表面积.

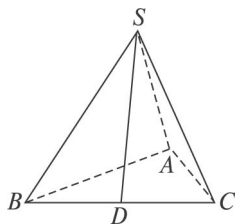


图 6

活动：回顾几何体的表面积含义和求法.

分析：由于四面体 $S-ABC$ 的四个面是全等的等边三角形，所以四面体的表面积等于其中任何一个面面积的 4 倍.

解：先求 $\triangle SBC$ 的面积，过点 S 作 $SD \perp BC$ ，交 BC 于点 D .

$$\text{因为 } BC=a, SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}BC \cdot SD = \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

$$\text{因此，四面体 } S-ABC \text{ 的表面积 } S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}a^2.$$

点评：本题主要考查多面体的表面积的求法.

变式训练

1. 已知圆柱和圆锥的高、底面半径均分别相等.若圆柱的底面半径为 r ，圆柱侧面积为 S ，求圆锥的侧面积.

解：设圆锥的母线长为 l ，因为圆柱的侧面积为 S ，圆柱的底面半径为 r ，即 $S_{\text{圆柱侧}} = S$ ，根据圆柱的侧面积

公式可得：圆柱的母线（高）长为 $\frac{S}{2\pi r}$ ，由题意得圆锥的高为 $\frac{S}{2\pi r}$ ，又圆锥的底面半径为 r ，根据勾股定理，圆锥的母线长 $l = \sqrt{r^2 + (\frac{S}{2\pi r})^2}$ ，根据圆锥的侧面积公式得

$$S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + (\frac{S}{2\pi r})^2} = \frac{\sqrt{4\pi^2 r^4 + S^2}}{2}.$$

2. 两个平行于圆锥底面的平面将圆锥的高分成相等的三段，那么圆锥被分成的三部分的体积的比是（ ）

A. 1 : 2 : 3

B. 1 : 7 : 19

C. 3 : 4 : 5

D. 1 : 9 : 27

分析：因为圆锥的高被分成的三部分相等，所以两个截面的半径与原圆锥底面半径之比为 1 : 2 : 3，

于是自上而下三个圆锥的体积之比为 $(\frac{\pi}{3}r^2h) : [\frac{\pi}{3}(2r)^2 \cdot 2h] : [\frac{\pi}{3}(3r)^2 \cdot 3h] = 1 : 8 : 27$ ，所以圆锥被分成的三部分的体积之比为 $1 : (8-1) : (27-8) = 1 : 7 : 19$.

答案：B

3. 三棱锥 $V-ABC$ 的中截面是 $\triangle A_1B_1C_1$ ，则三棱锥 $V-A_1B_1C_1$ 与三棱锥 $A-A_1BC$ 的体积之比是（ ）

A. 1 : 2

B. 1 : 4

C. 1 : 6

D. 1 : 8

分析：中截面将三棱锥的高分成相等的两部分，所以截面与原底面的面积之比为 1 : 4，将三棱锥 $A-A_1BC$ 转化为三棱锥 A_1-ABC ，这样三棱锥 $V-A_1B_1C_1$ 与三棱锥 A_1-ABC 的高相等，底面积之比为 1 : 4，于是其体积之比为 1 : 4.

答案：B

例 2 如图 7，一个圆台形花盆盆口直径为 20 cm，盆底直径为 15 cm，底部渗水圆孔直径为 1.5 cm，盆壁长为 15 cm. 为了美化花盆的外观，需要涂油漆. 已知每平方米用 100 毫升油漆，涂 100 个这样的花盆需要多少毫升油漆？（ π 取 3.14，结果精确到 1 毫升，可用计算器）

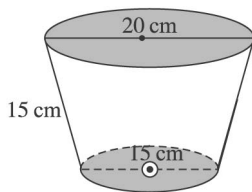


图 7

活动：学生思考和讨论如何转化为数学问题. 只要求出每个花盆外壁的表面积，就可以求出油漆的用量. 而花盆外壁的表面积等于花盆的侧面积加上底面积，再减去底部圆孔的面积.

解：如图 7，由圆台的表面积公式得一个花盆外壁的表面积 $S = \pi [(\frac{15}{2})^2 + \frac{15}{2} \times 15 + \frac{20}{2} \times 15] - \pi (\frac{1.5}{2})^2 \approx 1000(\text{cm}^2) = 0.1(\text{m}^2)$.

涂 100 个这样的花盆需油漆： $0.1 \times 100 \times 100 = 1000$ （毫升）.

答：涂 100 个这样的花盆需要 1000 毫升油漆.

点评：本题主要考查几何体的表面积公式及其应用.

变式训练

1. 有位油漆工用一把长度为 50 cm，横截面半径为 10 cm 的圆柱形刷子给一块面积为 10 m^2 的木板涂油漆，且圆柱形刷子以每秒 5 周的速度在木板上匀速滚动前进，则油漆工完成任务所需的时间是多少？（精确到 0.01 秒）

解：圆柱形刷子滚动一周涂过的面积就等于圆柱的侧面积，

∵圆柱的侧面积为 $S_{\text{侧}} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 0.1 \cdot 0.5 = 0.1\pi \text{ m}^2$,

又∵圆柱形刷子以每秒 5 周匀速滚动,

∴圆柱形刷子每秒滚过的面积为 $0.5\pi \text{ m}^2$,

因此油漆工完成任务所需的时间 $t = \frac{10\text{m}^2}{0.5\pi\text{m}^2} = \frac{20}{\pi} \approx 6.37$ 秒.

点评: 本题虽然是实际问题, 但是通过仔细分析后, 还是归为圆柱的侧面积问题. 解决此题的关键是注意到圆柱形刷子滚动一周所经过的面积就相当于把圆柱的侧面展开的面积, 即滚动一周所经过的面积等于圆柱的侧面积. 从而使问题迎刃而解.

2. (2007 山东滨州一模, 文 14) 已知三棱锥 O—ABC 中, OA、OB、OC 两两垂直, $OC=1, OA=x, OB=y$, 且 $x+y=4$, 则三棱锥体积的最大值是_____.

分析: 由题意得三棱锥的体积是 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} xy = \frac{1}{6} x(4-x) = -\frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{2}{3}$, 由于 $x > 0$, 则当 $x=2$ 时, 三棱锥的体积取最大值 $\frac{2}{3}$.

答案: $\frac{2}{3}$

例 3 有一堆规格相同的铁制 (铁的密度是 7.8 g/cm^3) 六角螺帽 (图 8) 共重 5.8 kg , 已知底面是正六边形, 边长为 12 mm , 内孔直径为 10 mm , 高为 10 mm , 问这堆螺帽大约有多少个? (π 取 3.14)

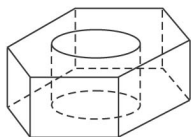


图 8

活动: 让学生讨论和交流如何转化为数学问题. 六角帽表示的几何体是一个组合体, 在一个六棱柱中间挖去一个圆柱, 因此它的体积等于六棱柱的体积减去圆柱的体积.

解: 六角螺帽的体积是六棱柱体积与圆柱体积的差, 即 $V = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 \times 6 \times 10 - 3.14 \times (\frac{10}{2})^2 \times 10 \approx 2$

$956(\text{mm}^3) = 2.956(\text{cm}^3)$.

所以螺帽的个数为 $5.8 \times 1000 \div (7.8 \times 2.956) \approx 252$ (个).

答: 这堆螺帽大约有 252 个.

点评: 本题主要考查几何体的体积公式及其应用.

变式训练

如图 9, 有个水平放置圆台形容器, 上、下底面半径分别为 2 分米, 4 分米, 高为 5 分米, 现以每秒 3 立方分米的速度往容器里面注水, 当水面的高度为 3 分米时, 求所用的时间. (精确到 0.01 秒)

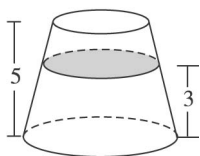


图 9

解: 如图 10, 设水面的半径为 r , 则 $EH=r-2$ 分米, $BG=2$ 分米,

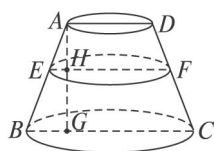


图 10

在 $\triangle ABG$ 中, $\because EH \parallel BG$,

$$\therefore \frac{AH}{AG} = \frac{EH}{BG} \therefore AH = 2 \text{ 分米},$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{r-2}{2} \therefore r = \frac{14}{5} \text{ 分米}.$$

$\therefore$ 当水面的高度为 3 分米时, 容器中水的体积为

$$V_{\text{水}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3 \left[\left(\frac{14}{5} \right)^2 + \frac{14}{5} \times 4 + 4^2 \right] = \frac{876\pi}{25} \text{ 立方分米},$$

$$\therefore \text{所用的时间为 } \frac{\frac{876\pi}{25}}{3} = \frac{292\pi}{25} \approx 36.69 \text{ 秒}.$$

答: 所用的时间为 36.69 秒.

思路 2

例 1 (2007 山东烟台高三期末统考, 理 8) 如图 11 所示, 一个空间几何体的正视图、侧视图、俯视图为全等的等腰直角三角形, 如果直角三角形的直角边长为 1, 那么这个几何体的体积为 ()

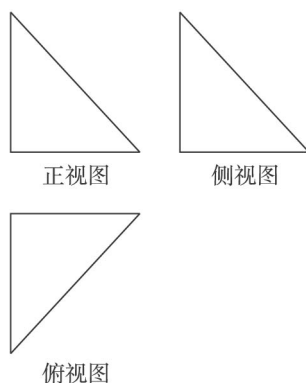


图 11

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

活动: 让学生将三视图还原为实物图, 讨论和交流该几何体的结构特征.

分析: 根据三视图, 可知该几何体是三棱锥, 图 12 所示为该三棱锥的直观图, 并且侧棱 $PA \perp AB$, $PA \perp AC$, $AB \perp AC$. 则该三棱锥的高是 PA , 底面三角形是直角三角形, 所以这个几何体的体积为

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

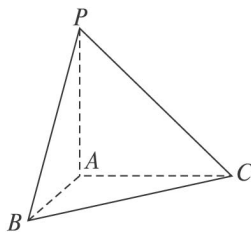


图 12

答案：D

点评：本题主要考查几何体的三视图和体积.给出几何体的三视图，求该几何体的体积或面积时，首先根据三视图确定该几何体的结构特征，再利用公式求得.此类题目成为新课标高考的热点，应引起重视.

变式训练

1. (2007 山东泰安高三期末统考，理 8) 若一个正三棱柱的三视图如图 13 所示，则这个正三棱柱的表面积为 ()

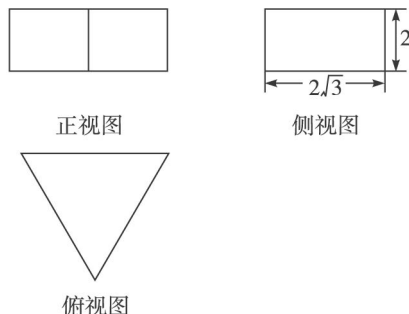


图 13

A. $18\sqrt{3}$

B. $15\sqrt{3}$

C. $24 + 8\sqrt{3}$

D. $24 + 16\sqrt{3}$

分析：该正三棱柱的直观图如图 14 所示，且底面等边三角形的高为 $2\sqrt{3}$ ，正三棱柱的高为 2，则底面等边三角形的边长为 4，所以该正三棱柱的表面积为

$$3 \times 4 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 24 + 8\sqrt{3}.$$

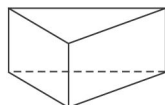


图 14

答案：C

2. (2007 山东潍坊高三期末统考，文 3) 如果一个空间几何体的正视图与侧视图均为全等的等边三角形，俯视图为一个半径为 1 的圆及其圆心，那么这个几何体的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

C. $\sqrt{3}\pi$

D. $\frac{\pi}{3}$

分析：由三视图知该几何体是圆锥，且轴截面是等边三角形，其边长等于底面直径 2，则圆锥的高是

轴截面等边三角形的高为 $\sqrt{3}$ ，所以这个几何体的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

答案：A

3. (2007 广东高考，文 17) 已知某几何体的俯视图是如图 15 所示的矩形，正视图（或称主视图）是一个底边长为 8、高为 4 的等腰三角形，侧视图（或称左视图）是一个底边长为 6、高为 4 的等腰三角形.

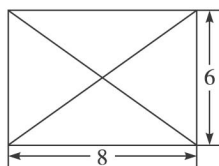


图 15

(1) 求该几何体的体积 V ;

(2) 求该几何体的侧面积 S .

解：由三视图可知该几何体是一个底面边长分别为 6、8 的矩形，高为 4 的四棱锥.设底面矩形为 $ABCD$.如图 16 所示， $AB=8$ ， $BC=6$ ，高 $VO=4$.

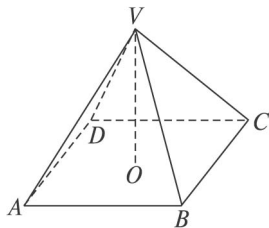


图 16

$$(1) V = \frac{1}{3} \times (8 \times 6) \times 4 = 64.$$

(2) 设四棱锥侧面 VAD 、 VBC 是全等的等腰三角形，侧面 VAB 、 VCD 也是全等的等腰三角形，

$$\text{在 } \triangle VBC \text{ 中, } BC \text{ 边上的高为 } h_1 = \sqrt{VO^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{在 } \triangle VAB \text{ 中, } AB \text{ 边上的高为 } h_2 = \sqrt{VO^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 5.$$

$$\text{所以此几何体的侧面积 } S = 2\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 8 \times 5\right) = 40 + 24\sqrt{2}.$$

点评：高考试题中对面积和体积的考查有三种方式，一是给出三视图，求其面积或体积；二是与的组合体有关的面积和体积的计算；三是在解答题中，作为最后一问.

例 2 图 17 所示的几何体是一棱长为 4 cm 的正方体，若在它的各个面的中心位置上，各打一个直径为 2 cm、深为 1 cm 的圆柱形的孔，求打孔后几何体的表面积是多少？（ π 取 3.14）

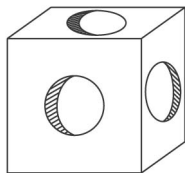


图 17

活动：因为正方体的棱长为 4 cm，而孔深只有 1 cm，所以正方体没有被打透.这样一来打孔后所得几何体的表面积，等于原来正方体的表面积，再加上六个完全一样的圆柱的侧面积，这六个圆柱的高为 1 cm，底面圆的半径为 1 cm.

解：正方体的表面积为 $16 \times 6 = 96$ (cm^2),
一个圆柱的侧面积为 $2\pi \times 1 \times 1 = 6.28$ (cm^2),
则打孔后几何体的表面积为 $96 + 6.28 \times 6 = 133.68$ (cm^2).

答：几何体的表面积为 133.68 cm^2 .

点评：本题主要考查正方体、圆柱的表面积.求几何体的表面积问题，通常将所给几何体分成基本的柱、锥、台，再通过这些基本柱、锥、台的表面积，进行求和或作差，从而获得几何体的表面积.本题中将几何体的表面积表达为正方体的表面积与六个圆柱侧面积的和是非常有创意的想法，如果忽略正方体没有被打透这一点，思考就会变得复杂，当然结果也会是错误的.

变式训练

图 18 所示是由 18 个边长为 1 cm 的小正方体拼成的几何体，求此几何体的表面积.

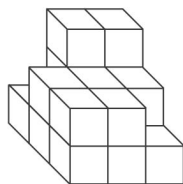


图 18

分析：从图 18 中可以看出，18 个小正方体一共摆了三层，第一层 2 个，第二层 7 个，因为 $18-7-2=9$ ，所以第三层摆了 9 个.另外，上、下两个面的表面积是相同的，同样，前、后、左、右两个面的表面积也是分别相同的.

解：因为小正方体的棱长是 1 cm，所以上面的表面积为 $1^2 \times 9 = 9$ (cm²)，前面的表面积为 $1^2 \times 8 = 8$ (cm²)，左面的表面积为 $1^2 \times 7 = 7$ (cm²)，则此几何体的表面积为 $9 \times 2 + 8 \times 2 + 7 \times 2 = 48$ (cm²).

答：此几何体的表面积为 48 cm².

(四) 知能训练

1. 正方体的表面积是 96，则正方体的体积是 ()

- A. $48\sqrt{6}$ B. 64 C. 16 D. 96

分析：设正方体的棱长为 a，则 $6a^2 = 96$ ，解得 $a = 4$ ，则正方体的体积是 $a^3 = 64$.

答案：B

2. (2007 山东临沂高三期末统考，文 2) 如图 19 所示，圆锥的底面半径为 1，高为 $\sqrt{3}$ ，则圆锥的表面积为 ()

- A. π B. 2π C. 3π D. 4π

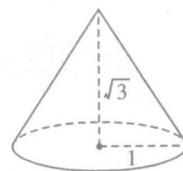


图 19

分析：设圆锥的母线长为 l，则 $l = \sqrt{3 + 1} = 2$ ，所以圆锥的表面积为 $S = \pi \times 1 \times (1 + 2) = 3\pi$.

答案：C

3. 正三棱锥的底面边长为 3，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则这个正三棱锥的体积是 ()

- A. $\frac{27}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

分析：可得正三棱锥的高 $h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$ ，于是 $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

答案：D

4. 若圆柱的高扩大为原来的 4 倍，底面半径不变，则圆柱的体积扩大为原来的_____倍；若圆柱的高不变，底面半径扩大为原来的 4 倍，则圆柱的体积扩大为原来的_____倍.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/037165056164006150>