§2.6　函数的持续性

一、变量的变化量

二、持续函数的概念

三、函数的间断点

四、持续函数的性质

五、闭区间上持续函数的性质

什么是持续函数?

直观感受: 图象上的点都连在一起的函数叫作持续函数.

直观描述: 当自变量越来越靠近时, 其函数值也越来越靠近的函数就是持续函数.

定性描述 $: \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,$

当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

可惜的是, 上面这种定性描述的规定过强了些, 能够举出直观上持续的函数, 但不满足上面的规定.

一、变量的变化量

变量u从初值u_0变到终值u_1，终值u_1与初值u_0之差u_1-u_0称为变量u的改变量(或增量).记作$\Delta u=u_1-u_0$.

设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，$\forall x\in U_\delta(x_0)$，$\Delta x=x-x_0$，称为自变量$x$在点$x_0$的改变量

相应地，$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$称为函数$f(x)$的改变量

例1 设$f(x)=x^2$,当自变量从x_0变化到$x_0+\Delta x$时,函数的改变量为

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \\
&= (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 \\
&= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2
\end{aligned}
$$

当$x_0=2, \Delta x=0.2$，即自变量从2变化到2.2时

$$\Delta y = 2\cdot 2\cdot 0.2 + 0.2^2 = 0.84$$

当$x_0=2, \Delta x=-0.2$，即自变量从2变化到1.8时

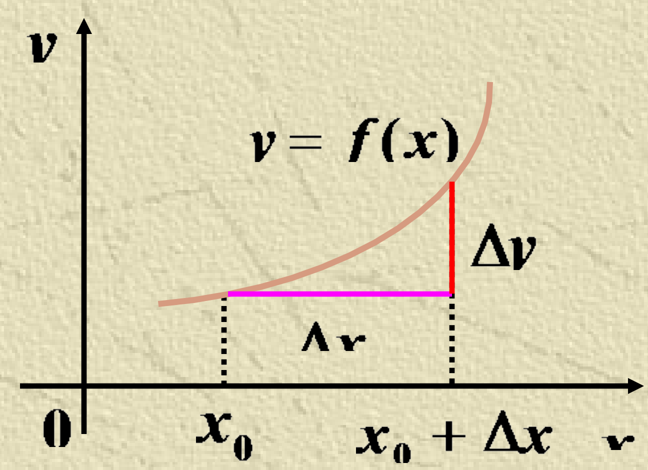
$$\Delta y = 2\cdot 2\cdot(-0.2) + (-0.2)^2 = -0.76$$

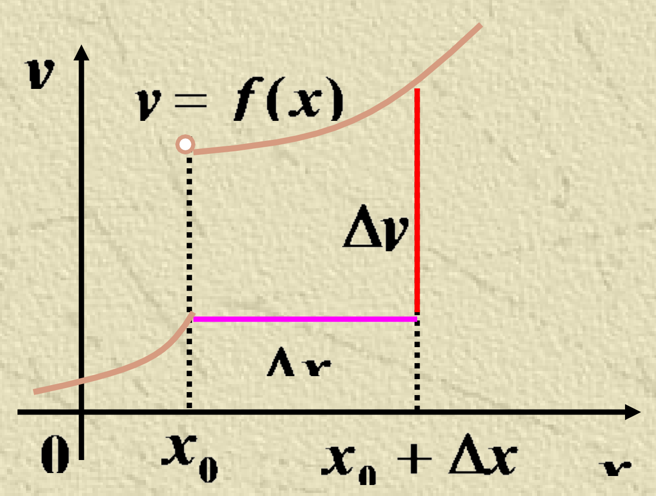
二、持续函数的概念

定义1　设函数[redacted]在点[redacted]的某领域内有定义, 如果当自变量的改变量[redacted]趋向于零时, 对应的函数的改变量[redacted]也趋向于零, 即

[redacted]

则称函数[redacted]在点[redacted]处连续, 称[redacted]为[redacted]的连续点.





上页　下页　返回

例2　证明函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内任一点连续

证　任取$x_0\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})$$

$$\because\left|\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,\text{故}\ |\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|,$$

$\therefore$ 当$\Delta x\to 0$时, $\Delta y\to 0$.

即函数$y=\sin x$对任意$x_0\in(-\infty,+\infty)$都是连续的

同理,函数$y=\cos x$在区间$(-\infty,+\infty)$内任一点连续

令$x = x_0 + \Delta x, \Delta x \to 0$时，$x \to x_0$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

定义2 设函数$f(x)$在点x_0的某领域内有定义, 如果函数$f(x)$在点x_0处满足

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数$f(x)$在点x_0连续.

例3 试证函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续

证 Q $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又$f(0)=0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

则函数$f(x)$在$x=0$处连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在点x_0处右连续.

函数$f(x)$在x_0处连续

$\Leftrightarrow$是函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续

例4 讨论函数$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在$x=0$处的连续性

解 $\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在

故函数$f(x)$在点$x=0$处不连续

持续函数的定义

如果函数在开区间(a, b)内每一点都持续, 则称函数在在开区间(a, b)内持续.

如果函数在开区间(a,b)内连续，并且在左端点$x=a$处右连续，在右端点$x=b$处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续

持续函数的图形是一条持续而不间断的曲线.

三、函数的间断点

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足的三条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足,则称点x_0为$f(x)$的间断点.

若x_0时函数的间断点且函数在点x_0处的左、右极限都存在，称x_0为$f(x)$的第一类间断点. 除此以外的间断点称为第二类间断点.

第一类间断点又分为可去间断点和跳跃间断点.

如果$f(x)$在点x_0处的极限存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或$f(x)$在点$x_0$处无定义则称点$x_0$为函数$f(x)$的可去间断点.

如果$f(x)$在点x_0处左, 右极限都存在, 但$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 则称点x_0为函数$f(x)$的跳跃间断点.

第二类间断点又分为无穷型间断点和非无穷型第二类间断点.

如果$f(x)$在点x_0处的左右极限中至少有一个为∞，则称x_0为无穷型间断点

除此以外的第二类间断点称为非无穷型第二类间断点.

上页 下页 返回