勾股定理的逆定理-重难点题型

【知识点 1　勾股定理的逆定理】

如果三角形的三边长 a，b，c 满足$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形．

【题型 1　直角三角形判别的条件】

【例 1】（蜀山区校级期中）下列条件中，不能判定 ABC 为直角三角形的是（　　）

A．a：b：c＝5：12：13

B．∠A：∠B：∠C＝2：3：5

C．a＝$9k$，b＝$40k$，c＝$41k$（k＞0）

D．$a=3^2$，$b=4^2$，$c=5^2$

【变式 1-1】（庐阳区校级期中）△ABC 的三边为 a，b，c 且（a+b）（a－b）＝c^2，则该三角形是（　　）

A．锐角三角形

B．以 c 为斜边的直角三角形

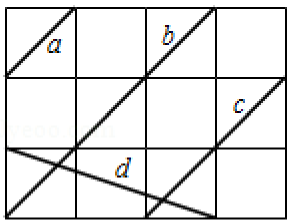
C．以 b 为斜边的直角三角形

D．以 a 为斜边的直角三角形

【变式 1-2】（天宁区校级期中）△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边分别是 a、b、c，下列条件中能判定是直角三角形的是____．（填写序号）

（1）a：b：c＝5：12：13，（2）a＝1.5，b＝2.5，c＝2，（3）$(a-b)^2+2ab=c^2$，（4）∠A：∠B：∠C＝3：4：5，（5）$a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$（n 为大于 1 的正整数）

【变式 1-3】（汉阳区校级期中）如图，在单位为 1 的正方形网格图中有 a，b，c，d 四条线段，从中任取三条线段所构成的三角形中恰好是直角三角形的个数为（　　）



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【知识点 2　勾股数】

满足$a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数，称为勾股数．

①三个数必须是正整数，例如：2.5、6、6.5 满足$a^2+b^2=c^2$，但是它们不是正整数，所以它们不是够勾股数．

②一组勾股数扩大相同的整数倍得到三个数仍是一组勾股数．

【题型 2　勾股数】

【例 2】（岐山县期中）下列四组数中，是勾股数的是（　　）

A．0.3，0.4，0.5　　　　B．3^2，4^2，5^2

C．30，40，50　　　　D．$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$

【变式 2-1】（武昌区期中）在学习“勾股数”的知识时，爱动脑的小明发现了一组有规律的勾股数，并将它们记录在如下的表格中．则当 $a=24$ 时，$b+c$ 的值为（　　）

a	6	8	10	12	14	…
b	8	15	24	35	48	…
c	10	17	26	37	50	…

A．250　　B．288　　C．300　　D．574

【变式 2-2】（肥乡区月考）我们学习了勾股定理后，都知道“勾三、股四、弦五”．

观察：3、4、5；5、12、13；7、24、25；9、40、41；…，发现这些勾股数的勾都是奇数，且从 3 起就没有间断过．

（1）请你根据上述的规律写出下一组勾股数：_________；

（2）若第一个数用字母 n（n 为奇数，且 $n\geqslant 3$）表示，那么后两个数用含 n 的代数式分别表示为和____．

【变式 2-3】（蕉城区期中）满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数，称为勾股数．

（1）请把下列三组勾股数补充完整：

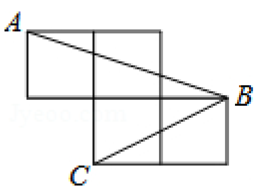
①____，8，10　　②5，____，13　　③8，15，____．

（2）小敏发现，很多已经约去公因数的勾股数组中，都有一个数是偶数，如果将它写成 $2mn$，那么另外两个数可以写成 m^2+n^2，m^2-n^2，如 $4=2\times2\times1$，$5=2^2+1^2$，$3=2^2-1^2$．请你帮小敏证明这三个数 $2mn$，m^2+n^2，m^2-n^2 是勾股数组．

（3）如果 21，72，75 是满足上述小敏发现的规律的勾股数组，求 $m+n$ 的值．

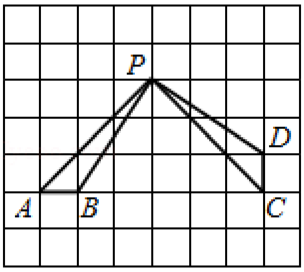
【题型 3　格点图中求角度】

【例 3】（南关区校级期末）如图，每个小正方形的边长为 1，则∠ABC 的度数为__45__°．

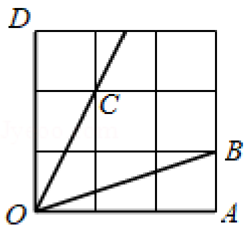


【变式 3-1】（朝阳区期末）如图所示的正方形网格中，A，B，C，D，P 是网格线交点．若∠$APB=\alpha$

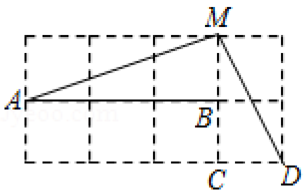
，则∠BPC的度数为_________（用含 α 的式子表示）．



【变式 3-2】（海淀区校级月考）如图，正方形网格中，点 A，B，C，D 均在格点上，则∠AOB+∠COD=______°．

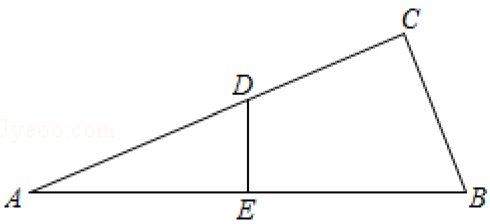


【变式 3-3】（海淀区校级期中）如图所示的是正方形网格，则∠MDC﹣∠MAB=______°（点 A，B，C，D，M．网格线交点）．

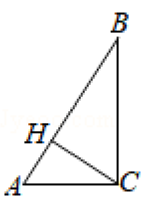


【题型 4　勾股定理及逆定理的应用（求线段长度）】

【例 4】（淮安期末）如图，△ABC 中，AB 的垂直平分线 DE 分别交 AC、AB 于点 D、E，且 AD^2﹣DC^2=BC^2，AC=16，CD：AD=3：5，求 BC 的长．

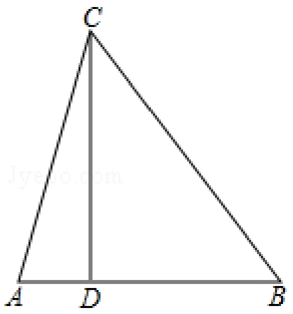


【变式 4-1】（江岸区校级月考）已知 Rt△ABC 中，∠C=90°，AH=3，CH=4，AC=5，求 BH 的长．

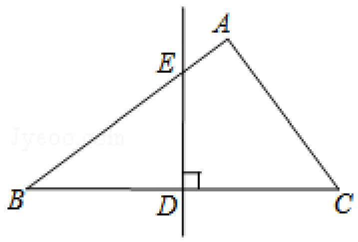


【变式 4-2】（沙县期末）如图，在△ABC 中，AB=AC，BC=15，D 是 AB 上一点，BD=9，CD=12，

求 AC 长．

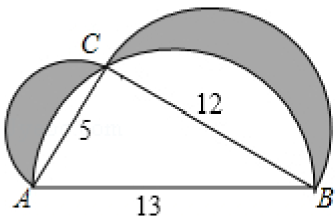


【变式 4-3】（莲湖区期中）如图，在△ABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，DE 是 BC 的垂直平分线，交 BC 于点 D，AB 于点 E，求 DE 的长．



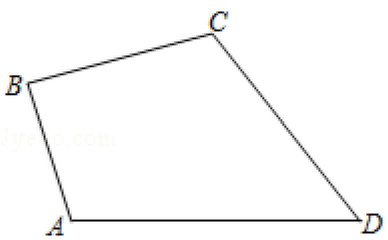
【题型 5　勾股定理及逆定理的应用（求面积）】

【例 5】（槐荫区校级月考）如图△ABC 的三边长为 5，12，13，分别以三边为直径向上作三个半圆，则阴影部分的面积为（　　）

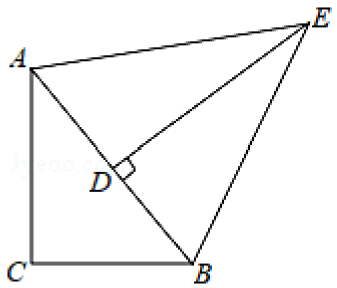


A．30　　　　B．24　　　　C．60　　　　D．$\frac{60}{13}$

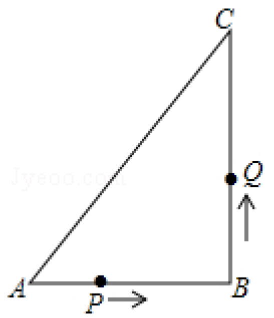
【变式 5-1】（东城区校级期中）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$CD=5$，$AD=6$，$AB\perp BC$，求四边形 $ABCD$ 的面积．



【变式 5-2】（陕西期末）已知，如图在△ABC 中，$BC=6$，$AC=8$，$DE\perp AB$，$DE=7$，△ABE 的面积为 35，求△ACB 的面积．



【变式 5-3】（卫辉市期末）如图所示，在△*ABC* 中，*AB*：*BC*：*CA*＝3：4：5，且周长为 36*cm*，点 *P* 从点 *A* 开始沿边向 *B* 点以每秒 1*cm* 的速度移动；点 *Q* 从点 *B* 沿 *BC* 边向点 *C* 以每秒 2*cm* 的速度移动，如果同时出发，问过 3 秒时，△*BPQ* 的面积为多少？

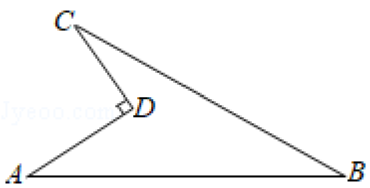


【题型 6　勾股定理及逆定理的实际应用】

【例 6】（兰州期末）为了绿化环境，我县某中学有一块四边形的空地 *ABCD*，如图所示，学校计划在空地上种植草皮，经测量，∠*ADC*＝90°，*CD*＝3 米，*AD*＝4 米，*AB*＝13 米，*BC*＝12 米．

（1）求出空地 *ABCD* 的面积．

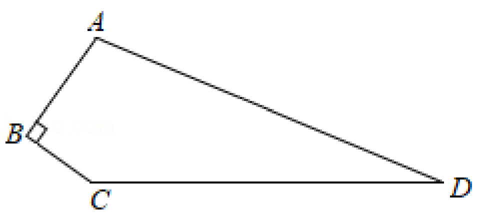
（2）若每种植 1 平方米草皮需要 200 元，问总共需投入多少元？



【变式 6-1】（茅箭区校级期末）某中学有一块四边形的空地 *ABCD*，如图所示，学校计划在空地上种植草皮，经测量，∠*ABC*＝90°，*BC*＝6*m*，*AB*＝8*m*，*AD*＝26*m*，*CD*＝24*m*．

（1）求出空地 *ABCD* 的面积．

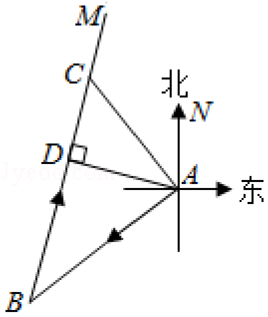
（2）若每种植 1 平方米草皮需要 100 元，问总共需投入多少元？



【变式 6-2】（东台市期末）一艘轮船从 *A* 港向南偏西 48°方向航行 100*km* 到达 *B* 岛，再从 *B* 岛沿 *BM* 方向航行 125*km* 到达 *C* 岛，*A* 港到航线 *BM* 的最短距离是 60*km*．

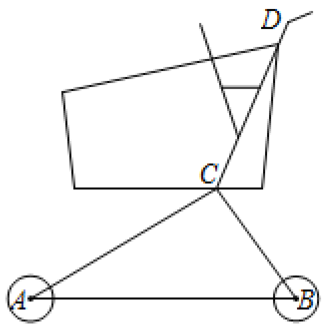
（1）若轮船速度为25km/小时，求轮船从C岛沿CA返回A港所需的时间．

（2）C岛在A港的什么方向？



【变式6-3】（叶县期末）如图（1）是超市的儿童玩具购物车，图（2）为其侧面简化示意图，测得支架AC＝24cm，CB＝18cm，两轮中心的距离AB＝30cm，求点C到AB的距离．（结果保留整数）

图(1)



图(2)

勾股定理的逆定理-重难点题型（解析版）

【知识点 1　勾股定理的逆定理】

如果三角形的三边长 a，b，c 满足$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形．

【题型 1　直角三角形判别的条件】

【例 1】（蜀山区校级期中）下列条件中，不能判定 ABC 为直角三角形的是（　　）

A．a：b：c＝5：12：13

B．$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝2：3：5

C．a＝$9k$，b＝$40k$，c＝$41k$（k＞0）

D．a＝3^2，b＝4^2，c＝5^2

【分析】利用直角三角形的定义和勾股定理的逆定理逐项判断即可．

【解答】解：A、因为 a：b：c＝5：12：13，设 a＝$5x$，b＝$12x$，c＝$13x$，（$5x$）^{2}+（$12x$）^{2}＝（$13x$）^{2}，故△ABC 是直角三角形；

B、$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝2：3：5，且$\angle A$+$\angle B$+$\angle C$＝180°，所以$\angle C$＝180°$\times\frac{5}{2+3+5}=90$°，故△ABC 是直角三角形；

C、因为（$9k$）^{2}＝（$41k$）^{2} -（$40k$）^{2}，故△ABC 是直角三角形；

D、因为（3^2）^{2}＝（5^2）^{2} -（4^2）^{2}，故△ABC 不是直角三角形．

故选：D．

【点评】本题考查了勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形．也考查了三角形内角和定理．

【变式 1-1】（庐阳区校级期中）△ABC 的三边为 a，b，c 且（a+b）（a - b）＝c^2，则该三角形是（　　）

A．锐角三角形

B．以 c 为斜边的直角三角形

C．以 b 为斜边的直角三角形

D．以 a 为斜边的直角三角形

【分析】由题意可知：$c^2+b^2=a^2$，此三角形三边关系符合勾股定理的逆定理．

【解答】解：由题意，$a^2-b^2=c^2$，

∴$b^2+c^2=a^2$，

此三角形三边关系符合勾股定理的逆定理，

所以此三角形是以 a 为斜边的直角三角形．

故选：D．

【点评】考查了勾股定理的逆定理，解答此题要用到勾股定理的逆定理：已知三角形 ABC 的三边满足 $a^2+b^2=c^2$，则三角形 ABC 是直角三角形．

【变式 1-2】（天宁区校级期中）△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边分别是 a、b、c，下列条件中能判定是直角三角形的是____．（填写序号）

（1）a：b：c＝5：12：13，（2）a＝1.5，b＝2.5，c＝2，（3）$(a-b)^2+2ab=c^2$，（4）∠A：∠B：∠C＝3：4：5，（5）$a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$（n 为大于 1 的正整数）

【分析】直角三角形的判定方法，大约有以下几种：

①勾股定理的逆定理，即三角形三边符合勾股定理；

②三个内角中有一个是直角，或两个内角的度数和等于第三个内角的度数；根

据两种情况进行判断即可．

【解答】解：（1）$(5x)^2+(12x)^2=(13x)^2$，符合勾股定理的逆定理，能够判断△ABC 是直角三角形，符合题意；

（2）$(1.5)^2+(2)^2=(2.5)^2$，符合勾股定理的逆定理，能够判断△ABC 是直角三角形，符合题意；

（3）由 $(a-b)^2+2ab=c^2$，可得：$a^2+b^2=c^2$，符合勾股定理的逆定理，能够判断△ABC 是直角三角形，符合题意；

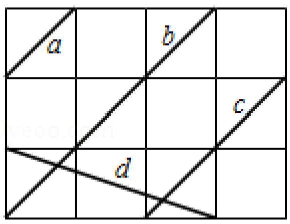
（4）∠A：∠B：∠C＝3：4：5，此时∠C＝75°，不能够判断△ABC 是直角三角形，不符合题意；

（5）$(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$，符合勾股定理的逆定理，能够判断△$ABC$ 是直角三角形，符合题意；

故答案为：（1）（2）（3）（5）．

【点评】此题主要考查了直角三角形的判定方法，只有三角形的三边长构成勾股数或三内角中有一个是直角的情况下，才能判定三角形是直角三角形．

【变式 1-3】（汉阳区校级期中）如图，在单位为 1 的正方形网格图中有 a，b，c，d 四条线段，从中任取三条线段所构成的三角形中恰好是直角三角形的个数为（　　）



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【分析】根据图形和勾股定理可以求得 a，b，c，d 四条线段的长，然后根据勾股定理的逆定理，即可得到构成直角三角形的个数．

【解答】解：由图可得，

线段 a，b，c，d 的长度分别为：$\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，

∵（$\sqrt{2}$）^{2}+（$2\sqrt{2}$）^{2}=（$\sqrt{10}$）^{2}，（$\sqrt{10}$）^{2}+（$2\sqrt{2}$）^{2}=（$3\sqrt{2}$）^{2}，

∴从 a，b，c，d 四条线段中任取三条线段所构成的三角形中恰好是直角三角形的个数为 2，

故选：B.

【点评】本题考查勾股定理的逆定理、勾股定理，解答本题的关键是明确题意，利用勾股定理和勾股定理的逆定理解答.

【知识点 2　勾股数】

满足$a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数，称为勾股数.

①三个数必须是正整数，例如：2.5、6、6.5 满足$a^2+b^2=c^2$，但是它们不是正整数，所以它们不是够勾股数.

②一组勾股数扩大相同的整数倍得到三个数仍是一组勾股数.

【题型 2　勾股数】

【例 2】（岐山县期中）下列四组数中，是勾股数的是（　　）

A．0.3，0.4，0.5　　　　B．3^2，4^2，5^2

C．30，40，50　　　　D．$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$

【分析】根据勾股数的定义逐一计算即可得出答案.

【解答】解：A．0.3，0.4，0.5 不是整数，不是勾股数；

B．（3^2）^{2}+（4^2）^{2}=337≠（5^2）^{2}，∴3^2，4^2，5^2 不是勾股数；

C．∵30^2+40^2=2500=50^2，∴30、40、50 是勾股数；

D．$(\frac{1}{3})^2$+（$\frac{1}{4}$）^{2}≠（$\frac{1}{5}$）^{2} 且$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$均不是整数，∴$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$不是勾股数；

故选：C.

【点评】本题考查了勾股数，能熟记勾股数的意义是解此题的关键.

【变式 2-1】（武昌区期中）在学习“勾股数”的知识时，爱动脑的小明发现了一组有规律的勾股数，并将它们记录在如下的表格中．则当 a=24 时，$b+c$ 的值为（　　）

a	6	8	10	12	14	…
b	8	15	24	35	48	…
c	10	17	26	37	50	…

A．250　　　　B．288　　　　C．300　　　　D．574

【分析】先根据表中的数据得出规律，根据规律求出 b、c 的值，再求出答案即可．

【解答】解：从表中可知：a 依次为 6，8，10，12，14，16，18，20，22，24，•••，即 24＝2×（10+2），

b 依次为 8，15，24，35，48，•••，即当 a＝24 时，b＝12^2-1＝143，

c 依次为 10，17，26，37，50，•••，即当 a＝24 时，c＝12^2+1＝145，

所以当 a＝24 时，$b+c$＝143+145＝288，

故选：B．

【点评】本题考查了勾股数，能根据表中数据得出 $c=(n+2)^2-1$，$c=(n+2)^2+1$ 是解此题的关键．

【变式 2-2】（肥乡区月考）我们学习了勾股定理后，都知道“勾三、股四、弦五”．

观察：3、4、5；5、12、13；7、24、25；9、40、41；…，发现这些勾股数的勾都是奇数，且从 3 起就没有间断过．

（1）请你根据上述的规律写出下一组勾股数：__________；

（2）若第一个数用字母 n（n 为奇数，且 $n\geqslant3$）表示，那么后两个数用含 n 的代数式分别表示为和____．

【分析】（1）分析所给四组的勾股数：3、4、5；5、12、13；7、24、25；9、40、41；可得下一组勾股数：11，60，61；

（2）根据所提供的例子发现股是勾的平方减去 1 的二分之一，弦是勾的平方加 1 的二分之一．

【解答】解：（1）11，60，61；

故答案为：11，60，61．

（2）后两个数表示为$\frac{n^2-1}{2}$和$\frac{n^2+1}{2}$，

$\because n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=n^2+\frac{n^4-2n^2+1}{4}=\frac{n^4+2n^2+1}{4}$，$\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^2+1}{4}$，

$\therefore n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$．

又$\because n\geqslant3$，且 n 为奇数，

$\therefore$由 n，$\frac{n^2-1}{2}$，$\frac{n^2+1}{2}$三个数组成的数是勾股数．

故答案为：$\frac{n^2-1}{2}$，$\frac{n^2+1}{2}$．

【点评】本题属规律性题目，考查的是勾股数之间的关系，根据题目中所给的勾股数及关系式进行猜想、证明即可．

【变式 2-3】（蕉城区期中）满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数，称为勾股数．