

2024 届广东省高三毕业班综合能力测试(华娇教育摸底测试)

数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x \geq 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | 1 < x < 4\}$

B. $\{x | x > 0\}$

C. $\{2, 3\}$

D. $\{1, 2, 3\}$

2. 若 $(1+i)z = 2$, 则 $z =$ ()

A. $1+i$

B. $1-i$

C. $-1+i$

D. $-1-i$

3. 已知 α 为锐角, 且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{4}) =$ ()

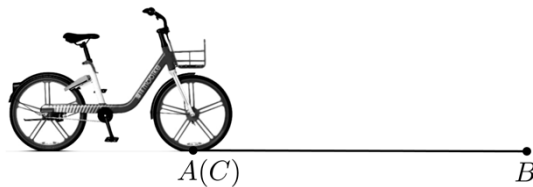
A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 为解决皮尺长度不够的问题, 实验小组利用自行车来测量 A, B 两点之间的直线距离. 如下图, 先将自行车前轮置于点 A , 前轮上与点 A 接触的地方标记为点 C , 然后推着自行车沿 AB 直线前进 (车身始终保持与地面垂直), 直到前轮与点 B 接触. 经观测, 在前进过程中, 前轮上的标记点 C 与地面接触了 10 次, 当前轮与点 B 接触时, 标记点 C 在前轮的左上方 (以下图为观察视角), 且到地面的垂直高度为 0.45m . 已知前轮的半径为 0.3m , 则 A, B 两点之间的距离约为 () (参考数值: $\pi \approx 3.14$)



A. 20.10m

B. 19.94m

C. 19.63m

D. 19.47m

5. 对某地区某次数学考试成绩的数据进行分析, 甲学校成绩 $X \sim N(88, 4^2)$, 乙学校成绩 $Y \sim N(86, 2^2)$, 丙学校成绩 $Z \sim N(85, 5^2)$, 丁学校成绩 $M \sim N(83, 3^2)$. 80 分以上为优秀分, 则优秀率最高的学校是 ()

(附: $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$,

$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$)

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

6. 若数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 且对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$,

则称数列 $\{a_n\}$ 具有“P 性质”, 则 ()

A. 数列 $a_n = 3n - 2$ 具有“P 性质”

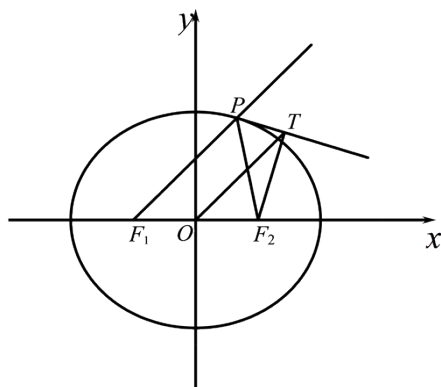
B. 数列 $a_n = 2^{n-1}$ 具有“P 性质”

C. 具有“P 性质”的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n(n+1)}{2}$

D. 具有“P 性质”的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $3^n - 1$

7. 如图, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, P 为椭圆上的点, PT 为 $\triangle F_1PF_2$

的外角平分线, $F_2T \perp PT$, 则 $|OT| =$ ()



A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. 4

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ x + \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = x + b$ 有 3 个不同的实根, 则 b 的取值范围

为 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 0)$

C. $(0, 1)$

D. $(1, +\infty)$

二、多选题

9. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 是偶函数, 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单

位长度, 再将图象上各点的横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到 $y = g(x)$ 的图

象. 若曲线 $y = g(x)$ 的两个相邻对称中心之间的距离为 2π , 则 ()

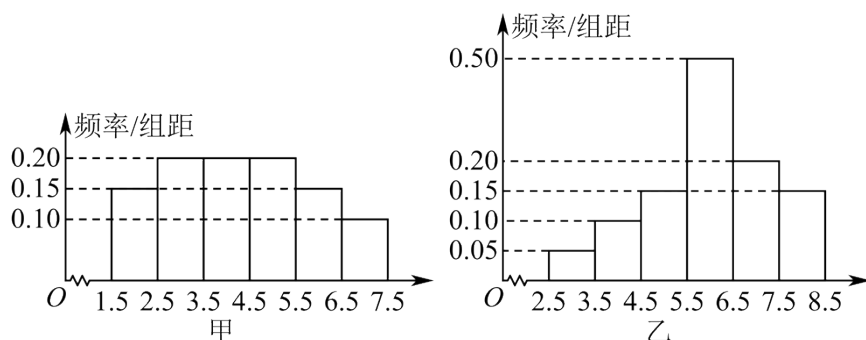
A. $\omega = 2$

B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称

C. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 对称

D. 若 $f(\pi) = -2$, 则 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值为 $\sqrt{3}$

10. 下图是样本甲与样本乙的频率分布直方图, 下列说法判断正确的是 ()



- A. 样本乙的极差一定大于样本甲的极差
- B. 样本乙的众数一定大于样本甲的众数
- C. 样本甲的方差一定大于样本乙的方差
- D. 样本甲的中位数一定小于样本乙的中位数

11. 已知直线 l_1 是曲线 $f(x) = \ln x$ 上任一点 $A(x_1, y_1)$ 处的切线, 直线 l_2 是曲线 $g(x) = e^x$

上点 $B(y_1, x_1)$ 处的切线, 则下列结论中正确的是 ()

- A. 当 $x_1 + y_1 = 1$ 时, $l_1 \perp l_2$
- B. 存在 x_1 , 使得 $l_1 \perp l_2$
- C. 若 l_1 与 l_2 交于点 C 时, 且三角形 ABC 为等边三角形, 则 $x_1 = 2 + \sqrt{3}$
- D. 若 l_1 与曲线 $g(x)$ 相切, 切点为 $C(x_2, y_2)$, 则 $x_1 y_2 = 1$

三、填空题

12. 若 $f(x) = 1 + \frac{a}{3^x + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 则实数 $a =$ _____.

13. 已知直线 $l: (m+2)x - (m+1)y - 1 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 点 M 为 C 左支上的一点, 过 F_2 作与 x 轴垂直的直线 l , 若 M 到 l 的距离 d 满足 $|MF_2| = \frac{3}{2}d$, 则 C 的离心率 e 的取值范围为_____.

四、解答题

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -\frac{1}{2}n^2 + kn$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 且 S_n 的最大值为 $\frac{9}{2}$.

(1) 确定常数 k , 并求 a_n ;

(2) 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 15 项和 T_{15} .

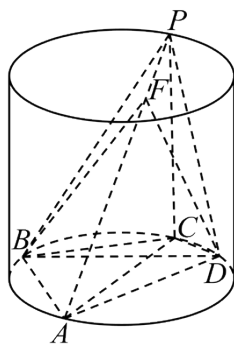
16. 某商场举办摸球赢购物券活动. 现有完全相同的甲、乙两个小盒, 每盒中有除颜色外形状和大小完全相同的 10 个小球, 其中甲盒中有 8 个黑球和 2 个白球, 乙盒中有 3 个黑球和 7 个白球. 参加活动者首次摸球, 可从这两个盒子中随机选择一个盒子, 再从选中的盒子中随机摸出一个球, 若摸出黑球, 则结束摸球, 得 300 元购物券; 若摸出的是白球, 则将摸出的白球放回原来盒子中, 再进行第二次摸球. 第二次摸球有如下两种方案: 方案一, 从原来盒子中随机摸出一个球; 方案二, 从另外一个盒子中随机摸出一个球. 若第二次摸出黑球, 则结束摸球, 得 200 元购物券; 若摸出的是白球, 也结束摸球, 得 100 元购物券. 用 X 表示一位参加活动者所得购物券的金额.

(1) 在第一次摸出白球的条件下, 求选中的盒子为甲盒的概率.

(2) ①在第一次摸出白球的条件下, 通过计算, 说明选择哪个方案第二次摸到黑球的概率更大;

②依据以上分析, 求随机变量 X 的数学期望的最大值.

17. 如图, $ABCD$ 为圆柱底面的内接四边形, AC 为底面圆的直径, PC 为圆柱的母线, 且 $AB = AD$.



(1) 求证: $AP \perp BD$;

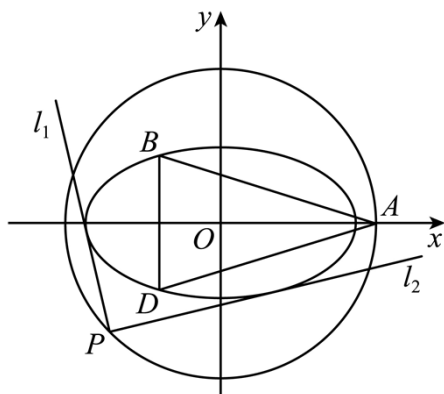
(2) 若 $PC = AC = 2BC = 4$, 点 F 在线段 PA 上, 且 $\frac{PF}{FA} = \frac{1}{3}$, 求四面体 $PBDF$ 的体积.

18. 设函数 $f(x) = (x-1)e^{x-1} + \frac{a}{2}x^2$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a \geq -e$, 讨论函数 $f(x)$ 的零点的个数.

19. 法国数学家加斯帕尔·蒙日是 19 世纪著名的几何学家，他创立了画法几何学，推动了空间解析几何学的独立发展，奠定了空间微分几何学的宽厚基础，根据他的研究成果，我们定义：给定椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，则称圆心在原点 O ，半径是 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆为“椭圆 C 的伴随圆”，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$ ，其短轴的一个端点到焦点 F 的距离为 $\sqrt{3}$ 。



- (1) 若点 A 为椭圆 C 的“伴随圆”与 x 轴正半轴的交点， B, D 是椭圆 C 的两相异点，且 $BD \perp x$ 轴，求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的取值范围。
- (2) 在椭圆 C 的“伴随圆”上任取一点 P ，过点 P 作直线 l_1, l_2 ，使得 l_1, l_2 与椭圆 C 都只有一个交点，试判断 l_1, l_2 是否垂直？并说明理由。

参考答案:

1. C

【分析】利用集合的交集运算求解.

【详解】解: 因为集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 4\}$,

所以 $A \cap B = \{2, 3\}$,

故选: C

2. B

【分析】由复数除法运算直接求解即可.

【详解】由题意得: $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$.

故选: B.

3. C

【分析】先由平方关系计算出 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 再由诱导公式得出答案.

【详解】由 α 为锐角得 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{4}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选: C.

4. D

【分析】由题意, 前轮转动了 $(10 + \frac{1}{3})$ 圈, 根据圆的周长公式即可求解.

【详解】解: 由题意, 前轮转动了 $(10 + \frac{1}{3})$ 圈,

所以 A, B 两点之间的距离约为 $(10 + \frac{1}{3}) \times 2\pi \times 0.3 = 6.2\pi \approx 6.2 \times 3.14 \approx 19.47\text{m}$,

故选: D.

5. B

【分析】根据正态分布的性质求出概率, 即可判断.

【详解】解: 依题意 $P(X > 80) = P(X > \mu - 2\sigma) = \frac{1}{2}(1 - 0.9545) + 0.9545 = 0.97725$,

$P(Y > 80) = P(Y > \mu - 3\sigma) = \frac{1}{2}(1 - 0.9973) + 0.9973 = 0.99865$,

$P(Z > 80) = P(Z > \mu - \sigma) = \frac{1}{2}(1 - 0.6827) + 0.6827 = 0.84135$,

$$P(M > 80) = P(M > \mu - \sigma) = \frac{1}{2}(1 - 0.6827) + 0.6827 = 0.84135,$$

所以乙学校的优秀率最高.

故选: B

6. C

【分析】令 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$, 则 $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = S_n^2$, 令 $n=1$, 求得数列的首项, 令 $n=2$, 可得 a_2 , 将 n 换为 $n-1$, 两式相减, 结合数列的递推式, 再将 n 换为 $n-1$, 两式相减, 结合等差数列的定义, 即可求出数列的通项公式, 再根据等差数列求和公式计算可得;

【详解】解: 由题意可得 $a_n > 0$, 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$,

令 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$, 即 $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = S_n^2$,

当 $n=1$ 时, $a_1^3 = S_1^2 = a_1^2$, 解得 $a_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3 = S_{n-1}^2$,

两式相减可得 $a_n^3 = S_n^2 - S_{n-1}^2 = (S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = a_n(S_n + S_{n-1})$,

即为 $a_n^2 = S_n + S_{n-1}$, 可得 $a_{n-1}^2 = S_{n-1} + S_{n-2}$, $n \geq 3$,

两式相减可得 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = S_n - S_{n-1} + S_{n-1} - S_{n-2} = a_n + a_{n-1}$,

由于 $a_n + a_{n-1} > 0$,

所以 $a_n - a_{n-1} = 1$,

令 $n=2$ 可得 $a_2^2 - a_2 - 2 = 0$, 解得 $a_2 = 2$ 或 $a_2 = -1$ (舍去),

所以 $a_n = 2 + (n-2) = n$, 当 $n=1$ 时 $a_n = n$ 也成立,

所以 $a_n = n$, 则 $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$.

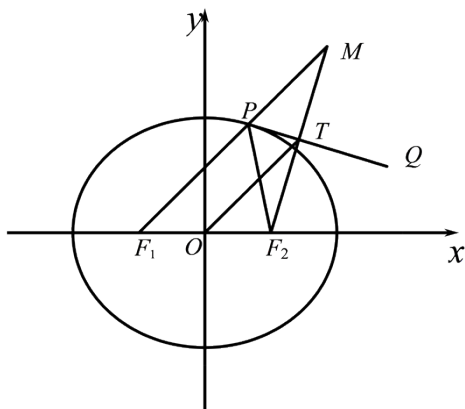
故选: C

7. B

【分析】延长 F_2T 交 F_1P 的延长线于点 M , 所以 $\triangle PTF_2 \cong \triangle PTM$, 结合椭圆的定义得

$|MF_1| = 4$, 所以在 $\triangle F_1F_2M$ 中, $|OT| = \frac{1}{2}|MF_1|$.

【详解】如图所示:



延长 F_2T 交 F_1P 的延长线于点 M ，

因为 PT 为 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线， $F_2T \perp PT$ ，

所以易得 $\triangle PTF_2 \cong \triangle PTM$ ，所以 $|PF_2| = |PM|$ ， $|TF_2| = |TM|$ ，

结合椭圆的定义得 $|MF_1| = |PF_1| + |PM| = |PF_1| + |PF_2| = 4$ ，

又 T 为 F_2M 的中点， O 为 F_1F_2 的中点，

所以在 $\triangle F_1F_2M$ 中， $|OT| = \frac{1}{2}|MF_1| = 2$ 。

故选：B.

8. A

【分析】令 $g(x) = f(x) - x$ ，将问题转化为 $g(x)$ 与 $y = b$ 有 3 个不同的交点；结合导数可求得 $g(x)$ 单调性，由此可得 $g(x)$ 的图象，采用数形结合的方式可求得结果。

【详解】令 $g(x) = f(x) - x = \begin{cases} \ln x - x, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ；

方程 $f(x) = x + b$ 有 3 个不同的实根等价于 $g(x)$ 与 $y = b$ 有 3 个不同的交点；

当 $x > 0$ 时， $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ ，

则当 $x \in (0, 1)$ 时， $g'(x) > 0$ ；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ；

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减， $\therefore g(x)_{\max} = g(1) = -1$ ；

则可得 $g(x)$ 图象如下图所示，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/038032110130006060>