

2023-2024 学年广西玉林市重点中学最新高考模拟示范卷数学试题卷 (二)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 半径为 2 的球 O 内有一个内接正三棱柱, 则正三棱柱的侧面积的最大值为 ()

- A. $9\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

2. 计算 $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3} \right)$ 等于 ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 已知各项都为正的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, 若 $a_1 + 2$, $a_3 + 4$, $a_6 + 16$ 成等比数列, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

4. 一个四面体所有棱长都是 4, 四个顶点在同一个球上, 则球的表面积为 ()

- A. 24π B. $8\sqrt{6}\pi$ C. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. 12π

5. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上, $PA = \sqrt{2}$, $PB = \sqrt{14}$, $AB = 4$, $CA = CB = \sqrt{10}$, 面 $PAB \perp$ 面 ABC , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

6. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ x+y \leq 2, \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = \frac{x+3}{y+2}$ 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{2}{5}, \frac{4}{3}]$ B. $[\frac{2}{5}, 3]$ C. $[\frac{4}{3}, 2]$ D. $[\frac{2}{5}, 2]$

7. 点 P 为棱长是 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 球面上的动点, 点 M 为 B_1C_1 的中点, 若满足 $DP \perp BM$, 则动点 P 的轨迹的长度为 ()

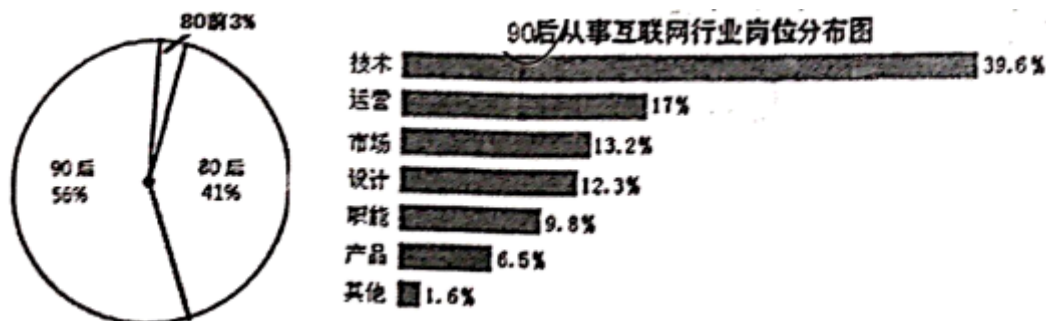
- A. $\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$

8. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

- A. $\{x|1 < x \leq 2\}$ B. $\{x|1 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x|-1 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x|x \geq -1\}$

9. 某调查机构对全国互联网行业进行调查统计，得到整个互联网行业从业者年龄分布饼状图，90后从事互联网行业岗位分布条形图，则下列结论中不正确的是（ ）

注：90后指1990年及以后出生，80后指1980-1989年之间出生，80前指1979年及以前出生。



- A. 互联网行业从业人员中90后占一半以上
 B. 互联网行业中从事技术岗位的人数超过总人数的20%
 C. 互联网行业中从事运营岗位的人数90后比80前多
 D. 互联网行业中从事技术岗位的人数90后比80后多

10. 下列不等式成立的是（ ）

- A. $\sin \frac{1}{2} > \cos \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

11. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ， $|\vec{a}| = 3$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则 $|\vec{b}| =$ （ ）

- A. 6 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

12. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，过点 F 且斜率为 1 的直线交抛物线于 A, B 两点，则 $||FA| - |FB||$ 的值等于（ ）

- A. $8\sqrt{2}$ B. 8 C. $4\sqrt{2}$ D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 一个房间的地面是由 12 个正方形所组成，如图所示. 今想用长方形瓷砖铺满地面，已知每一块长方形瓷砖可以覆盖

盖两块相邻的正方形，即  或 ，则用 6 块瓷砖铺满房间地面的方法有_____种.



14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与双曲线的左, 右两支分别交于 A, B 两点, 若 $|AB| = |AF_2|$, $\cos \angle BAF_2 = \frac{7}{8}$, 则双曲线 C 的离心率为_____.
15. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda \vec{b})$, 则实数 $\lambda =$ _____.
16. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2c \cos B = 2a + b$, 则 $\angle C =$ _____.
- 三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其面积记为 S , 满足 $\frac{2\sqrt{3}}{3}S = \vec{AB} \cdot \vec{CA}$.

- (1) 求 A ;
- (2) 若 $\sqrt{3}(b+c) = 2a$, 求 $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$ 的值.

18. (12 分) 某地在每周六的晚上 8 点到 10 点半举行灯光展, 灯光展涉及到 10000 盏灯, 每盏灯在某一时刻亮灯的概率均为 p ($0 < p < 1$), 并且是否亮灯彼此相互独立. 现统计了其中 100 盏灯在一场灯光展中亮灯的时长 (单位: min), 得到下面的频数表:

亮灯时长/ min	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$	$[90, 100]$
频数	10	20	40	20	10

以样本中 100 盏灯的平均亮灯时长作为一盏灯的亮灯时长.

- (1) 试估计 p 的值;
- (2) 设 X 表示这 10000 盏灯在某一时刻亮灯的数目.
- ①求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$;
- ②若随机变量 Z 满足 $Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$, 则认为 $Z \sim N(0, 1)$. 假设当 $4900 < X \leq 5000$ 时, 灯光展处于最佳灯光亮度. 试

由此估计, 在一场灯光展中, 处于最佳灯光亮度的时长 (结果保留为整数).

附:

①某盏灯在某一时刻亮灯的概率 P 等于亮灯时长与灯光展总时长的商;

②若 $Z: N(0,1)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$,

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973.$$

19. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A, B 的坐标分别为 $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$, 圆 E 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 在边 AC, BC, AB 上的切点分别为 $P, Q, R, |CP| = 2 - \sqrt{2}$, 动点 C 的轨迹为曲线 G .

(1) 求曲线 G 的方程;

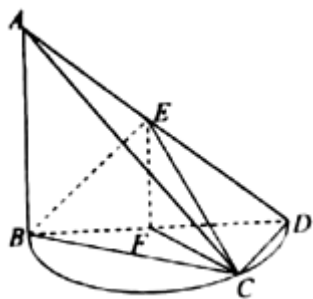
(2) 设直线 l 与曲线 G 交于 M, N 两点, 点 D 在曲线 G 上, O 是坐标原点 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OD}$, 判断四边形 $OMDN$ 的面积是否为定值? 若为定值, 求出该定值; 如果不是, 请说明理由.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)$, a 为实数, 且 $a > 0$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的值域 (其中 e 为自然对数的底数).

21. (12 分) 如图, 直角三角形 ABD 所在的平面与半圆弧 $\widehat{BD}$ 所在平面相交于 BD , $AB = BD = 2$, E, F 分别为 AD, BD 的中点, C 是 $\widehat{BD}$ 上异于 B, D 的点, $EC = \sqrt{2}$.



(1) 证明: 平面 $CEF \perp$ 平面 BCD ;

(2) 若点 C 为半圆弧 $\widehat{BD}$ 上的一个三等分点 (靠近点 D) 求二面角 $A-CE-B$ 的余弦值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = (x-1)^2 + ax - a \ln x$

(I) 若 $a \geq -2$ 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $a > 0$, 且对于函数 $f(x)$ 的图象上两点 $P_1(x_1, f(x_1)), P_2(x_2, f(x_2)) (x_1 < x_2)$, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使得函数 $f(x)$ 的图象在 $x = x_0$ 处的切线 $l \parallel P_1P_2$. 求证: $x_0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

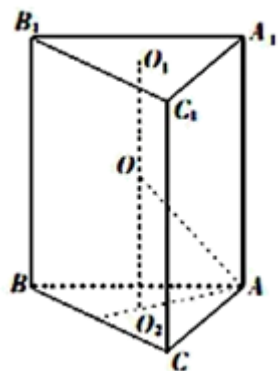
【解析】

设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1 , O_2 , 底面边长与高分别为 x, h , 利用 $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2$, 可得

$h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$, 进一步得到侧面积 $S = 3xh$, 再利用基本不等式求最值即可.

【详解】

如图所示. 设正三棱柱上下底面的中心分别为 O_1 , O_2 , 底面边长与高分别为 x, h , 则 $O_2A = \frac{\sqrt{3}}{3}x$,



在 $Rt\triangle OAO_2$ 中, $\frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 4$, 化为 $h^2 = 16 - \frac{4}{3}x^2$,

$QS = 3xh$,

$$\therefore S^2 = 9x^2h^2 = 12x^2(12 - x^2), \quad 12\left(\frac{x^2 + 12 - x^2}{2}\right)^2 = 432,$$

当且仅当 $x = \sqrt{6}$ 时取等号, 此时 $S = 12\sqrt{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查正三棱柱与球的切接问题, 涉及到基本不等式求最值, 考查学生的计算能力, 是一道中档题.

2、A

【解析】

利用诱导公式、特殊角的三角函数值，结合对数运算，求得所求表达式的值.

【详解】

$$\text{原式} = \log_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = \log_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = \log_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right] = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本小题主要考查诱导公式，考查对数运算，属于基础题.

3、A

【解析】

试题分析：设公差为 d , $a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 = 15 \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 2d \Rightarrow (a_1 + 2)(a_1 + 5d + 16)$

$$= (7 - 2d)(3d + 21) = 81 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 22 = 0 \Rightarrow d = 2 \text{ 或 } d = -\frac{11}{2} \text{ (舍)} \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \times 2 = 19, \text{ 故选 A.}$$

考点：等差数列及其性质.

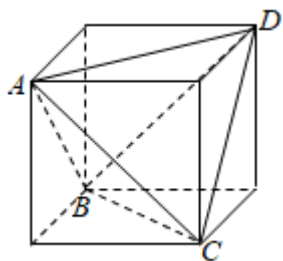
4、A

【解析】

将正四面体补成正方体，通过正方体的对角线与球的半径关系，求解即可.

【详解】

解：如图，将正四面体补形成一个正方体，正四面体的外接球与正方体的外接球相同，



$\because$ 四面体所有棱长都是 4,

$\therefore$ 正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$,

设球的半径为 r ,

$$\text{则 } 2r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2}, \text{ 解得 } r = \sqrt{6},$$

$$\text{所以 } S = 4\pi r^2 = 24\pi,$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查多面体外接球问题，解决本题的关键在于，巧妙构造正方体，利用正方体的外接球的直径为正方体的对角线，从而将问题巧妙转化，属于中档题.

5、D

【解析】

由题意画出图形，找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设 AB 的中点为 D ；

$$\because PA = \sqrt{2}, PB = \sqrt{14}, AB = 4,$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 为直角三角形，且斜边为 } AB, \text{ 故其外接圆半径为： } r = \frac{1}{2} AB = AD = 2;$$

设外接球球心为 O ；

$$\because CA = CB = \sqrt{10}, \text{ 面 } PAB \perp \text{面 } ABC,$$

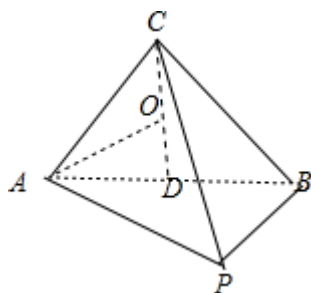
$$\therefore CD \perp AB \text{ 可得 } CD \perp \text{面 } PAB; \text{ 且 } DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}.$$

$\therefore O$ 在 CD 上；

$$\text{故有： } AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}};$$

$$\therefore \text{球 } O \text{ 的表面积为： } 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题.

6、D

【解析】

由题意作出可行域，转化目标函数 $z = \frac{x+3}{y+2}$ 为连接点 $D(-3, -2)$ 和可行域内的点 (x, y) 的直线斜率的倒数，数形结合

即可得解.

【详解】

由题意作出可行域，如图，

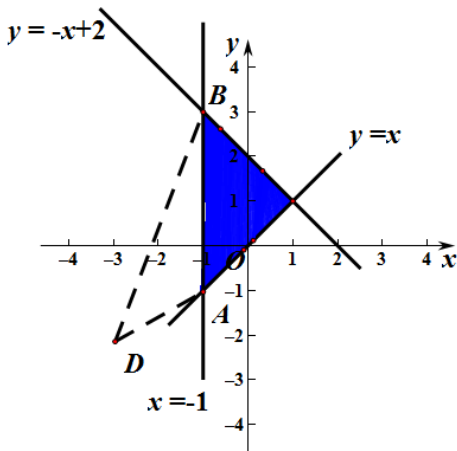
目标函数 $z = \frac{x+3}{y+2}$ 可表示连接点 $D(-3, -2)$ 和可行域内的点 (x, y) 的直线斜率的倒数，

由图可知，直线 DA 的斜率最小，直线 DB 的斜率最大，

由 $\begin{cases} x-y=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ 可得 $A(-1, -1)$ ，由 $\begin{cases} x+y=2 \\ x+1=0 \end{cases}$ 可得 $B(-1, 3)$ ，

所以 $k_{DA} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$ ， $k_{DB} = \frac{3+2}{-1+3} = \frac{5}{2}$ ，所以 $\frac{2}{5} \leq z \leq 2$ 。

故选：D.



【点睛】

本题考查了非线性规划的应用，属于基础题.

7、C

【解析】

设 B_1B 的中点为 H ，利用正方形和正方体的性质，结合线面垂直的判定定理可以证明出 $BM \perp$ 平面 DCH ，这样可以确定动点 P 的轨迹，最后求出动点 P 的轨迹的长度.

【详解】

设 B_1B 的中点为 H ，连接 CH, DH ，因此有 $CH \perp BM$ ，而 $DC \perp MB$ ，而 $DC, CH \subset$ 平面 CDH ，

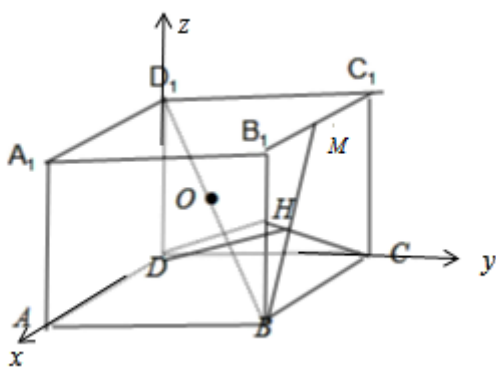
$DC \cap CH = C$ ，因此有 $BM \perp$ 平面 DCH ，所以动点 P 的轨迹平面 DCH 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的交线. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以内切球 O 的半径为 $R = 1$ ，建立如下图所示的以 D 为坐标原点的空间直角坐标系：

因此有 $O(1, 1, 1), C(0, 2, 0), H(2, 2, 1)$ ，设平面 DCH 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，所以有

$$\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{DC} \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{DH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, -2), \text{ 因此 } O \text{ 到平面 } DCH \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OD}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以截面圆的半径为: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 因此动点 P 的轨迹的长度为 $2\pi r = \frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$.

故选: C



【点睛】

本题考查了线面垂直的判定定理的应用, 考查了立体几何中轨迹问题, 考查了球截面的性质, 考查了空间想象能力和数学运算能力.

8、B

【解析】

直接利用集合的基本运算求解即可.

【详解】

解: 全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$,

$$\therefore \complement_U A = \{x | x \geq 1\}$$

$$\text{则 } (\complement_U A) \cap B = \{x | x \geq 1\} \cap \{x | -1 \leq x \leq 2\} = \{x | 1 \leq x \leq 2\},$$

故选: B.

【点睛】

本题考查集合的基本运算, 属于基础题.

9、D

【解析】

根据两个图形的数据进行观察比较, 即可判断各选项的真假.

【详解】

在 A 中, 由整个互联网行业从业者年龄分别饼状图得到互联网行业从业人员中 90 后占 56%, 所以是正确的;

在 B 中，由整个互联网行业从业者年龄分别饼状图，90 后从事互联网行业岗位分布条形图得到：

$56\% \times 39.6\% = 22.176\% > 20\%$ ，互联网行业从业技术岗位的人数超过总人数的 20%，所以是正确的；

在 C 中，由整个互联网行业从业者年龄分别饼状图，90 后从事互联网行业岗位分别条形图得到：

$13.7\% \times 39.6\% = 9.52\% > 3\%$ ，互联网行业从事运营岗位的人数 90 后比 80 后多，所以是正确的；

在 D 中，互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后所占比例为 $56\% \times 39.6\% = 22.176\% < 41\%$ ，所以不能判断互联网行业中从事技术岗位的人数 90 后比 80 后多。

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了命题的真假判定，以及统计图表中饼状图和条形图的性质等基础知识的应用，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

10、D

【解析】

根据指数函数、对数函数、幂函数的单调性和正余弦函数的图象可确定各个选项的正误.

【详解】

对于 A， $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ ， $\therefore \sin \frac{1}{2} < \cos \frac{1}{2}$ ，A 错误；

对于 B， $Q y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减， $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ，B 错误；

对于 C， $Q \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$ ， $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 < 1$ ， $\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ ，C 错误；

对于 D， $Q y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增， $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ，D 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查根据初等函数的单调性比较大小的问题；关键是熟练掌握正余弦函数图象、指数函数、对数函数和幂函数的单调性.

11、D

【解析】

利用向量的加法的平行四边形法则，判断四边形的形状，推出结果即可.

【详解】

解：非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，可知两个向量垂直， $|\vec{a}| = 3$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/038060007030006134>