第 08 讲 函数的基本性质Ⅱ-奇偶性、周期性和对称性（精练）

【A 组 在基础中考查功底】

一、单选题

1．（2023·北京通州·统考模拟预测）下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递增的是（　　）

A．$y=\frac{1}{x}$　　B．$y=x^3$　　C．$y=e^x+e^{-x}$　　D．$y=\tan x$

【答案】B

【分析】根据幂函数、指数函数、正切函数的单调性及奇偶性逐一判断即可.

【详解】对于 A，函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，故 A 不符题意；

对于 B，函数 $y=f(x)=x^3$ 的定义域为 R，关于原点对称，

因为 $f(-x)=-x^3=-f(x)$，所以函数为奇函数，

又函数在 R 单调递增，故 B 符合题意；

对于 C，函数 $y=f(x)=e^x+e^{-x}$ 的定义域为 R，关于原点对称，

因为 $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$，所以函数为偶函数，故 C 不符合题意；

对于 D，函数 $y=f(x)=\tan x$，

因为 $f(0)=0\geq-1=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$，所以函数不是增函数，故 D 不符题意.

故选：B.

2．（2023 春·河南·高三校联考阶段练习）已知 $\forall x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 都满足 $f(x)\cdot f(x+3)=-2$，又 $f(2)=3$，则 $f(11)=$（　　）

A．3　　B．-2　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{2}{3}$

【答案】D

【分析】通过分析得 $f(x+6)=f(x)$，则 $f(11)=f(5)=\frac{-2}{f(2)}=-\frac{2}{3}$.

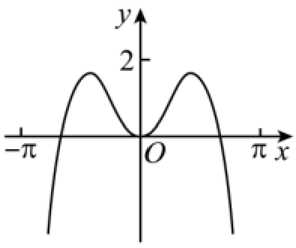
【详解】根据题意，$f(x)\cdot f(x+3)=-2$，且 $f(x)\neq0$，

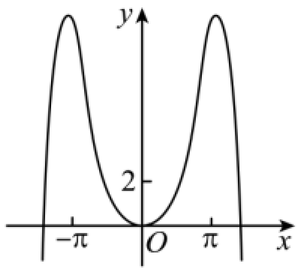
则 $f(x+3)=\frac{-2}{f(x)}$，$f(x)=\frac{-2}{f(x+2)}$，则 $f(x+6)=\frac{-2}{f(x+3)}$，故 $f(x+6)=f(x)$，

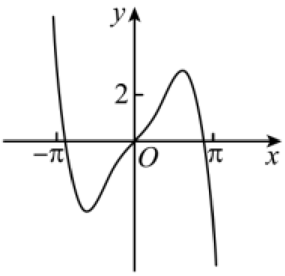
所以函数 $f(x)$ 的周期为 6，所以 $f(11)=f(5)=\frac{-2}{f(2)}=-\frac{2}{3}$.

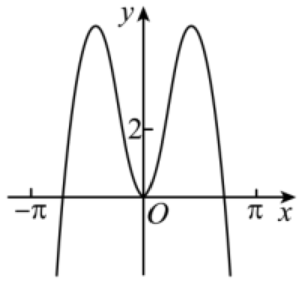
故选：D．

3．（2023·全国·模拟预测）函数 $f\left(x\right)=x^{2}\cos x+x\sin x$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【分析】首先判断函数的奇偶性，再代入计算 $f\left(\pi\right)$ 和 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值即可得到正确答案.

【详解】因为 $f\left(-x\right)=x^{2}\cos\left(-x\right)-x\sin\left(-x\right)=x^{2}\cos x+x\sin x=f\left(x\right)$，

且函数定义域为 R，关于原点对称，所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数，其图象关于 y 轴对称，排除 C；

$f\left(\pi\right)=\pi^{2}\cos\pi+\pi\sin\pi=-\pi^{2}<0$，排除 B；$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2}\cos\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}<2$，排除 D.

故选：A.

4．（2023·高三课时练习）设 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(-1,1\right)$ 上的偶函数，且 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right)$ 上是严格减函数，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$，则 $f\left(x\right)<1$ 的解集为（　　）

A．$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　　　B．$\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

C．$\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　　　D．$\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right)$

【答案】C

【解析】由函数为偶函数可将不等式化为 $f\left(\left|x\right|\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，即可利用单调性求解.

【详解】$\because$ $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(-1,1\right)$ 上的偶函数，$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$，

则不等式$f\left(x\right)<1$为$f\left(x\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，则$f\left(\left|x\right|\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，

Q $f\left(x\right)$在$\left[0,1\right)$上是严格减函数，

$\therefore \left|x\right|>\frac{1}{2}$，解得$x<-\frac{1}{2}$或$x>\frac{1}{2}$，又定义域为$\left(-1,1\right)$，

故不等式的解集为$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

故选：C.

【点睛】本题考查利用偶函数的性质解不等式，将不等式化为$f\left(\left|x\right|\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$利用单调性求解是解题的关键.

5．（2023·浙江台州·统考二模）已知函数$f\left(x\right)$同时满足性质:①$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$;②当$\forall x_1,x_2\in\left(0,1\right)$时，$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$,则函数$f\left(x\right)$可能为(　)

A．$f\left(x\right)=x^2$　　B．$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

C．$f(x)=\cos 4x$　　D．$f(x)=\ln\left(1-\left|x\right|\right)$

【答案】D

【分析】①$f(-x)=f(x)$说明$f(x)$为偶函数，②$\forall x_1,x_2\in(0,1),\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$,说明函数在(0, 1)上单调递减,再逐项分析即可.

【详解】①$f(-x)=f(x)$说明$f(x)$为偶函数，②$\forall x_1,x_2\in(0,1),\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$,说明函数在(0, 1)上单调递减.

A不满足②，B不满足①，

C不满足②,因为$f(x)=\cos 4x$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递减，在$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$单调递增.

对于D,满足①,当$x\in(0,1), f(x)=\ln(1-x)$,单调递减,也满足②.

故选：D.

6．（2023·黑龙江大庆·铁人中学校考二模）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x, x\geq 1\\ 0,0\leq x<1\\ x,x<0\end{cases}$，若$f\left(2a-1\right)-1\leq 0$，则实数$a$的取值范围是（　）

A. $\left[\frac{e+1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left[0,\frac{e+1}{2}\right]$

C. $\left[0,\frac{e+1}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{e+1}{2}\right]$

【答案】D

【分析】讨论 $2a-1$ 与 0、1 的大小关系，写出 $f(2a-1)$ 的解析式，解出不等式后，再求并集即为答案.

【详解】因为 $f(2a-1)-1\le 0\Rightarrow f(2a-1)\le 1$.

①当 $2a-1\ge 1$ 时， $f(2a-1)=\ln(2a-1)\le 1\Rightarrow 1\le a\le\frac{e+1}{2}$.

②当 $0\le 2a-1<1$ 时， $f(2a-1)=0\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}\le a<1$.

③当 $2a-1<0$ 时， $f(2a-1)=2a-1\le 1\Rightarrow a<\frac{1}{2}$.

综上所述： $a\le\frac{e+1}{2}$.

故选：**D.**

7.（2023 春·江西·高三校联考阶段练习）设函数 $f(x)=\frac{2}{e^{x-1}-1}$，则（　）

A. $f(x)$ 关于 $(0,-1)$ 对称　　B. $f(x)$ 关于 $(0,0)$ 对称

C. $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称　　D. $f(x)$ 关于 $(1,-1)$ 对称

【答案】D

【分析】根据函数对称性的性质依次判断选项即可得到答案.

【详解】对选项 A，因为 $f(-x)+f(x)=\frac{2}{e^{-x-1}-1}+\frac{2}{e^{x-1}-1}\ne -2$，

所以 $f(x)$ 不关于 $(0,-1)$ 对称，故 **A** 错误.

对选项 **B**，因为 $f(-x)+f(x)=\frac{2}{e^{-x-1}-1}+\frac{2}{e^{x-1}-1}\ne 0$，

所以 $f(x)$ 不关于 $(0,0)$ 对称，故 **B** 错误.

对选项 **C**，因为 $f(1-x)=\frac{2}{e^{1-x-1}-1}=\frac{2}{e^{-x}-1}=\frac{2e^{x}}{1-e^{x}}$，

$f(1+x)=\frac{2}{e^{1+x-1}-1}=\frac{2}{e^{x}-1}$， $f(1-x)\ne f(1+x)$，

所以 $f(x)$ 不关于 $x=1$ 对称，故 **C** 错误.

对选项 **D**，因为 $f(1-x)+f(1+x)=\frac{2e^{x}}{1-e^{x}}+\frac{2}{e^{x}-1}=-2$，

所以 $f(x)$ 关于 $(1,-1)$ 对称，故 D 正确.

故选：D

8．（2023·青海·校联考模拟预测）已知函数 $f(x-1)$ 为偶函数，且函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，则关于 x 的不等式 $f(1-2^x)<f(-7)$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,3)$　　B．$(3,+\infty)$　　C．$(-\infty,2)$　　D．$(2,+\infty)$

【答案】A

【分析】利用函数的奇偶性和对称性，得到函数的单调区间，利用单调性解函数不等式.

【详解】因为 $f(x-1)$ 为偶函数，所以 $f(x-1)$ 的图像关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-1$ 对称.

因为 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减.

因为 $f(1-2^x)<f(-7)=f(5)$，所以 $-7<1-2^x<5$，解得 $x<3$.

故选：A.

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 的图象连续不断，且满足 $f(x+2)=f(x)$，则以下结论成立的是（　）

A．函数 $f(x)$ 的周期 $T=2$

B．$f(2021)=f(2022)=0$

C．点 $(1,0)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心

D．$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上有 4 个零点

【答案】ABC

【分析】根据题意求得函数 $f(x)$ 的周期为 $T=2$，结合函数的周期性和 $f(0)=0$，逐项判定，即可求解.

【详解】由定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 的图象连续不断，且满足 $f(x+2)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 的周期为 $T=2$，所以 A 正确；

由 $f(-1+2)=f(-1)$，即 $f(1)=f(-1)=-f(1)$，所以 $f(1)=f(-1)=0$，且 $f(0)=0$，

又由 $f(2021)=f(1)=0, f(2022)=f(0)=0$，

所以 $f(2021)=f(2022)=0$，所以 B 正确；

由 $f\left(x+2\right)=f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，可得点 $(1,0)$ 是 $y=f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心，所以 C 正确；

由 $f\left(x\right)$ 在 $[-2,2]$ 上有 $f\left(-2\right)=f\left(-1\right)=f\left(0\right)=f\left(1\right)=f\left(2\right)=0$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $[-2,2]$ 上有 5 个零点，所以 D 错误.

故选：ABC.

10.（2023·全国·高三专题练习）已知定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：$f\left(x\right)$ 关于 $\left(0,0\right)$ 中心对称，$f\left(x\right)$ 关于 $x=1$ 对称，且 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=1$.则下列选项中说法正确的有（　　）

A．$f\left(x\right)$ 为奇函数　　　　B．$f\left(x\right)$ 周期为 2

C．$f\left(\frac{9}{2}\right)=1$　　　　D．$f\left(x-2\right)$ 是奇函数

【答案】AD

【分析】由于 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，且关于 $\left(0,0\right)$ 中心对称，可知 $f(x)$ 是奇函数，又 $f\left(x\right)$ 关于 $x=1$ 对称，由此即可求出函数的周期，根据函数的奇偶性及周期性判断各项的正误.

【详解】由于 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，且关于 $\left(0,0\right)$ 中心对称，可得 $f(x)$ 是奇函数，故 A 项正确；

因为 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，即 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(x)=-f(x-2)=f\left(x-4\right)$，

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$，故 B 项错误；

$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(4+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(2-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$，故 C 项错误；

$f\left(x-2\right)=-f\left(-x+2\right)=-f\left(-x+2-4\right)=-f\left(-x-2\right)$，所以 $f(x-2)$ 是奇函数，故 D 项正确.

故选：AD.

三、填空题

11.（2023 秋·吉林长春·高三长春市第二中学校考期末）设 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，又当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=2x$，则 $f\left(25.5\right)$ 的值为______.

【答案】1

【分析】由已知可得函数的周期为 4，然后根据函数解析式结合周期性奇偶性可求得结果.

【详解】因为 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，

所以 $f(x+4)=-f(x+2)$，

所以 $f(x+4)=f(x)$，

所以 $y=f(x)$ 的周期为 4，

因为 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2x$，

所以 $f(25.5)=f(4\times6+1.5)$

$=f(1.5)$

$=f(-0.5+2)$

$=-f(-0.5)$

$=f(0.5)$

$=2\times0.5=1$，

故答案为：1

12．（2023·全国·高三对口高考）已知函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，$y=f(x)$ 是奇函数，且当 $x\geq0$ 时，

$f(x)=x^3+2^x+a$，则 $x<0$ 时，$f(x)=$________.

【答案】$x^3-2^{-x}+1$

【分析】由奇函数性质得 $a=-1$，再根据奇函数求解析式即可.

【详解】解：因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geq0$ 时，$f(x)=x^3+2^x+a$，

所以 $f(0)=0+1+a=0$，解得 $a=-1$.

所以当 $x\geq0$ 时，$f(x)=x^3+2^x-1$.

当 $x<0$ 时，$-x>0$.

所以 $f(-x)=-x^3+2^{-x}-1=-f(x)$.

所以 $f(x)=x^3-2^{-x}+1$.

所以，$x<0$ 时，$f(x)=x^3-2^{-x}+1$

故答案为：$x^3-2^{-x}+1$

13．（2023·全国·高三专题练习）定义在R上的奇函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+2\right)=f\left(x-2\right)$，当$x\in\left[0,1\right]$时，

$f\left(x\right)=2^x-1$，则$f\left(\log_2 10\right)$的值为__________.

【答案】-$\frac{3}{5}$

【分析】首先根据题意得到函数$f\left(x\right)$是以4为周期的周期函数，再结合奇函数的性质和对数的运算性质求解即可.

【详解】由题意，函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+2\right)=f\left(x-2\right)$，

化简可得$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$，所以函数$f\left(x\right)$是以4为周期的周期函数，

因为$f\left(x\right)$为奇函数，

所以$f\left(\log_2 10\right)=f\left(\log_2 10-4\right)=f\left(\log_2\frac{5}{8}\right)=f\left(-\log_2\frac{8}{5}\right)=-f\left(\log_2\frac{8}{5}\right)$，

因为$\log_2 1<\log_2\frac{8}{5}<\log_2 2$，即$0<\log_2\frac{8}{5}<1$，

所以$f\left(\log_2 10\right)=-f\left(\log_2\frac{8}{5}\right)=-\left(2^{\log_2\frac{8}{5}}-1\right)=-\frac{3}{5}$.

故答案为：-$\frac{3}{5}$

14．（2023·福建漳州·统考三模）已知函数$f\left(x\right)$是定义在$\left[-2,2\right]$上的奇函数，且$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-x,0<x\leq 1\\ x-1,1<x\leq 2\end{cases}$，则$f\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(0\right)=$_________.

【答案】$-\frac{3}{4}$/-0.75

【分析】根据奇函数的性质，结合题目中的函数解析式，可得答案.

【详解】由函数$f\left(x\right)$是定义在$\left[-2,2\right]$上的奇函数，则$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(0\right)=0$，

由$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$，则$f\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(0\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+0=-\frac{3}{4}$.

故答案为：$-\frac{3}{4}$.

15．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=2^x,x\in\mathrm{R}$，若不等式$f^2(x)+f(x)-m>0$在R上恒成立，则实数m的取值范围是________.

【答案】$(-\infty,0]$.

【分析】利用换元法把目标式转化为二次函数问题，结合二次函数的单调性和最值情况可得答案.

【详解】令 $f(x)=t(t>0), H(t)=t^2+t, t>0,$

因为 $H(t)=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $H(t)>H(0)=0.$

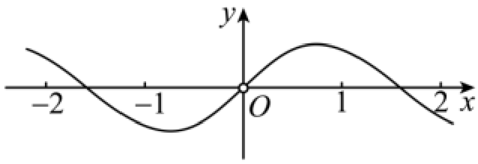
因此要使 $t^2+t>m$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，应有 $m\le 0$，即所求实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

故答案为：$(-\infty,0]$.

【B 组 在综合中考查能力】

一、单选题

1．（2023·宁夏石嘴山·平罗中学校考模拟预测）如图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-2,2]$ 上的大致图象，则该函数是（　）



A． $f(x)=\dfrac{x\sin 2x}{e^x-e^{-x}}$　　B． $f(x)=\dfrac{x^2\sin 2x}{e^x-e^{-x}}$

C． $f(x)=\dfrac{x\cos 2x}{e^x-e^{-x}}$　　D． $f(x)=\dfrac{x^2\cos 2x}{e^x-e^{-x}}$

【答案】A

【分析】根据给定的函数图象特征，利用函数的奇偶性排除 BC；利用 $f(1)$ 的正负即可判断作答.

【详解】对于 B，$x\in[-2,0)\cup(0,2]$，$f(-x)=\dfrac{(-x)^2\sin(-2x)}{e^{-x}-e^x}=\dfrac{x^2\sin 2x}{e^x-e^{-x}}=f(x)$，函数 $f(x)$ 是偶函数，B 不是

对于 C，$x\in[-2,0)\cup(0,2]$，$f(-x)=\dfrac{-x\cdot\cos(-2x)}{e^{-x}-e^x}=\dfrac{x\cos 2x}{e^x-e^{-x}}=f(x)$，函数 $f(x)$ 是偶函数，C 不是；

对于 D，$x\in[-2,0)\cup(0,2]$，$f(1)=\dfrac{\cos 2}{e-e^{-1}}<0$，D 不是；

对于 A，$x\in[-2,0)\cup(0,2]$，$f(-x)=\dfrac{-x\cdot\sin(-2x)}{e^{-x}-e^x}=-\dfrac{x\sin 2x}{e^x-e^{-x}}=-f(x)$，函数 $f(x)$ 是奇函数，

且 $f(1)=\dfrac{\sin 2}{e-e^{-1}}>0$，A 符合题意.

故选：A

2．（2023·上海宝山·统考二模）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)=|x-m+1|-2$，若正实数 a、b 满足 $f(a)+f(2b)=m$，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为（　）

A．$\frac{9}{5}$　　B．9　　C．$\frac{8}{5}$　　D．8

【答案】A

【分析】根据偶函数的对称性可得 $m=1$，由题意分析可得 $\frac{a+2b}{5}=1$，结合基本不等式分析运算.

【详解】若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，

即 $|x-m+1|-2=|-x-m+1|-2$，可得 $|x-(m-1)|=|x+(m-1)|$，

整理得 $(m-1)x=0$，故 $m-1=0$，解得 $m=1$，

$\therefore f(x)=|x|-2$.

若正实数 a、b 满足 $f(a)+f(2b)=1$，即 $|a|-2+|2b|-2=1$，可得 $\frac{a+2b}{5}=1$，

可得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{a+2b}{5}\times\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}+5\right)\geq\frac{1}{5}\left(2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{2a}{b}}+5\right)=\frac{9}{5}$，

当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=b=\frac{5}{3}$ 时，等号成立，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{5}$.

故选：A.

3．（2023·广东广州·统考二模）已知偶函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)+e^{-x}+x$ 也是偶函数，若 $f(2a-1)<f(a+1)$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(0,2)$

C．$(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【答案】B

【分析】由偶函数的定义结合导数可得出 $f'(x)=-f'(-x)$，由已知可得出 $f'(x)+e^{-x}+x=f'(-x)+e^{x}-x$，可求出 $f'(x)$ 的表达式，利用导数分析函数 $f'(x)$ 的单调性，可知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，再由 $f(2a-1)<f(a+1)$ 可得出 $f(|2a-1|)<f(|a+1|)$，可得出关于实数 a 的不等式，解之即可.

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，等式两边求导可得 $f'(x)=-f'(-x)$，①

因为函数 $f'(x)+e^{-x}+x$ 为偶函数，则 $f'(x)+e^{-x}+x=f'(-x)+e^{x}-x$，②

联立①②可得 $f'(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}-x$，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}-1\geq\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}-1=0$，且 $g'(x)$ 不恒为零，

所以，函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，即函数 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

故当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

由 $f(2a-1)<f(a+1)$ 可得 $f(|2a-1|)<f(|a+1|)$，

所以，$|2a-1|<|a+1|$，整理可得 $a^{2}-2a<0$，解得 $0<a<2$．

故选：B.

4．（2023·全国·模拟预测）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-x)+f(x)=0$，$f(x+1)$ 是偶函数，$f(1)=-1$，则 $f(2023)+f(2026)=$（　）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．2

【答案】B

【分析】由函数的奇偶对称性推得 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，并求得 $f(2)=f(0)=0$，最后利用周期性求目标函数值.

【详解】由 $f(x+1)$ 是偶函数，$f(1-x)=f(1+x)$，则 $f(2-x)=f(x)$，又 $f(-x)+f(x)=0$，

$f(x+4)=f[2-(x+4)]=f(-x-2)=-f(x+2)=-f([2-(x+2)])=-f(-x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是周期函数，周期为 4，

对于 $f(-x)+f(x)=0$，令 $x=0$，得 $f(0)=0$，则 $f(2)=f(0)=0$，

所以 $f(2023)+f(2026)=f(506\times4-1)+f(506\times4+2)=f(-1)+f(2)=-f(1)=1$.

故选：B

5．（2023·新疆喀什·统考模拟预测）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足 $f(x+1)$ 为奇函数且 $f(6-x)=f(x)$，当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)=a\cdot2^{x}+bx^{2}$，若 $f(5)+f(12)=-4$，则 $f(2023)=$（　）