

期末复习（压轴题 50 题 22 个考点）

一. 因式分解的应用（共 3 小题）

1. 阅读材料：若 $m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$ ，求 m 、 n 的值.

解：∵ $m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$ ，∴ $(m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 8n + 16) = 0$

∴ $(m - n)^2 + (n - 4)^2 = 0$ ，∴ $(m - n)^2 = 0$ ， $(n - 4)^2 = 0$ ，∴ $n = 4$ ， $m = 4$.

根据你的观察，探究下面的问题：

(1) 已知 $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 1 = 0$ ，求 $2x + y$ 的值；

(2) 已知 $a - b = 4$ ， $ab + c^2 - 6c + 13 = 0$ ，求 $a + b + c$ 的值.

【答案】见试题解答内容

【解答】解：(1) ∵ $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 1 = 0$ ，

∴ $(x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1) = 0$ ，

∴ $(x + y)^2 + (y + 1)^2 = 0$ ，

∴ $x + y = 0$ ， $y + 1 = 0$ ，

解得， $x = 1$ ， $y = -1$ ，

∴ $2x + y = 2 \times 1 + (-1) = 1$ ；

(2) ∵ $a - b = 4$ ，

∴ $a = b + 4$ ，

∴ 将 $a = b + 4$ 代入 $ab + c^2 - 6c + 13 = 0$ ，得

$b^2 + 4b + c^2 - 6c + 13 = 0$ ，

∴ $(b^2 + 4b + 4) + (c^2 - 6c + 9) = 0$ ，

∴ $(b + 2)^2 + (c - 3)^2 = 0$ ，

∴ $b + 2 = 0$ ， $c - 3 = 0$ ，

解得， $b = -2$ ， $c = 3$ ，

∴ $a = b + 4 = -2 + 4 = 2$ ，

∴ $a + b + c = 2 - 2 + 3 = 3$.

2. 上数学课时，王老师在讲完乘法公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 的多种运用后，要求同学们运用所学知识解

答：求代数式 $x^2 + 4x + 5$ 的最小值？同学们经过交流、讨论，最后总结出如下解答方法：

解： $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$

∵ $(x + 2)^2 \geq 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $(x+2)^2$ 的值最小, 最小值是 0,

$\therefore (x+2)^2 + 1 \geq 1$

$\therefore$ 当 $(x+2)^2 = 0$ 时, $(x+2)^2 + 1$ 的值最小, 最小值是 1,

$\therefore x^2 + 4x + 5$ 的最小值是 1.

请你根据上述方法, 解答下列各题

(1) 知识再现: 当 $x = \underline{3}$ 时, 代数式 $x^2 - 6x + 12$ 的最小值是 $\underline{3}$;

(2) 知识运用: 若 $y = -x^2 + 2x - 3$, 当 $x = \underline{1}$ 时, y 有最 $\underline{\text{大}}$ 值 (填“大”或“小”), 这个值是 $\underline{-2}$;

(3) 知识拓展: 若 $-x^2 + 3x + y + 5 = 0$, 求 $y + x$ 的最小值.

【答案】 见试题解答内容

【解答】 解: (1) $\because x^2 - 6x + 12 = (x - 3)^2 + 3$,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时, 有最小值 3;

故答案为 3, 3.

(2) $\because y = -x^2 + 2x - 3 = -(x - 1)^2 - 2$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时有最大值 -2;

故答案为 1, 大, -2.

(3) $\because -x^2 + 3x + y + 5 = 0$,

$\therefore x + y = x^2 - 2x - 5 = (x - 1)^2 - 6$,

$\because (x - 1)^2 \geq 0$,

$\therefore (x - 1)^2 - 6 \geq -6$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y + x$ 的最小值为 -6.

3. 阅读理解并解答:

【方法呈现】

(1) 我们把多项式 $a^2 + 2ab + b^2$ 及 $a^2 - 2ab + b^2$ 叫做完全平方式. 在运用完全平方公式进行因式分解时, 关键是判断这个多项式是不是一个完全平方式, 同样地, 把一个多项式进行局部因式分解可以来解决代数式值的最小 (或最大) 问题.

例如: $x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$,

$\because (x + 1)^2 \geq 0$,

$\therefore (x + 1)^2 + 2 \geq 2$.

则这个代数式 x^2+2x+3 的最小值是 2，这时相应的 x 的值是 -1。

【尝试应用】

(2) 求代数式 $-x^2+14x+10$ 的最小（或最大）值，并写出相应的 x 的值。

【拓展提高】

(3) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$ ，且 c 是 $\triangle ABC$ 中最长的边，求 c 的取值范围。

【答案】见试题解答内容

【解答】解：(1) 代数式 x^2+2x+3 的最小值是 2，这时相应的 x 的值是 -1，

故答案为：2， -1；

(2) $-x^2+14x+10$

$$= -(x^2 - 14x - 10)$$

$$= -[(x - 7)^2 - 49 - 10]$$

$$= -[(x - 7)^2 - 59]$$

$$= -(x - 7)^2 + 59,$$

$$\because -(x - 7)^2 \leq 0,$$

$$\therefore -(x - 7)^2 + 59 \leq 59,$$

$\therefore$ 代数式 $-x^2+14x+10$ 有最大值 59，相应的 x 的值为 7；

(3) $\because a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边长，满足 $a^2+b^2=10a+8b-41$ ，

$$\therefore a^2+b^2 - 10a - 8b = -41,$$

$$\therefore (a - 5)^2 + (b - 4)^2 - 25 - 16 = -41,$$

$$\therefore (a - 5)^2 + (b - 4)^2 = -41 + 41,$$

$$\therefore (a - 5)^2 + (b - 4)^2 = 0,$$

$$\therefore a - 5 = 0, b - 4 = 0,$$

$$\therefore a = 5, b = 4,$$

$$\because a - b < c < a + b,$$

$$\therefore 1 < c < 9,$$

$\because c$ 是 $\triangle ABC$ 中最长的边，

$$\therefore 5 < c < 9.$$

答： c 的取值范围为 $5 < c < 9$ 。

二. 分式的加减法 (共 1 小题)

4. 定义: 若两个分式的差的绝对值为 2, 则称这两个分式属于“友好分式组”.

(1) 下列 3 组分式:

① $\frac{3a}{a+1}$ 与 $\frac{a}{a+1}$; ② $\frac{3a}{a-1}$ 与 $\frac{a+2}{a-1}$; ③ $\frac{a}{2a+1}$ 与 $\frac{5a+2}{2a+1}$. 其中属于“友好分式组”的有 ②③ (只填序号);

(2) 若正实数 a, b 互为倒数, 求证, 分式 $\frac{3a^2}{a^2+b}$ 与 $\frac{a-2b^2}{a+b^2}$ 属于“友好分式组”;

(3) 若 a, b 均为非零实数, 且分式 $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”, 求分式 $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ 的值.

【答案】(1) ②③; (2) 证明过程见上面具体过程; (3) $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ 的值为 $-\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

【解答】解: (1) ① $\frac{3a}{a+1} - \frac{a}{a+1} = \frac{2a}{a+1} \neq 2$,

$$\textcircled{2} \frac{3a}{a-1} - \frac{a+2}{a-1} = \frac{2a-2}{a-1} = 2,$$

$$\textcircled{3} \left| \frac{a}{2a+1} - \frac{5a+2}{2a+1} \right| = \left| \frac{-4a-2}{2a+1} \right| = 2,$$

$\therefore$ 属于“友好分式组”的有 ②③,

故答案为: ②③.

(2) $\because a, b$ 互为倒数,

$$\therefore ab=1, b=\frac{1}{a},$$

$$\therefore \left| \frac{3a^2}{a^2+b} - \frac{a-2b^2}{a+b^2} \right|$$

$$= \left| \frac{3a^2}{a^2+\frac{1}{a}} - \frac{a-2b^2}{a+\frac{1}{a^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{3a^3}{a^3+1} - \frac{a^3-2}{a^3+1} \right|$$

$$= \left| \frac{3a^3-a^3+2}{a^3+1} \right|$$

$$= 2,$$

∴分式 $\frac{3a^2}{a^2+b}$ 与 $\frac{a-2b^2}{a+b^2}$ 属于“友好分式组”；

$$\begin{aligned}(3) \because & \left| \frac{3a^2}{a^2-4b^2} - \frac{a}{a+2b} \right| \\&= \left| \frac{3a^2}{(a+2b)(a-2b)} - \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} \right| \\&= \left| \frac{3a^2 - a^2 + 2ab}{(a+2b)(a-2b)} \right| \\&= \left| \frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - 4b^2} \right|,\end{aligned}$$

∴ $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”，

$$\therefore \left| \frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - 4b^2} \right| = 2,$$

$$\therefore 2a^2 + 2ab = 2(a^2 - 4b^2) \text{ 或 } 2a^2 + 2ab = -2(a^2 - 4b^2),$$

$$\textcircled{1} a = -4b, \textcircled{2} ab = 4b^2 - 2a^2,$$

$$\text{把}\textcircled{1}\text{代入}\frac{a^2-2b^2}{ab} = \frac{16b^2-2b^2}{-4b^2} = -\frac{7}{2},$$

$$\text{把}\textcircled{2}\text{代入}\frac{a^2-2b^2}{ab} = \frac{a^2-2b^2}{4b^2-2a^2} = -\frac{1}{2},$$

综上所述： $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ 的值为 $-\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

三. 分式方程的应用（共 1 小题）

5. 某汽车销售公司经销某品牌 A 款汽车，随着汽车的普及，其价格也在不断下降. 今年 5 月份 A 款汽车的售价比去年同期每辆降价 1 万元，如果卖出相同数量的 A 款汽车，去年销售额为 100 万元，今年销售额只有 90 万元.

(1) 今年 5 月份 A 款汽车每辆售价多少万元？

(2) 为了增加收入，汽车销售公司决定再经销同品牌的 B 款汽车，已知 A 款汽车每辆进价为 7.5 万元，B 款汽车每辆进价为 6 万元，公司预计用不多于 105 万元且不少于 99 万元的资金购进这两款汽车共 15 辆，有几种进货方案？

(3) 按照 (2) 中两种汽车进价不变，如果 B 款汽车每辆售价为 8 万元，为打开 B 款汽车的销路，公司

决定每售出一辆 B 款汽车，返还顾客现金 a 万元，要使（2）中所有的方案获利相同， a 值应是多少？

【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）设今年 5 月份 A 款汽车每辆售价 m 万元．根据题意，得：

$$\frac{90}{m} = \frac{100}{m+1},$$

解得： $m=9$ ．

经检验， $m=9$ 是原方程的根且符合题意．

答：今年 5 月份 A 款汽车每辆售价 9 万元；

（2）设购进 A 款汽车 x 辆．根据题意，得：

$$99 \leq 7.5x + 6(15 - x) \leq 105.$$

解得： $6 \leq x \leq 10$ ．

$\therefore x$ 的正整数解为 6，7，8，9，10，

$\therefore$ 共有 5 种进货方案，

方案 1．购进 A 款汽车 6 辆，购进 B 款汽车 9 辆．

方案 2．购进 A 款汽车 7 辆，购进 B 款汽车 8 辆．

方案 3．购进 A 款汽车 8 辆，购进 B 款汽车 7 辆．

方案 4．购进 A 款汽车 9 辆，购进 B 款汽车 6 辆．

方案 5．购进 A 款汽车 10 辆，购进 B 款汽车 5 辆；

（3）设总获利为 W 万元，购进 A 款汽车 x 辆，根据题意，得：

$$W = (9 - 7.5)x + (8 - 6 - a)(15 - x) = (a - 0.5)x + 30 - 15a.$$

当 $a=0.5$ 时，（2）中所有方案获利相同．

四．一元一次不等式组的整数解（共 1 小题）

6. 若不等式组
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} > 0 \\ x + \frac{5a+4}{3} > \frac{4}{3}(x+1) + a \end{cases}$$
 恰有两个整数解．则实数 a 的取值范围是 $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ ．

【答案】见试题解答内容

【解答】解：
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} > 0 \text{ ①} \\ x + \frac{5a+4}{3} > \frac{4}{3}(x+1) + a \text{ ②} \end{cases},$$

$\therefore$ 解不等式①得： $x > -\frac{2}{5}$ ，

解不等式②得： $x < 2a$ ，

∴ 不等式组的解集为 $-\frac{2}{5} < x < 2a$ ，

∵ 不等式组有两个整数解，

∴ $1 < 2a \leq 2$ ，

∴ $\frac{1}{2} < a \leq 1$ ，

故答案为： $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 。

五. 一元一次不等式组的应用（共 2 小题）

7. “中国人的饭碗必须牢牢掌握在咱们自己手中”。为扩大粮食生产规模，某粮食生产基地计划投入一笔资金购进甲、乙两种农机具。已知购进 2 件甲种农机具和 1 件乙种农机具共需 3.5 万元，购进 1 件甲种农机具和 3 件乙种农机具共需 3 万元。

（1）求购进 1 件甲种农机具和 1 件乙种农机具各需多少万元？

（2）若该粮食生产基地计划购进甲、乙两农机具共 10 件，且投入资金不少于 9.8 万元又不超过 12 万元，设购进甲种农机具 m 件，则有哪几种购买方案？哪种购买方案需要的资金最少，最少资金是多少？

（3）在（2）的方案下，由于国家对农业生产扶持力度加大，每件甲种农机具降价 0.7 万元，每件乙种农机具降价 0.2 万元，该粮食生产基地计划将节省的资金全部用于再次购买甲、乙两种农机具（可以只购买一种）请直接写出再次购买农机具的方案有哪几种？

【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）设购进 1 件甲种农机具 x 万元，1 件乙种农机具 y 万元。

根据题意得：
$$\begin{cases} 2x+y=3.5 \\ x+3y=3 \end{cases}$$
，

解得：
$$\begin{cases} x=1.5 \\ y=0.5 \end{cases}$$
，

答：购进 1 件甲种农机具 1.5 万元，1 件乙种农机具 0.5 万元。

（2）设购进甲种农机具 m 件，购进乙种农机具 $(10 - m)$ 件，

根据题意得：
$$\begin{cases} 1.5m+0.5(10-m) \geq 9.8 \\ 1.5m+0.5(10-m) \leq 12 \end{cases}$$
，

解得： $4.8 \leq m \leq 7$ 。

∵ m 为整数。

∴ m 可取 5、6、7。

∴ 有三种方案：

方案一：购买甲种农机具 5 件，乙种农机具 5 件.

方案二：购买甲种农机具 6 件，乙种农机具 4 件.

方案三：购买甲种农机具 7 件，乙种农机具 3 件.

设总资金为 w 万元.

$$w = 1.5m + 0.5(10 - m) = m + 5.$$

$$\because k = 1 > 0,$$

$\therefore w$ 随着 m 的减少而减少,

$$\therefore m = 5 \text{ 时, } w_{\text{最小}} = 1 \times 5 + 5 = 10 \text{ (万元)}.$$

$\therefore$ 方案一需要资金最少, 最少资金是 10 万元.

(3) 设节省的资金用于再次购买甲种农机具 a 件, 乙种农机具 b 件,

$$\text{由题意得: } (1.5 - 0.7)a + (0.5 - 0.2)b = 0.7 \times 5 + 0.2 \times 5,$$

$$\text{其整数解: } \begin{cases} a=0 \\ b=15 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases},$$

$\therefore$ 节省的资金全部用于再次购买农机具的方案有两种:

方案一：购买甲种农机具 0 件，乙种农机具 15 件.

方案二：购买甲种农机具 3 件，乙种农机具 7 件.

8. 为解决中小学大班额问题, 东营市各县区今年将改扩建部分中小学, 某县计划对 A 、 B 两类学校进行改扩建, 根据预算, 改扩建 2 所 A 类学校和 3 所 B 类学校共需资金 7800 万元, 改扩建 3 所 A 类学校和 1 所 B 类学校共需资金 5400 万元.

(1) 改扩建 1 所 A 类学校和 1 所 B 类学校所需资金分别是多少万元?

(2) 该县计划改扩建 A 、 B 两类学校共 10 所, 改扩建资金由国家财政和地方财政共同承担. 若国家财政拨付资金不超过 11800 万元; 地方财政投入资金不少于 4000 万元, 其中地方财政投入到 A 、 B 两类学校的改扩建资金分别为每所 300 万元和 500 万元. 请问共有哪几种改扩建方案?

【答案】见试题解答内容

【解答】解: (1) 设改扩建一所 A 类和一所 B 类学校所需资金分别为 x 万元和 y 万元.

$$\text{由题意得 } \begin{cases} 2x + 3y = 7800 \\ 3x + y = 5400 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 1200 \\ y = 1800 \end{cases},$$

答: 改扩建一所 A 类学校和一所 B 类学校所需资金分别为 1200 万元和 1800 万元.

(2) 设今年改扩建 A 类学校 a 所, 则改扩建 B 类学校 $(10-a)$ 所,

由题意得:
$$\begin{cases} (1200-300)a + (1800-500)(10-a) \leq 11800 \\ 300a + 500(10-a) \geq 4000 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} a \geq 3 \\ a \leq 5 \end{cases},$

$\therefore 3 \leq a \leq 5,$

$\because a$ 取整数,

$\therefore a=3, 4, 5.$

即共有 3 种方案:

方案一: 改扩建 A 类学校 3 所, B 类学校 7 所;

方案二: 改扩建 A 类学校 4 所, B 类学校 6 所;

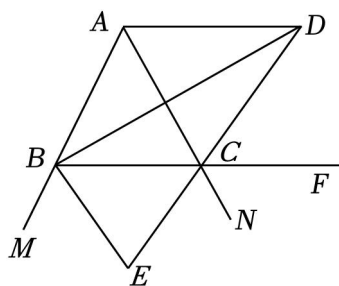
方案三: 改扩建 A 类学校 5 所, B 类学校 5 所.

六. 角平分线的性质 (共 2 小题)

9. 如图, $\angle ABC = \angle ACB$, $\triangle ABC$ 的内角 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 与 $\angle ACB$ 的外角平分线交于点 D , $\triangle ABC$ 的外角 $\angle MBC$ 的角平分线与 CD 的反向延长线交于点 E , 以下结论:

① $AD \parallel BC$; ② $DB \perp BE$; ③ $\angle BDC + \angle ABC = 90^\circ$; ④ BD 平分 $\angle ADC$; ⑤ $\angle BAC + 2\angle BEC = 180^\circ$.

其中正确的结论有 ①②③⑤. (填序号)



【答案】①②③⑤.

【解答】解: 如图, 过点 D 作 $DG \perp BF$ 于 G , $DH \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 H , $DP \perp AC$ 于 P , 过点 A 作 $AQ \perp BC$ 于 Q ,

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore DH = DG,$

$\because CD$ 是 $\angle ACF$ 的平分线,

$\therefore DG = DP,$

$\therefore DH = DP,$

$\therefore AD$ 是 $\angle CAH$ 的平分线,

即 $\angle CAD = \angle HAD = \frac{1}{2} \angle CAH$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\because \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$, $\angle CAD + \angle HAD + \angle BAC = 180^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle ACB$,

$\therefore AD \parallel BC$,

因此①正确;

$\because BE$ 平分 $\angle CBM$, BD 平分 $\angle ABC$, $\angle CBM + \angle ABC = 180^\circ$,

$\therefore \angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle CBM = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$,

即 $BD \perp BE$,

因此②正确;

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore \angle ABD = \angle DBC$,

$\because CD$ 是 $\angle ACF$ 的平分线,

$\therefore \angle ACD = \angle FCD$,

$\because \angle ACF = \angle BAC + \angle ABC$, $\angle DCF = \angle BDC + \angle DBC$,

$\therefore \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC$,

$\because AQ \perp BC$, $AB = AC$,

$\therefore \angle BAQ = \angle CAQ = \frac{1}{2} \angle BAC$,

$\because \angle BAQ + \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDC + \angle ABC = 90^\circ$,

因此③正确;

$\because \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{180^\circ - \angle BAC}{2} \right) = 45^\circ - \frac{1}{4} \angle BAC$, 而 $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC$

$\therefore \angle ADB$ 与 $\angle BDC$ 不一定相等,

因此④不正确;

$\because BE \perp BD$,

$\therefore \angle E + \angle BDC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

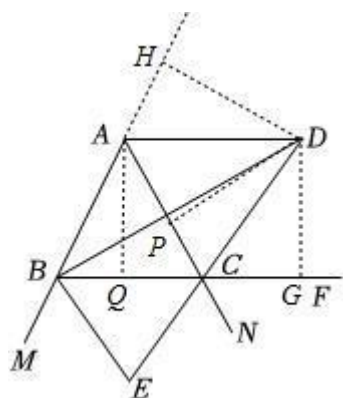
$$\therefore \angle E + \frac{1}{2} \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore 2\angle E + \angle ABC = 180^\circ,$$

因此⑤正确；

综上所述，正确的结论有：①②③⑤，

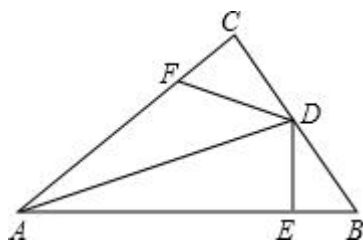
故答案为：①②③⑤.



10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ 于点 E ，点 F 在 AC 上，且 $BD=DF$.

(1) 求证： $CF=EB$ ；

(2) 请你判断 AE 、 AF 与 BE 之间的数量关系，并说明理由.



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：(1) $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ， $\angle C=90^\circ$ ，

$$\therefore DC=DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 和 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中，

$$\begin{cases} DC=DE \\ DF=DB \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DCF \cong \text{Rt}\triangle DEB,$$

$$\therefore CF=EB;$$

$$(2) AF+BE=AE.$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DCF \cong \text{Rt}\triangle DEB,$$

$$\therefore DC = DE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DCA \cong \text{Rt}\triangle DEA \text{ (HL)},$$

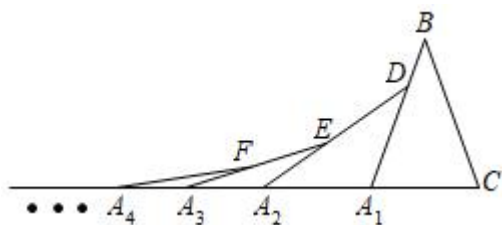
$$\therefore AC = AE,$$

$$\therefore AF + FC = AE,$$

$$\text{即 } AF + BE = AE.$$

七. 等腰三角形的性质 (共 2 小题)

11. 如图, 在第 1 个 $\triangle A_1BC$ 中, $\angle B = 40^\circ$, $A_1B = CB$; 在边 A_1B 上任取一点 D , 延长 CA_1 到 A_2 , 使 $A_1A_2 = A_1D$, 得到第 2 个 $\triangle A_1A_2D$; 在边 A_2D 上任取一点 E , 延长 A_1A_2 到 A_3 , 使 $A_2A_3 = A_2E$. 得到第 3 个 $\triangle A_2A_3E$... 按此做法继续下去, 则第 $n+1$ 个三角形中以 A_{n+1} 为顶点的底角度数是 ()



- A. $(\frac{1}{2})^n \cdot 70^\circ$ B. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 70^\circ$
C. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 80^\circ$ D. $(\frac{1}{2})^n \cdot 80^\circ$

【答案】A

【解答】解: $\because$ 在 $\triangle CBA_1$ 中, $\angle B = 40^\circ$, $A_1B = CB$,

$$\therefore \angle BA_1C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 70^\circ,$$

$\because A_1A_2 = A_1D$, $\angle BA_1C$ 是 $\triangle A_1A_2D$ 的外角,

$$\therefore \angle DA_2A_1 = \frac{1}{2} \angle BA_1C = \frac{1}{2} \times 70^\circ;$$

同理可得 $\angle EA_3A_2 = (\frac{1}{2})^2 \times 70^\circ$, $\angle FA_4A_3 = (\frac{1}{2})^3 \times 70^\circ$,

$\therefore$ 第 $n+1$ 个三角形中以 A_{n+1} 为顶点的底角度数是 $(\frac{1}{2})^n \times 70^\circ$.

故选: A.

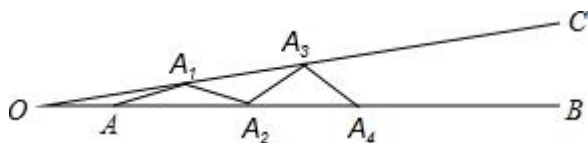
12. 如图, $\angle BOC = 9^\circ$, 点 A 在 OB 上, 且 $OA = 1$, 按下列要求画图:

以 A 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OC 于点 A_1 , 得第 1 条线段 AA_1 ;

再以 A_1 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OB 于点 A_2 , 得第 2 条线段 A_1A_2 ;

再以 A_2 为圆心，1 为半径向右画弧交 OC 于点 A_3 ，得第 3 条线段 A_2A_3 ； $\cdots$

这样画下去，直到得第 n 条线段，之后就不能再画出符合要求的线段了，则 $n = \underline{9}$ 。



【答案】见试题解答内容

【解答】解：由题意可知： $AO = A_1A$ ， $A_1A = A_2A_1$ ， $\cdots$ ，

则 $\angle AOA_1 = \angle OA_1A$ ， $\angle A_1AA_2 = \angle A_1A_2A$ ， $\cdots$ ，

$\because \angle BOC = 9^\circ$ ，

$\therefore \angle A_1AB = 18^\circ$ ， $\angle A_2A_1C = 27^\circ$ ， $\angle A_3A_2B = 36^\circ$ ， $\angle A_4A_3C = 45^\circ$ ， $\cdots$ ，

$\therefore 9^\circ \cdot n < 90^\circ$ ，

解得 $n < 10$ 。

由于 n 为整数，故 $n = 9$ 。

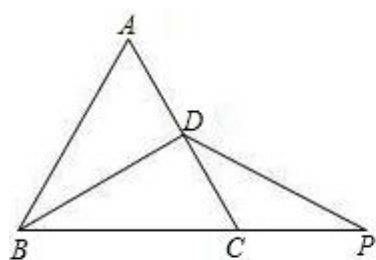
故答案为：9。

八. 等腰三角形的判定（共 1 小题）

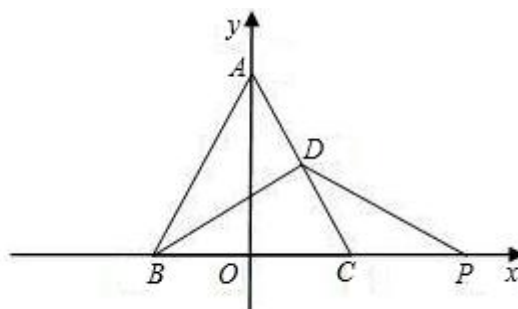
13. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， BD 是中线， P 是直线 BC 上一点。

（1）若 $CP = CD$ ，求证： $\triangle DBP$ 是等腰三角形；

（2）在图①中建立以 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为原点， BC 所在直线为 x 轴， BC 边上的高所在直线为 y 轴的平面直角坐标系，如图②，已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2， $AO = \sqrt{3}$ ，在 x 轴上是否存在除点 P 以外的点 Q ，使 $\triangle BDQ$ 是等腰三角形？如果存在，请求出 Q 点的坐标；如果不存在，请说明理由。



图①



图②

【答案】见试题解答内容

【解答】证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$

$\because BD$ 是中线

$$\therefore \angle DBC = 30^\circ$$

$$\because CP = CD$$

$$\therefore \angle CPD = \angle CDP$$

$$\text{又} \because \angle ACB = 60^\circ$$

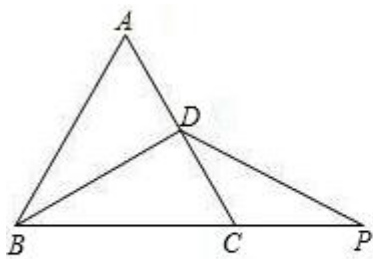
$$\therefore \angle CPD = 30^\circ$$

$$\therefore \angle CPD = \angle DBC$$

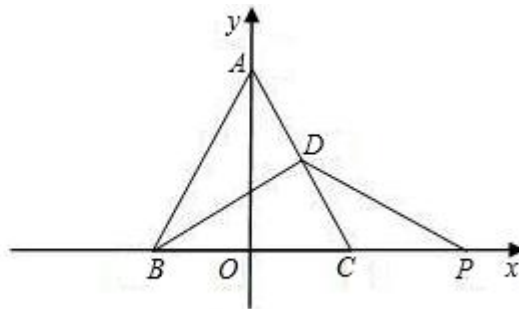
$$\therefore DB = DP$$

即 $\triangle DBP$ 是等腰三角形；

(2) 在 x 轴上存在除点 P 以外的点 Q ，使 $\triangle BDQ$ 是等腰三角形



图①



图②

①若点 Q 在 x 轴负半轴上，且 $BQ = BD$

$$\because BD = \sqrt{3}$$

$$\therefore BQ = \sqrt{3}$$

$$\therefore OQ = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore \text{点 } Q_1 (-\sqrt{3} - 1, 0);$$

②若点 Q 在 x 轴上，且 $BQ = QD$

$$\because \angle QBD = \angle QDB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DQC = 60^\circ$$

$$\text{又} \angle QCD = 60^\circ$$

$$\therefore QC = DC = 1, \text{ 而 } OC = 1$$

$$\therefore OQ = 0,$$

∴点 Q_2 (0, 0);

③若点 Q 在 x 轴正半轴上, 且 $BQ=BD$

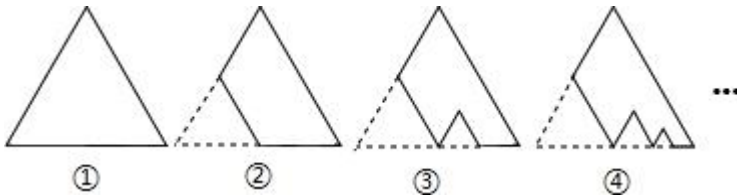
∴ $BQ=\sqrt{3}$, 而 $OB=1$

∴ $OQ=\sqrt{3}-1$

∴点 Q_3 ($\sqrt{3}-1$, 0).

九. 等边三角形的性质 (共 5 小题)

14. 图①是一块边长为 1, 周长记为 P_1 的正三角形纸板, 沿图①的底边剪去一块边长为 $\frac{1}{2}$ 的正三角形纸板后得到图②, 然后沿同一底边依次剪去一块更小的正三角形纸板 (即其边长为前一块被剪掉如图正三角形纸板边长的 $\frac{1}{2}$) 后, 得图③, ④, ..., 记第 n ($n \geq 3$) 块纸板的周长为 P_n , 则 $P_n - P_{n-1}$ 的值为 ()



- A. $(\frac{1}{4})^{n-1}$ B. $(\frac{1}{4})^n$ C. $(\frac{1}{2})^{n-1}$ D. $(\frac{1}{2})^n$

【答案】C

【解答】解: $P_1=1+1+1=3$,

$$P_2=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

$$P_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \times 3=\frac{11}{4},$$

$$P_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \times 2+\frac{1}{8} \times 3=\frac{23}{8},$$

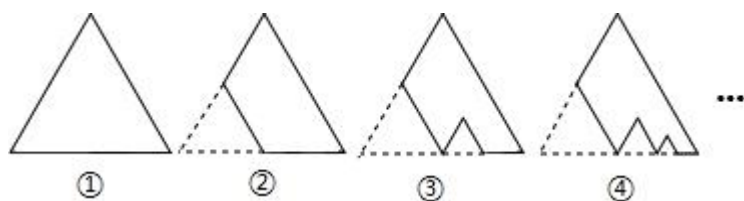
...

$$\therefore P_3 - P_2 = \frac{11}{4} - \frac{5}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2},$$

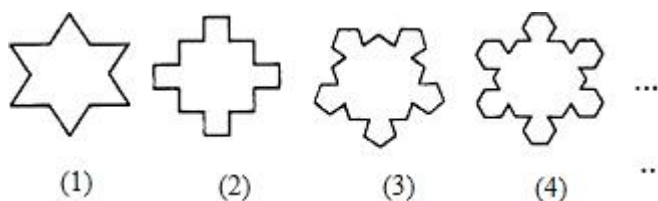
$$P_4 - P_3 = \frac{23}{8} - \frac{11}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3},$$

$$\text{则 } P_n - P_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

故选: C.



15. 如图，第（1）个多边形由正三角形“扩展”而来边数记为 $a_3=12$ ，第（2）个多边形由正方形“扩展”而来，边数记为 $a_4=20$ ，第（3）个多边形由五边形“扩展”而来，边数记为 $a_5=30$...依此类推，由正 n 边形“扩展”而来的多边形的边数记为 a_n ($n \geq 3$)，则 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{12}}$ 结果是 ()



- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{7}{30}$ C. $\frac{8}{33}$ D. $\frac{10}{39}$

【答案】D

【解答】解：∵根据图形可知： $a_3=12=3 \times 4$ ， $a_4=20=4 \times 5$ ， $a_5=30=5 \times 6$ ， $\dots$ ， $a_{12}=12 \times 13$ ，

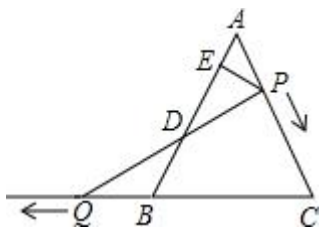
$$\begin{aligned} & \therefore \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{12}} \\ &= \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \dots + \frac{1}{12 \times 13} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{13} \\ &= \frac{10}{39}, \end{aligned}$$

故选：D.

16. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形， P 是 AC 边上一动点，由 A 向 C 运动（与 A 、 C 不重合）， Q 是 CB 延长线上一点，与点 P 同时以相同的速度由 B 向 CB 延长线方向运动（ Q 不与 B 重合），过 P 作 $PE \perp AB$ 于 E ，连接 PQ 交 AB 于 D 。

（1）当 $\angle BQD=30^\circ$ 时，求 AP 的长；

（2）当运动过程中线段 ED 的长是否发生变化？如果不变，求出线段 ED 的长；如果变化请说明理由。



【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1） $\because \triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BQD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle QPC = 90^\circ,$$

设 $AP = x$ ，则 $PC = 6 - x$ ， $QB = x$ ，

$$\therefore QC = QB + BC = 6 + x,$$

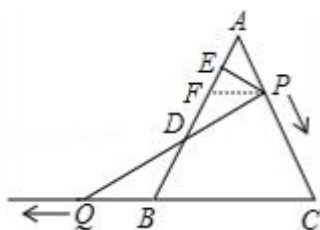
$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle QCP$ 中， $\angle BQD = 30^\circ$ ，

$$\therefore PC = \frac{1}{2}QC, \text{ 即 } 6 - x = \frac{1}{2}(6 + x), \text{ 解得 } x = 2,$$

$$\therefore AP = 2;$$

（2）解法一：当点 P 、 Q 同时运动且速度相同时，线段 DE 的长度不会改变．理由如下：

过 P 作 $PF \parallel QC$ ，



$\therefore \triangle AFP$ 是等边三角形，

$\because P$ 、 Q 同时出发、速度相同，即 $BQ = AP$ ，

$$\therefore BQ = PF,$$

$$\therefore \triangle DBQ \cong \triangle DFP \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BD = DF,$$

而 $\triangle APF$ 是等边三角形， $PE \perp AF$ ，

$$\therefore AE = EF,$$

$$\text{又 } DE + (BD + AE) = AB = 6,$$

$\therefore DE + (DF + EF) = 6$, 即 $DE + DE = 6 \therefore DE = 3$ 为定值,

即 DE 的长不变.

解法二: 当点 P 、 Q 同时运动且速度相同时, 线段 DE 的长度不会改变. 理由如下:

作 $QF \perp AB$, 交直线 AB 于点 F , 连接 QE , PF ,

又 $\because PE \perp AB$ 于 E ,

$\therefore \angle DFQ = \angle AEP = 90^\circ$,

$\because$ 点 P 、 Q 速度相同,

$\therefore AP = BQ$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle FBQ = 60^\circ$,

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle BQF$ 中,

$\because \angle AEP = \angle BFQ = 90^\circ$,

$\therefore \angle APE = \angle BQF$,

$$\begin{cases} \angle AEP = \angle BFQ \\ \angle A = \angle FBQ \\ AP = BQ \end{cases},$$

$\therefore \triangle APE \cong \triangle BQF$ (AAS),

$\therefore AE = BF$, $PE = QF$ 且 $PE \parallel QF$,

$\therefore$ 四边形 $PEQF$ 是平行四边形,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}EF,$$

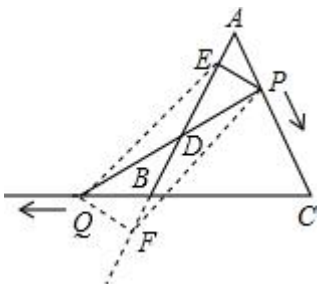
$\because EB + AE = BE + BF = AB$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB,$$

又 $\because$ 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 6,

$\therefore DE = 3$,

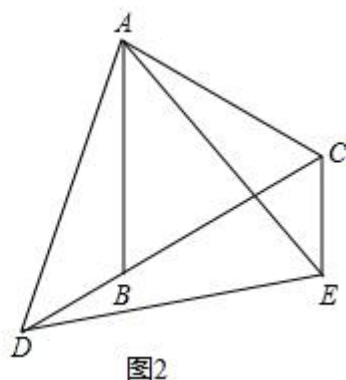
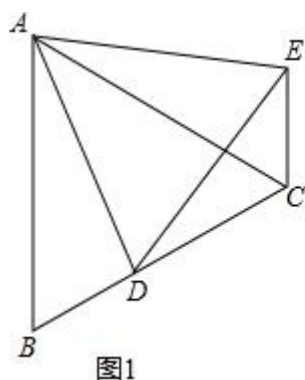
$\therefore$ 点 P 、 Q 同时运动且速度相同时, 线段 DE 的长度不会改变.



17. 等边 $\triangle ABC$ ，点 D 是直线 BC 上一点，以 AD 为边在 AD 的右侧作等边 $\triangle ADE$ ，连接 CE 。

(1) 如图1，若点 D 在线段 BC 上，求证： $CE+CD=AB$ ；

(2) 如图2，若点 D 在 CB 的延长线上，线段 CE ， CD ， AB 的数量有怎样的数量关系？请加以证明。



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：(1) 如图1， $\because \triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，

$$\therefore AC=AB, AE=AD, \angle DAE=\angle BAC=60^\circ.$$

$$\therefore \angle DAE - \angle CAD = \angle BAC - \angle CAD.$$

$$\text{即 } \angle CAE = \angle BAD.$$

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle BAD$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AC=AB \\ \angle CAE=\angle BAD, \\ AE=AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAE \cong \triangle BAD \text{ (SAS).}$$

$$\therefore EC=DB \text{ (全等三角形的对应边相等);}$$

$$\therefore CE+CD=DB+CD=BC=AB, \text{ 即 } CE+CD=AB;$$

$$(2) CE+AB=CD.$$

理由如下：如图2， $\because \triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，

$$\therefore AC=AB, AE=AD, \angle DAE=\angle BAC=60^\circ.$$

$$\therefore \angle DAE - \angle BAE = \angle BAC - \angle BAE.$$

$$\text{即 } \angle CAE = \angle BAD.$$

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle BAD$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AC=AB \\ \angle CAE=\angle BAD, \\ AE=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle BAD$ (SAS).

$\therefore EC = DB$ (全等三角形的对应边相等);

$\therefore CE + AB = DB + BC = CD$, 即 $CE + AB = CD$.

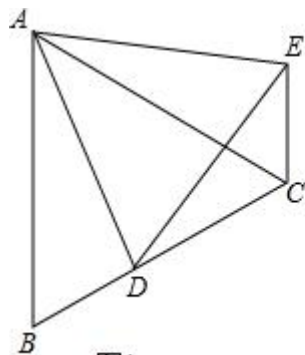


图1

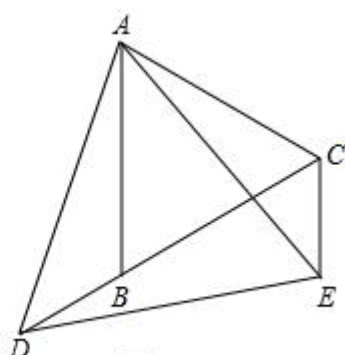


图2

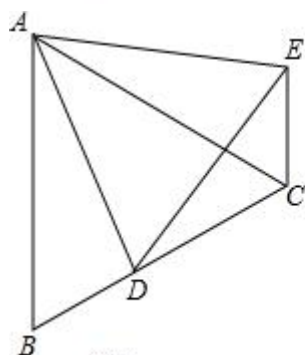


图1

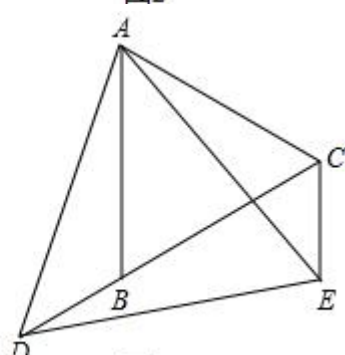


图2

18. 如图1, 点 P 、 Q 分别是边长为 4cm 的等边 $\triangle ABC$ 边 AB 、 BC 上的动点, 点 P 从顶点 A , 点 Q 从顶点 B 同时出发, 且它们的速度都为 1cm/s ,

(1) 连接 AQ 、 CP 交于点 M , 则在 P 、 Q 运动的过程中, $\angle CMQ$ 变化吗? 若变化, 则说明理由, 若不变, 则求出它的度数;

(2) 何时 $\triangle PBQ$ 是直角三角形?

(3) 如图2, 若点 P 、 Q 在运动到终点后继续在射线 AB 、 BC 上运动, 直线 AQ 、 CP 交点为 M , 则 $\angle CMQ$ 变化吗? 若变化, 则说明理由, 若不变, 则求出它的度数.

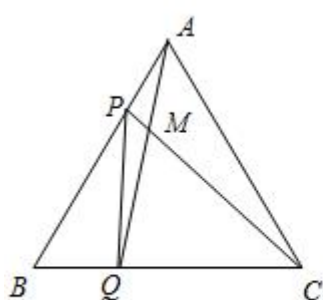


图 1

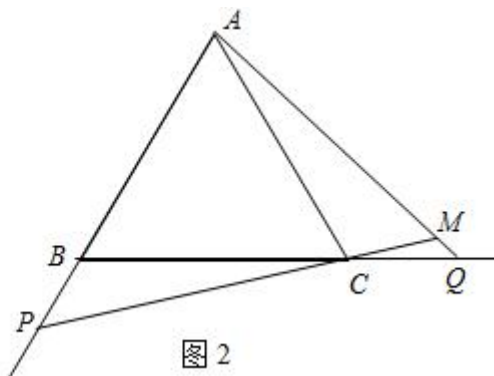


图 2

【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1） $\angle CMQ=60^\circ$ 不变.

$\because$ 等边三角形中， $AB=AC$ ， $\angle B=\angle CAP=60^\circ$

又由条件得 $AP=BQ$ ，

在 $\triangle ABQ$ 和 $\triangle CAP$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle B=\angle CAP, \\ AP=BQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle CAP$ (SAS),

$\therefore \angle BAQ = \angle ACP$,

$\therefore \angle CMQ = \angle ACP + \angle CAM = \angle BAQ + \angle CAM = \angle BAC = 60^\circ$.

（2）设时间为 t ，则 $AP=BQ=t$ ， $PB=4-t$

①当 $\angle PQB=90^\circ$ 时，

$\because \angle B=60^\circ$,

$\therefore PB=2BQ$ ，得 $4-t=2t$ ， $t=\frac{4}{3}$;

②当 $\angle BPQ=90^\circ$ 时，

$\because \angle B=60^\circ$,

$\therefore BQ=2BP$ ，得 $t=2(4-t)$ ， $t=\frac{8}{3}$;

$\therefore$ 当第 $\frac{4}{3}$ 秒或第 $\frac{8}{3}$ 秒时， $\triangle PBQ$ 为直角三角形.

（3） $\angle CMQ=120^\circ$ 不变.

$\because$ 在等边三角形中， $BC=AC$ ， $\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$

$\therefore \angle PBC=\angle ACQ=120^\circ$,

又由条件得 $BP=CQ$ ，

在 $\triangle PBC$ 和 $\triangle QCA$ 中，

$$\begin{cases} BC=AC \\ \angle PBC=\angle ACQ, \\ BP=CQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle PBC \cong \triangle QCA$ (SAS)

$\therefore \angle BPC = \angle MQC$

$$\text{又} \because \angle PCB = \angle MCQ,$$

$$\therefore \angle CMQ = \angle PBC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

一十. 等边三角形的判定 (共 1 小题)

19. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

(1) 如图 1, 若 $AD = BD$, 求 $\angle A$ 的度数;

(2) 如图 2, 在 (1) 的条件下, 作 $DE \perp AB$ 于 E , 连接 EC . 求证: $\triangle EBC$ 是等边三角形.

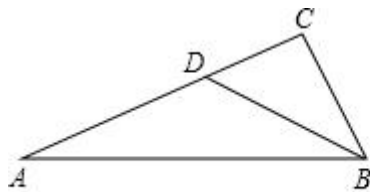


图1

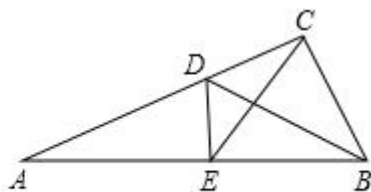


图2

【答案】见试题解答内容

【解答】(1) 解: $\because AD = BD$,

$$\therefore \angle A = \angle DBA,$$

$$\because \angle DBA = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle A = \angle DBA = \angle DBC,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle DBA + \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ;$$

(2) 证明: $\because AD = BD$, $DE \perp AB$,

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore CE = BE,$$

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBC \text{ 是等边三角形.}$$

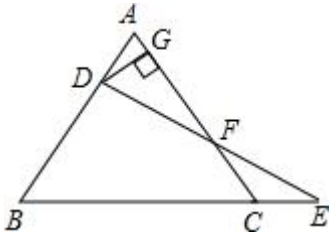
一十一. 等边三角形的判定与性质 (共 3 小题)

20. 如图, D 是等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点, E 是 BC 延长线上一点, $CE = DA$, 连接 DE 交 AC 于 F , 过 D 点作 $DG \perp AC$ 于 G 点. 证明下列结论:

$$(1) AG = \frac{1}{2}AD;$$

$$(2) DF = EF;$$

$$(3) S_{\triangle DGF} = S_{\triangle ADG} + S_{\triangle ECF}.$$



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\because DG \perp AC,$$

$$\therefore \angle AGD = 90^\circ, \angle ADG = 30^\circ,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AD;$$

(2) 过点 D 作 $DH \parallel BC$ 交 AC 于点 H ,

$$\therefore \angle ADH = \angle B, \angle AHD = \angle ACB, \angle FDH = \angle E,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle ACB = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADH = \angle AHD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADH$ 是等边三角形，

$$\therefore DH = AD,$$

$$\because AD = CE,$$

$$\therefore DH = CE,$$

在 $\triangle DHF$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases} \angle FDH = \angle E \\ \angle DFH = \angle EFC, \\ DH = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DHF \cong \triangle ECF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DF = EF;$$

(3) $\because \triangle ADH$ 是等边三角形， $DG \perp AC$,

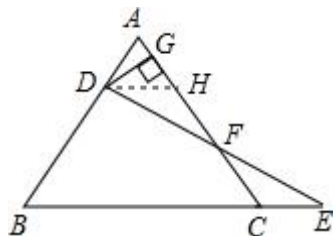
$$\therefore AG = GH,$$

$$\therefore S_{\triangle ADG} = S_{\triangle HDG},$$

$$\because \triangle DHF \cong \triangle ECF,$$

$$\therefore S_{\triangle DHF} = S_{\triangle ECF},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = S_{\triangle DGH} + S_{\triangle DHF} = S_{\triangle ADG} + S_{\triangle ECF}.$$

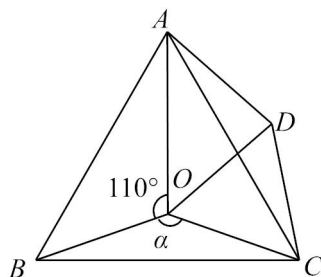


21. 如图，点 O 是等边 $\triangle ABC$ 内一点， D 是 $\triangle ABC$ 外的一点， $\angle AOB = 110^\circ$ ， $\angle BOC = \alpha$ ， $\triangle BOC \cong \triangle ADC$ ， $\angle OCD = 60^\circ$ ，连接 OD 。

(1) 求证： $\triangle OCD$ 是等边三角形；

(2) 当 $\alpha = 150^\circ$ 时，试判断 $\triangle AOD$ 的形状，并说明理由；

(3) 探究：当 α 为多少度时， $\triangle AOD$ 是等腰三角形。



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：(1) $\because \triangle BOC \cong \triangle ADC$,

$$\therefore OC = DC,$$

$$\because \angle OCD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形.

解：

(2) $\triangle AOD$ 是直角三角形.

理由如下：

$\because \triangle OCD$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ODC = 60^\circ,$$

$\because \triangle BOC \cong \triangle ADC$ ， $\alpha = 150^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADC = \angle BOC = \alpha = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOD$ 是直角三角形.

(3) $\because \triangle OCD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle COD = \angle ODC = 60^\circ.$$

$$\because \angle AOB = 110^\circ, \angle ADC = \angle BOC = \alpha,$$

$$\therefore \angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD = 360^\circ - 110^\circ - \alpha - 60^\circ = 190^\circ - \alpha,$$

$$\angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = \alpha - 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = 180^\circ - \angle AOD - \angle ADO = 180^\circ - (190^\circ - \alpha) - (\alpha - 60^\circ) = 50^\circ.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \angle AOD = \angle ADO \text{ 时, } 190^\circ - \alpha = \alpha - 60^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 125^\circ.$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \angle AOD = \angle OAD \text{ 时, } 190^\circ - \alpha = 50^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 140^\circ.$$

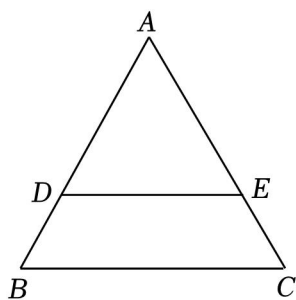
$$\textcircled{3} \text{ 当 } \angle ADO = \angle OAD \text{ 时,}$$

$$\alpha - 60^\circ = 50^\circ,$$

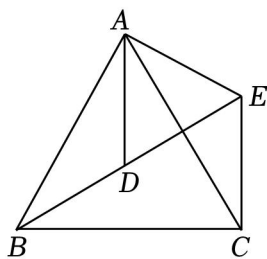
$$\therefore \alpha = 110^\circ.$$

综上所述: 当 $\alpha = 110^\circ$ 或 125° 或 140° 时, $\triangle AOD$ 是等腰三角形.

22. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形.



图①



图②

(1) 如图①, $DE \parallel BC$, 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E . 求证: $\triangle ADE$ 是等边三角形;

(2) 如图②, $\triangle ADE$ 仍是等边三角形, 点 B 在 ED 的延长线上, 连接 CE , 判断 $\angle BEC$ 的度数及线段 AE 、 BE 、 CE 之间的数量关系, 并说明理由.

【答案】 见试题解答内容

【解答】(1) 证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B = 60^\circ, \angle AED = \angle C = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形；

(2) 解： $AE + CE = BE$.

$$\because \angle BAD + \angle DAC = 60^\circ, \angle CAE + \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

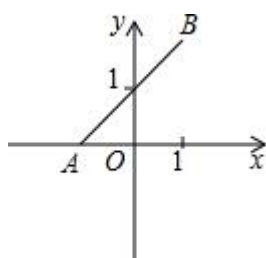
$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CE, \angle AEC = \angle ADB = 120^\circ,$$

$$\therefore BE = BD + DE = AE + CE, \angle BEC = \angle AEC - \angle AED = 60^\circ.$$

一十二. 直角三角形的性质 (共 1 小题)

23. 如图，已知点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(1, 2)$ ，在坐标轴上确定点 P ，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形，则满足这样条件的点 P 共有 ()



A. 2 个

B. 4 个

C. 6 个

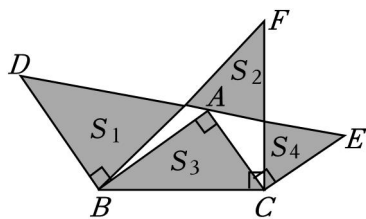
D. 7 个

【答案】C

【解答】解：①以 A 为直角顶点，可过 A 作直线垂直于 AB ，与坐标轴交于一点，这一点符合点 P 的要求；

②以 B 为直角顶点，可过 B 作直线垂直于 AB ，与坐标轴交于两点，这两点也符合 P 点的要求；

③以 P 为直角顶点，可以 AB 为直径画圆，与坐标轴共有 3 个交点.



【答案】2.5.

【解答】解：∵ $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACE$ 、 $\triangle BCF$ 均是等腰直角三角形，

∴ $AB=BD$ ， $AC=CE$ ， $BC=CF$ ，

设 $AB=BD=a$ ， $AC=CE=b$ ， $BC=CF=c$ ， $S_{\triangle ABG}=m$ ， $S_{\triangle ACH}=n$ ，

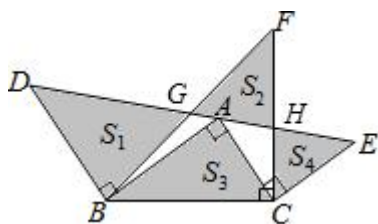
∴ $a^2+b^2=c^2$ ，

∴ $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACE}=S_{\triangle BCF}$ ，

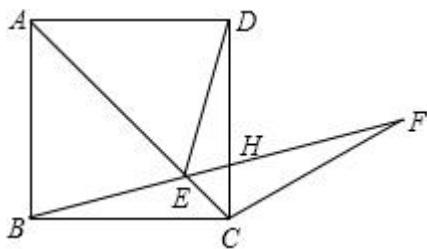
∴ $S_1+m+n+S_4=S_2+S_3+m+n$ ，

∴ $S_4=3.5+5.5-6.5=2.5$

故答案为：2.5.



26. 如图，在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上取一点 E ，使得 $\angle CDE=15^\circ$ ，连接 BE 并延长 BE 到 F ，使 $CF=CB$ ， BF 与 CD 相交于点 H ，若 $AB=\sqrt{6}$ ，有下列四个结论：① $\angle CBE=15^\circ$ ；② $AE=\sqrt{3}+1$ ；③ $S_{\triangle DEC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ；④ $CE+DE=EF$ 。则其中正确的结论有 ①②④。（填序号）



【答案】见试题解答内容

【解答】解：①∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $BC=CD$ ， $\angle BCE=\angle DCE=45^\circ$ 。

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCE$ 中，
$$\begin{cases} BC=DC \\ \angle BCE=\angle DCE, \\ CE=CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDE = 15^\circ, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{②过 } D \text{ 作 } DM \perp AC \text{ 于 } M,$$

$$\because \angle CDE = 15^\circ, \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 75^\circ,$$

$$\because \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 60^\circ,$$

$$\because AD = AB = \sqrt{6},$$

$$\therefore AM = DM = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{3},$$

$$\therefore ME = \frac{\sqrt{3}}{3} DM = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1,$$

$$\therefore AE = \sqrt{3} + 1, \text{ 故②正确;}$$

$$\text{③根据勾股定理求出 } AC = 2\sqrt{3},$$

$$\because DM = \sqrt{3}, EM = 1,$$

$$\because \angle DCA = 45^\circ, \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore CM = \sqrt{3},$$

$$\therefore CE = CM - EM = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \text{ 故③错误;}$$

$$\text{④在 } EF \text{ 上取一点 } G, \text{ 使 } EG = EC, \text{ 连接 } CG,$$

$$\because BC = CF,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle F,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDE = \angle F = 15^\circ.$$

$$\therefore \angle CEG = 60^\circ.$$

$$\because CE = GE,$$

$$\therefore \triangle CEG \text{ 是等边三角形.}$$

$$\therefore \angle CGE = 60^\circ, CE = GC,$$

$$\therefore \angle GCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle GCF.$$

在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle FGC$ 中，
$$\begin{cases} CE=GC \\ \angle ECD=\angle GCF, \\ CD=CF \end{cases}$$

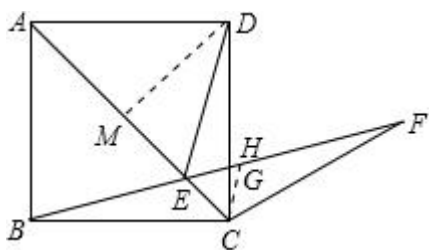
$\therefore \triangle DEC \cong \triangle FGC$ (SAS),

$\therefore DE = GF$.

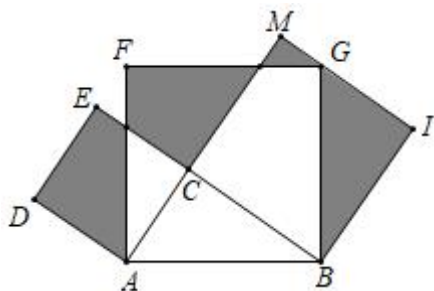
$\therefore EF = EG + GF$,

$\therefore EF = CE + ED$, 故④正确;

故答案为: ①②④.

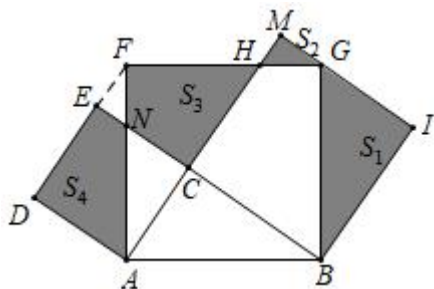


27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以 AC , BC 和 AB 为边向上作正方形 $ACED$ 和正方形 $BCMI$ 和正方形 $ABGF$, 点 G 落在 MI 上, 若 $AC + BC = 7$, 空白部分面积为16, 则图中阴影部分的面积是 $-\frac{99}{5}$.



【答案】 $\frac{99}{5}$.

【解答】解: 如图,



$\therefore$ 四边形 $ABGF$ 是正方形,

$\therefore \angle FAB = \angle AFG = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle FAC + \angle BAC = \angle FAC + \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle FAC = \angle ABC$,

$$\therefore \triangle FAH \cong \triangle ABN \text{ (ASA)},$$

$$\therefore S_{\triangle FAH} = S_{\triangle ABN},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\text{四边形FNCH}},$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore AC + BC = 7,$$

$$\therefore (AC + BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC = 49,$$

$$\therefore AB^2 + 2AC \cdot BC = 49,$$

$$\therefore AB^2 - S_{\triangle ABC} = 16,$$

$$\therefore AB^2 - \frac{1}{2}AC \cdot BC = 16,$$

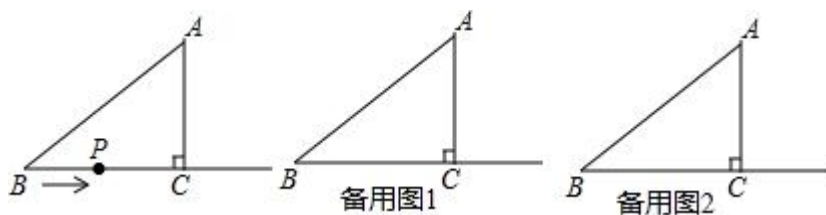
$$\therefore BC \cdot AC = \frac{66}{5}, \quad AB^2 = \frac{113}{5},$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = \frac{113}{5},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积和} = AC^2 + BC^2 + 2S_{\triangle ABC} - S_{\text{白}} = \frac{113}{5} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{66}{5} - 16 = \frac{99}{5}.$$

故答案为: $\frac{99}{5}$.

28. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, 动点 P 从点 B 出发沿射线 BC 以 2cm/s 的速度移动, 设运动的时间为 t 秒.



(1) 求 BC 边的长;

(2) 当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时, 求 t 的值;

(3) 当 $\triangle ABP$ 为等腰三角形时, 求 t 的值.

【答案】 见试题解答内容

【解答】 解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 10^2 - 6^2 = 64$,

$$\therefore BC = 8 \text{ (cm)};$$

(2) 由题意知 $BP = 2t\text{cm}$,

① 当 $\angle APB$ 为直角时, 点 P 与点 C 重合, $BP = BC = 8\text{cm}$, 即 $t = 4$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/038102027072006103>