

湖北省武汉市江夏一中 2023 届高三数学试题毕业班适应性测试试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

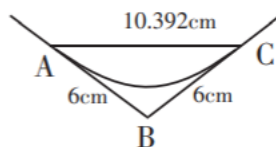
1. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(x) - f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{2}{1-x^2}$ ，若对 $\forall x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ ， $|f(ax+1)| < |f(x-1)|$

恒成立，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-3, -1)$ B. $(-4, -1)$ C. $(-3, 0)$ D. $(-4, 0)$

2. 达芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名.如图，画中女子神秘的微笑，，数百年来让无数观赏者人迷.某业余爱好者对《蒙娜丽莎》的缩小影像作品进行了粗略测绘，将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧，在嘴角 A, C 处作圆弧的切线，

两条切线交于 B 点，测得如下数据： $AB = 6cm, BC = 6cm, AC = 10.392cm$ (其中 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$) .根据测量得到的结果推算：将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角大约等于 ()



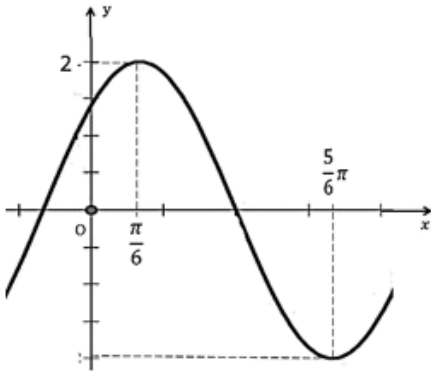
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

3. 已知数列 $\{\square_n\}$ 满足： $\square_n = \begin{cases} 2, & n \leq 5 \\ \square_1 \square_2 \dots \square_{n-1} - 1, & n \geq 6 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$.若正整数 $\square (\square \geq 5)$ 使得

$\square_1^2 + \square_2^2 + \dots + \square_\square^2 = \square_1 \square_2 \dots \square_\square$ 成立，则 $\square =$ ()

- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

4. 已知 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) \left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R} \right)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的表达式是 ()



A. $2 \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

C. $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

D. $2 \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

5. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则点 $P(x, y)$ 所在区域的面积是()

A. 1

B. 2

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

6. 在 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)(2x + 1)^3$ 展开式中的常数项为()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 7

7. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$,

$\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 则椭圆 E 的离心率为()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

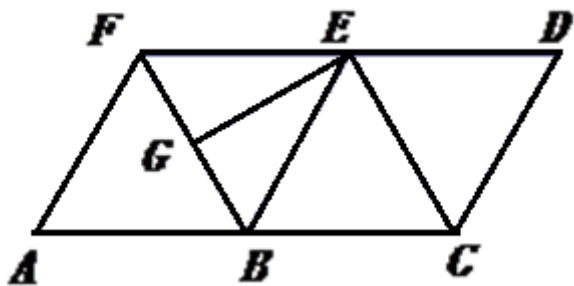
A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$

B. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$

C. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$

D. $\{x | x \geq -1\}$

9. 下图为一个正四面体的侧面展开图, G 为 BF 的中点, 则在原正四面体中, 直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x, & \frac{1}{8} \leq x < 1 \\ 2^x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 若 $f(a) = f(b)$ ($a < b$), 则 ab 的最小值为 ()

参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln^2 2 \approx 0.48$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\log_2 \sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(-x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令

$a = \ln 2, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, c = \log_{\frac{1}{2}} 2$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 ()

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$
C. $f(b) < f(a) < f(c)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 = 2, S_6 = 21$, 则 $a_5 =$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为_____.

14. 点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右支上, 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 PF_1 与以坐标原点 O 为圆心、 a 为半径的圆相切于点 A , 线段 PF_1 的垂直平分线恰好过点 F_2 , 则该双曲线的渐近线的斜率为_____.

15. 若函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像与直线 $y = m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

,则实数 ω 的值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2f'(1)\ln x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线斜率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 某中学的甲、乙、丙三名同学参加高校自主招生考试, 每位同学彼此独立的从 A, B, C, D, E 五所高校中任选 2 所.

(1) 求甲、乙、丙三名同学都选 D 高校的概率;

(2) 若已知甲同学特别喜欢 A 高校, 他必选 A 校, 另在 B, C, D, E 四校中再随机选 1 所; 而同学乙和丙对五所高校没有偏爱, 因此他们每人在五所高校中随机选 2 所.

(i) 求甲同学选 D 高校且乙、丙都未选 D 高校的概率;

(ii) 记 X 为甲、乙、丙三名同学中选 D 高校的人数, 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

18. (12 分) 设函数 $f(x) = 2x^2 + a\ln x$, ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + m$, 求实数 a, m 的值;

(2) 若 $f(2x-1) + 2 > 2f(x)$ 对任意 $x \in [2, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 关于 x 的方程 $f(x) + 2\cos x = 5$ 能否有三个不同的实根? 证明你的结论.

19. (12 分) 已知 AB 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的直径, 动圆 M 过 A, B 两点, 且与直线 $y + 2 = 0$ 相切.

(1) 若直线 AB 的方程为 $x - y = 0$, 求圆 M 的方程;

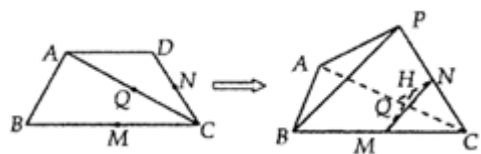
(2) 在 y 轴上是否存在一个定点 P , 使得以 MP 为直径的圆恰好与 x 轴相切? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{e^x}$ ($a > 0$) 的导函数 $y = f'(x)$ 的两个零点为 -3 和 0 .

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 的极小值为 $-e^3$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-5, +\infty)$ 上的最大值.

21. (12 分) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = AB = CD = 2$, $BC = 4$, M, N, Q 分别为 BC, CD, AC 的中点, 以 AC 为折痕将 $\triangle ACD$ 折起, 使点 D 到达点 P 位置 ($P \notin$ 平面 ABC).



(1) 若 H 为直线 QN 上任意一点, 证明: $MH \parallel$ 平面 ABP ;

(2) 若直线 AB 与直线 MN 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t\cos\frac{\pi}{3} \\ y = 1 + t\sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}\cos\varphi \\ y = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sin\varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数}), \text{ 以 } O \text{ 为极点, } x \text{ 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.}$$

(1) 求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2) 已知射线 $OM: \theta_1 = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 与曲线 C 交于 O, M 两点, 射线 $ON: \theta_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}$ 与直线 l 交于 N 点, 若

$\triangle OMN$ 的面积为 1, 求 α 的值和弦长 $|OM|$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

先根据函数奇偶性求得 $f(x), f'(x)$, 利用导数判断函数单调性, 利用函数单调性求解不等式即可.

【详解】

因为函数 $f(x)$ 是奇函数,

所以函数 $f'(x)$ 是偶函数.

$$f(-x) - f'(-x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{2}{1-x^2},$$

$$\text{即 } -f(x) - f'(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{2}{1-x^2},$$

$$\text{又 } f(x) - f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{2}{1-x^2},$$

$$\text{所以 } f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x), \quad f'(x) = \frac{2}{1-x^2}.$$

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ ，所以 $f'(x) = \frac{2}{1-x^2} > 0$ ，

则函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为单调递增函数.又在 $(0,1)$ 上，

$f(x) > f(0) = 0$ ，所以 $|f(x)|$ 为偶函数，且在 $(0,1)$ 上单调递增.

由 $|f(ax+1)| < |f(x-1)|$ ，

可得 $\begin{cases} |ax+1| < |x-1| \\ -1 < ax+1 < 1 \end{cases}$ ，对 $x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ 恒成立，

则 $\begin{cases} |ax+1| < 1-x \\ -\frac{2}{x} < a < 0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} 1-\frac{2}{x} < a < -1 \\ -\frac{2}{x} < a < 0 \end{cases}$ 对 $x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ 恒成立，，

得 $\begin{cases} -3 < a < -1 \\ -4 < a < 0 \end{cases}$ ，

所以 a 的取值范围是 $(-3,-1)$.

故选：A.

【点睛】

本题考查利用函数单调性求解不等式，根据方程组法求函数解析式，利用导数判断函数单调性，属压轴题.

2. A

【解析】

由已知 $AB = BC = 6$ ，设 $\angle ABC = 2\theta$ ．可得 $\sin \theta = \frac{5.196}{7} = 0.866$ ．于是可得 θ ，进而得出结论．

【详解】

解：依题意 $AB = BC = 6$ ，设 $\angle ABC = 2\theta$ ．

则 $\sin \theta = \frac{5.196}{7} = 0.866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$ ．

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ ， $2\theta = \frac{2\pi}{3}$ ．

设《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角为 α ．

则 $\alpha + 2\theta = \pi$ ，

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ ．

故选：A.

【点睛】

本题考查了直角三角形的边角关系、三角函数的单调性、切线的性质，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

3. B

【解析】

由题意可得 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 2$, $a_6 = a_1 a_2 a_3 \dots a_5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$, $n \geq 6$ 时, $a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 1 + a_n$,

将 a_n 换为 $a_n + 1$, 两式相除, $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$, $n \geq 6$,

累加法求得 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$ 即有

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 20 + a_{n+1} - a_6 + n - 5 = a_{n+1} + n - 16$, 结合条件, 即可得到所求值.

【详解】

解: $a_n = \begin{cases} 2, & n \leq 5 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} - 1, & n \geq 6 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$,

即 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 2$, $a_6 = a_1 a_2 a_3 \dots a_5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$,

$n \geq 6$ 时, $a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 1 + a_n$,

$a_1 a_2 \dots a_n = 1 + a_{n+1}$,

两式相除可得 $\frac{1+a_{n+1}}{1+a_n} = a_n$,

则 $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$, $n \geq 6$,

由 $a_6^2 = a_7 - a_6 + 1$,

$a_7^2 = a_8 - a_7 + 1$,

...

$a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$, $n \geq 5$,

可得 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 20 + a_{n+1} - a_6 + n - 5 = a_{n+1} + n - 16$,

且 $a_1 a_2 \dots a_n = 1 + a_{n+1}$,

正整数 $n (n \geq 5)$ 时, 要使得 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1 a_2 \dots a_n$ 成立,

则 $a_{n+1} + n - 16 = a_{n+1} + 1$,

则 $n = 17$,

故选：□.

【点睛】

本题考查与递推数列相关的方程的整数解的求法，注意将题设中的递推关系变形得到新的递推关系，从而可简化与数列相关的方程，本题属于难题.

4. D

【解析】

由图象求出 A 以及函数 $y = f(x)$ 的最小正周期 T 的值，利用周期公式可求得 ω 的值，然后将点 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ 的坐标代入函数 $y = f(x)$ 的解析式，结合 φ 的取值范围求出 φ 的值，由此可得出函数 $y = f(x)$ 的解析式.

【详解】

由图象可得 $A = 2$ ，函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$ ， $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2}$.

将点 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ 代入函数 $y = f(x)$ 的解析式得 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2$ ，得 $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ，

$Q -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore -\frac{\pi}{4} < \varphi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ ，则 $\varphi + \frac{\pi}{4} = 0$ ， $\therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}$ ，

因此， $f(x) = 2 \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用图象求三角函数解析式，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

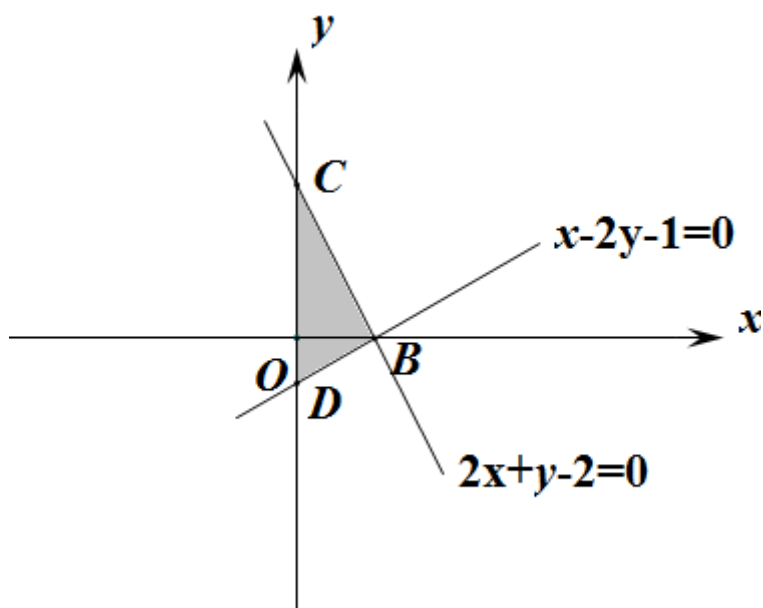
5. C

【解析】

画出不等式表示的平面区域，计算面积即可.

【详解】

不等式表示的平面区域如图：



直线 $2x + y - 2 = 0$ 的斜率为 -2 ，直线 $x - 2y - 1$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，所以两直线垂直，故 $\triangle BCD$ 为直角三角形，易得

$$B(1, 0), D(0, -\frac{1}{2}), C(0, 2), |BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}, |BC| = \sqrt{5} \text{ 所以阴影部分面积 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |BD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{5}{4}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查不等式组表示的平面区域面积的求法，考查数形结合思想和运算能力，属于常考题.

6. D

【解析】

求出 $(2x+1)^3$ 展开项中的常数项及含 x 的项，问题得解。

【详解】

$(2x+1)^3$ 展开项中的常数项及含 x 的项分别为：

$$C_3^3 (1)^3 (2x)^0 = 1, C_3^1 (2x)^1 \times 1^2 = 6x,$$

$$\text{所以} \left(1 + \frac{1}{x}\right) (2x+1)^3 \text{ 展开式中的常数项为: } 1 \times 1 + \frac{1}{x} \times 6x = 7.$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查了二项式定理中展开式的通项公式及转化思想，考查计算能力，属于基础题。

7. C

【解析】

根据 $\overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$ 表示出线段长度，由勾股定理，解出每条线段的长度，再由勾股定理构造出 a, c 关系，求出离心率。

【详解】

$$\text{Q } \overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$$

设 $\overline{BF_2} = x$ ，则 $\overline{AF_2} = 2x$

由椭圆的定义，可以得到 $\overline{AF_1} = 2a - 2x, \overline{BF_1} = 2a - x$

$$\text{Q } \overline{AF_1} \cdot \overline{AF_2} = 0, \therefore \overline{AF_1} \perp \overline{AF_2}$$

在 $\text{Rt}\triangle AF_1B$ 中，有 $(2a - 2x)^2 + (3x)^2 = (2a - x)^2$ ，解得 $x = \frac{a}{3}$

$$\therefore \overline{AF_2} = \frac{2a}{3}, \overline{AF_1} = \frac{4a}{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，有 $\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = (2c)^2$

$$\text{整理得 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

故选 C 项。

【点睛】

本题考查几何法求椭圆离心率，是求椭圆离心率的一个常用方法，通过几何关系，构造出 a, c 关系，得到离心率。属于中档题。

8. B

【解析】

直接利用集合的基本运算求解即可。

【详解】

解：全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x < 1\}$ ， $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ，

$$\therefore \complement_U A = \{x | x \geq 1\}$$

$$\text{则 } (\complement_U A) \cap B = \{x | x \geq 1\} \cap \{x | -1 \leq x \leq 2\} = \{x | 1 \leq x \leq 2\},$$

故选：B。

【点睛】

本题考查集合的基本运算，属于基础题。

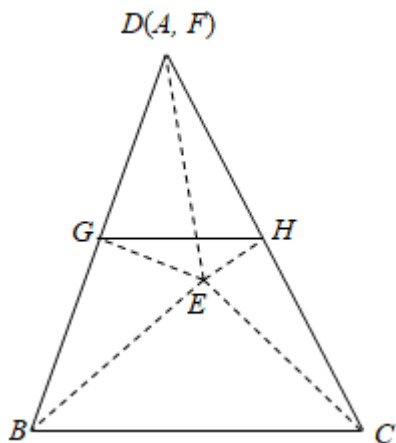
9. C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体， A, D, F 三点重合，记作 D ，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ， $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos \angle EGH$ 。

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A, D, F 三点重合，记作 D ：



则 G 为 BD 中点，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ，设正四面体的棱长均为 a ，

由中位线定理可得 $GH \parallel BC$ 且 $GH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ ，

所以 $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，

$$EG = EH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos \angle EGH = \frac{EG^2 + GH^2 - EH^2}{2EG \cdot GH}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，

故选：C.

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

10. A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/038121142051006137>