

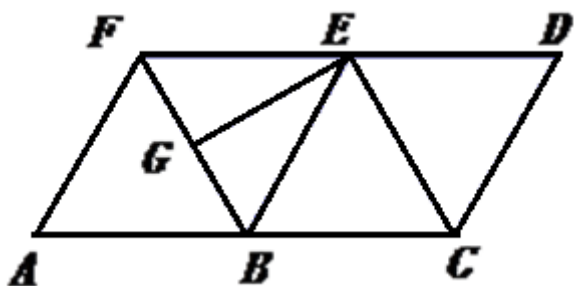
江苏省无锡市江阴市南菁高中 2023-2024 学年高三一诊考试数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下图为一个正四面体的侧面展开图， G 为 BF 的中点，则在原正四面体中，直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$

2. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ，若 $F(x) = f(x) - 3kx^2$ 有 2 个零点，则实数 k 的取值范围为（ ）

- A. $\left(-\frac{1}{6e^2}, 0\right)$
- B. $\left(-\frac{1}{6e}, 0\right)$
- C. $\left(0, \frac{1}{6e}\right)$
- D. $\left(0, \frac{1}{6e^2}\right)$

3. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a > b$ ，则下列不等式成立的是（ ）

- A. $c - a < c - b$
- B. $ac^2 > bc^2$
- C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- D. $\frac{b}{a} < 1$

4. 观察下列各式： $x \otimes y = 2$ ， $x^2 \otimes y^2 = 4$ ， $x^3 \otimes y^3 = 9$ ， $x^4 \otimes y^4 = 17$ ， $x^5 \otimes y^5 = 31$ ， $x^6 \otimes y^6 = 54$ ，

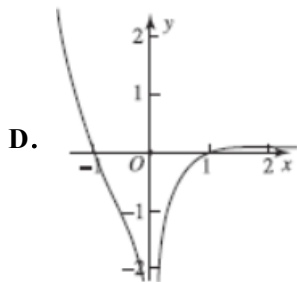
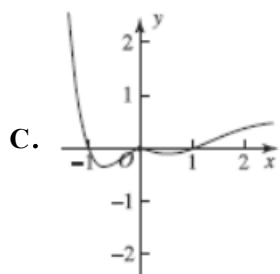
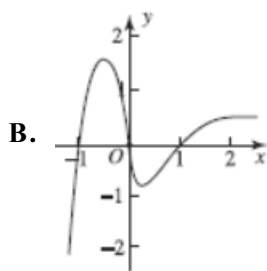
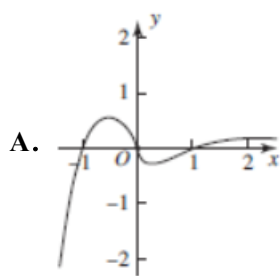
$x^7 \otimes y^7 = 92$ ， $\dots$ ，根据以上规律，则 $x^{10} \otimes y^{10} =$ （ ）

- A. 255
- B. 419
- C. 414
- D. 253

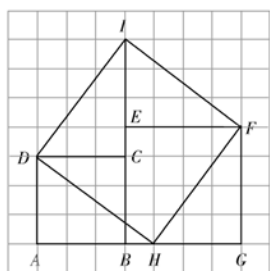
5. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(3, 5)$ ，且 $a = \left(\frac{1}{e}\right)^\alpha$ ， $b = \sqrt[3]{\alpha}$ ， $c = \log_\alpha \frac{1}{4}$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $c < a < b$
- B. $a < c < b$
- C. $a < b < c$
- D. $c < b < a$

6. 函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{e^x}$ 的大致图象为（ ）



7. 刘徽是我国魏晋时期伟大的数学家，他在《九章算术》中对勾股定理的证明如图所示.“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也.合成弦方之幂，开方除之，即弦也”.已知图中网格纸上小正方形的边长为1，其中“正方形 $ABCD$ 为朱方，正方形 $BEFG$ 为青方”，则在五边形 $AGFID$ 内随机取一个点，此点取自朱方的概率为（ ）

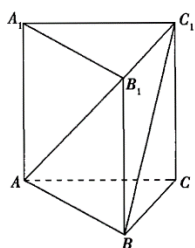


- A. $\frac{16}{37}$ B. $\frac{9}{49}$ C. $\frac{9}{37}$ D. $\frac{3}{11}$

8. 若实数 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + y$ 的取值范围是（ ）

- A. $[4, +\infty)$ B. $[0, 6]$ C. $[0, 4]$ D. $[6, +\infty)$

9. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等，侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ，过 AB_1 作平面 α 与 BC_1 平行，设平面 α 与平面 ACC_1A_1 的交线为 l ，记直线 l 与直线 AB, BC, CA 所成锐角分别为 α, β, γ ，则这三个角的大小关系为（ ）



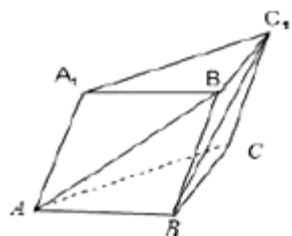
A. $\alpha > \gamma > \beta$

B. $\alpha = \beta > \gamma$

C. $\gamma > \beta > \alpha$

D. $\alpha > \beta = \gamma$

10. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长都相等, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有一点 $P(-3, 4)$, 则 $\sin 2\alpha =$ ().

A. $-\frac{12}{25}$

B. $-\frac{24}{25}$

C. $\frac{16}{5}$

D. $\frac{8}{5}$

12. 已知四棱锥 $E-ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $ED=1$, 平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, 当点 C 到平面 ABE 的距离最大时, 该四棱锥的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. 1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ _____.

14. 连续掷两次骰子, 分别得到的点数作为点 P 的坐标, 则点 P 落在圆 $x^2 + y^2 = 19$ 内的概率为 _____.

15. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $A(0, 0, \sqrt{5})$, $B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$,

$D(\sqrt{3}, 1, \sqrt{5})$, 则该四面体的外接球的体积为 _____.

16. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, 含 $\sqrt{x}$ 项的系数为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 3 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的

正半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 6$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若射线 m 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \geq 0$). 设 m 与 C 相交于点 M , m 与 l 相交于点 N , 求 $|MN|$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x - 1|$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(II) 若存在 $x \in \mathbb{R}$ 满足不等式 $f(x) < 4$, 求实数 a 的取值范围.

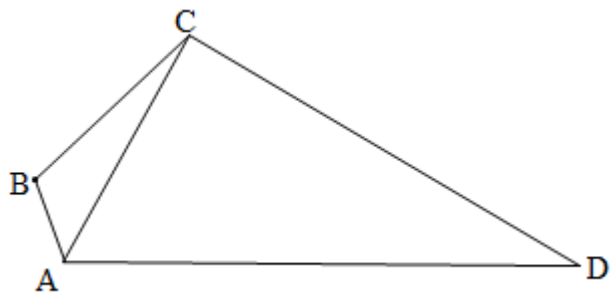
19. (12 分) 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 上、下顶点分别是 A 、 B , 上、下焦点分别是 F_1 、 F_2 , 焦距为 2,

点 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若 Q 为椭圆上异于 A 、 B 的动点, 过 A 作与 x 轴平行的直线 l , 直线 QB 与 l 交于点 S , 直线 F_2S 与直线 AQ 交于点 P , 判断 $\angle SPQ$ 是否为定值, 说明理由.

20. (12 分) 在平面四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$, $AB \perp AD$, $AB = 1$.



(1) 若 $AC = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin \angle CAD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $AD = 4$, 求 CD 的长.

21. (12 分) 网络看病就是国内或者国外的单个人、多个人或者单位通过国际互联网或者其他局域网对自我、他人或者某种生物的生理疾病或者机器故障进行查找询问、诊断治疗、检查修复的一种新兴的看病方式. 因此, 实地看病与网络看病便成为现在人们的两种看病方式. 最近某信息机构调研了患者对网络看病, 实地看病的满意程度, 在每种看病方式的患者中各随机抽取 15 名, 将他们分成两组, 每组 15 人, 分别对网络看病, 实地看病两种方式进行满意度测评, 根据患者的评分 (满分 100 分) 绘制了如图所示的茎叶图:

网络看病							实地看病					
1	1	2	3	5	6	6						
		2	3	3	4	7	2	4	5	8	9	
		2	5	5	8	8	3	6	7	7	8	8
				2		9	4	6	8	8		

(1) 根据茎叶图判断患者对于网络看病、实地看病那种方式的满意度更高？并说明理由；

(2) 若将大于等于 80 分视为“满意”，根据茎叶图填写下面的列联表：

	满意	不满意	总计
网络看病			
实地看病			
总计			

并根据列联表判断能否有 90% 的把握认为患者看病满意度与看病方式有关？

(3) 从网络看病的评价“满意”的人中随机抽取 2 人，求这 2 人平分都低于 90 分的概率。

$$\text{附 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = 2, b_1 = -1, a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}, b_n = 2b_{n-1} - a_{n-1}, n \in N^*, n \geq 2$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n - b_n\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\left\{ \frac{3^n}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

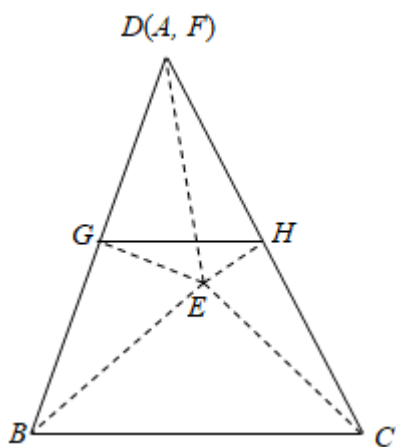
1、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体， A, D, F 三点重合，记作 D ，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ， $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos \angle EGH$ 。

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A, D, F 三点重合，记作 D ：



则 G 为 BD 中点，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ，设正四面体的棱长均为 a ，

由中位线定理可得 $GH \parallel BC$ 且 $GH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ ，

所以 $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，

$$EG = EH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

由余弦定理可得 $\cos \angle EGH = \frac{EG^2 + GH^2 - EH^2}{2EG \cdot GH}$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$,

故选：C.

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

2、C

【解析】

令 $F(x) = f(x) - 3kx^2 = 0$ ，可得 $k = \frac{\ln x}{3x^2}$ ，要使得 $F(x) = 0$ 有两个实数解，即 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，结合已知，即可求得答案.

【详解】

$$\text{令 } F(x) = f(x) - 3kx^2 = 0,$$

$$\text{可得 } k = \frac{\ln x}{3x^2},$$

要使得 $F(x) = 0$ 有两个实数解，即 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，

$$\text{Q } g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{3x^3},$$

$$\text{令 } 1 - 2\ln x = 0,$$

$$\text{可得 } x = \sqrt{e},$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增；

当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减.

$$\therefore \text{当 } x = \sqrt{e} \text{ 时, } g(x)_{\max} = \frac{1}{6e},$$

$$\therefore \text{若直线 } y = k \text{ 和 } g(x) = \frac{\ln x}{3x^2} \text{ 有两个交点, 则 } k \in \left(0, \frac{1}{6e}\right).$$

$$\therefore \text{实数 } k \text{ 的取值范围是 } \left(0, \frac{1}{6e}\right).$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了根据零点求参数范围，解题关键是掌握根据零点个数求参数的解法和根据导数求单调性的步骤，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

3、A

【解析】

A 项，由 $a > b$ 得到 $-a < -b$ ，则 $c - a < c - b$ ，故 A 项正确；

B 项，当 $c = 0$ 时，该不等式不成立，故 B 项错误；

C 项, 当 $a=1$, $b=-2$ 时, $1 > -\frac{1}{2}$, 即不等式 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立, 故 C 项错误;

D 项, 当 $a=-1$, $b=-2$ 时, $\frac{b}{a} = 2 > 1$, 即不等式 $\frac{b}{a} < 1$ 不成立, 故 D 项错误.

综上所述, 故选 A.

4、B

【解析】

每个式子的值依次构成一个数列 $\{a_n\}$, 然后归纳出数列的递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ 后再计算.

【详解】

以及数列的应用根据题设条件, 设数字 2, 4, 9, 17, 31, 54, 92, $\dots$ 构成一个数列 $\{a_n\}$, 可得数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n \quad (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{则 } a_8 = a_7 + a_6 + 8 = 54 + 92 + 8 = 154,$$

$$a_9 = a_8 + a_7 + 9 = 154 + 92 + 9 = 255, \quad a_{10} = a_9 + a_8 + 10 = 255 + 154 + 10 = 419.$$

故选: B.

【点睛】

本题主要考查归纳推理, 解题关键是通过数列的项归纳出递推关系, 从而可确定数列的一些项.

5、A

【解析】

根据题意求得参数 α , 根据对数的运算性质, 以及对数函数的单调性即可判断.

【详解】

依题意, 得 $3^\alpha = 5$, 故 $\alpha = \log_3 5 \in (1, 2)$,

$$\text{故 } 0 < a = \left(\frac{1}{e}\right)^{\log_3 5} < 1, \quad b = \sqrt[3]{\log_3 5} > 1, \quad c = \log_{\log_3 5} \frac{1}{4} < 0,$$

则 $c < a < b$.

故选: A.

【点睛】

本题考查利用指数函数和对数函数的单调性比较大小, 考查推理论证能力, 属基础题.

6、A

【解析】

利用特殊点的坐标代入, 排除掉 C, D; 再由 $f(-\frac{1}{2}) < 1$ 判断 A 选项正确.

【详解】

$$f(-1.1) = \frac{-1.1 \ln |1.1|}{e^{1.1}} < 0, \text{ 排除掉 C, D;}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1}{2}\right|}{e^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{e} \ln \sqrt{2},$$

$$Q \ln \sqrt{2} < \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{e} < 2,$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \ln \sqrt{2} < 1.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查了由函数解析式判断函数的大致图象问题, 代入特殊点, 采用排除法求解是解决这类问题的一种常用方法, 属于中档题.

7、C

【解析】

首先明确这是一个几何概型面积类型, 然后求得总事件的面积和所研究事件的面积, 代入概率公式求解.

【详解】

因为正方形 $ABCD$ 为朱方, 其面积为 9,

$$\text{五边形 } AGFID \text{ 的面积为 } S_{ABCD} + S_{BGFE} + S_{\triangle DCI} + S_{\triangle DEF} = 37,$$

所以此点取自朱方的概率为 $\frac{9}{37}$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查了几何概型的概率求法, 还考查了数形结合的思想和运算求解的能力, 属于基础题.

8、B

【解析】

根据所给不等式组, 画出不等式表示的可行域, 将目标函数化为直线方程, 平移后即可确定取值范围.

【详解】

$$\text{实数 } x, y \text{ 满足的约束条件 } \begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}, \text{ 画出可行域如下图所示:}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/038131051006006063>