

华大新高考联盟 2024 届高三 4 月教学质量测评

数学（理科）

本试题卷共 4 页.满分 150 分，考试用时 120 分钟.

注意事项：

- 1. 答题前，考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置，认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致，并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置.
- 2. 选择题的作答：选出答案后，用 2B 铅笔把答题卷. 上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.答在试题卷上无效.
- 3. 非选择题的作答：用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内.答在试题卷上或答题卷指定区域外无效.
- 4. 考试结束，监考人员将答题卷收回，考生自己保管好试题卷，评讲时带来.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

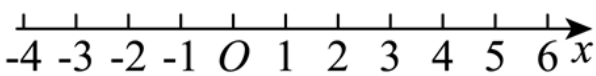
1. 若集合 $A = \{x \mid 3x^2 - 16x + 0\}$, $B = \{x \mid y = \ln(5x - 2)\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{5}{2}\}$
- B. $\{x \mid \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{16}{3}\}$
- C. $\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{2}{5}\}$
- D. $\{x \mid \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{16}{3}\}$

2. 已知 $z = (2a - 1) - (a - 1)i$ ($a \in \mathbb{R}$)，则 “ $|z| = \sqrt{2}$ ”是 “ $a = \frac{2}{5}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

3. 如图所示，已知一质点在外力的作用下，从原点 O 出发，每次向左移动的概率为 $\frac{2}{3}$ ，向右移动的概率为 $\frac{1}{3}$ 。若该质点每次移动一个单位长度，设经过 5 次移动后，该质点位于 X 的位置，则 $P(X = 0)$ ()



- A. $\frac{50}{243}$
- B. $\frac{52}{243}$
- C. $\frac{2}{9}$
- D. $\frac{17}{81}$

4. 青少年视力问题是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量，通常用五分记录法和小数记录法

记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$. 已知小明和小李视力的五

分记录法的数据分别为 4.5 和 4.9，记小明和小李视力的小数记录法的数据分别为 V_1, V_2 ，则 $\frac{V_2}{V_1}$ ()

- A. (1.52) B. (2,2.5) C. (2.5, 3) D. (3, 3.5)

5. 某公司有营销部门、宣传部门以及人事部门，其中营销部门有 50 人，平均工资为 5 千元，方差为 4，宣传部门有 40 人，平均工资为 3 千元，方差为 8，人事部门有 10 人，平均工资为 3 千元，方差为 6，则该公司所有员工工资的方差为 ()

- A. 6.2 B. 6.4 C. 6.6 D. 6.8

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 BB_1 上靠近 B_1 的三等分点，点 F 是线段 D_1C_1 上靠近 D_1

的三等分点，则平面 AEF 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 形成的截面图形为 ()

- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

7. $\frac{1 - \tan 190^\circ}{1 + \tan 370^\circ} - \frac{2 \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ}$ ()

- A. $\tan 20^\circ$ B. $\tan 70^\circ$ C. $\tan 10^\circ$ D. $\tan 40^\circ$

8. 已知圆柱 OO_2 中， AD, BC 分别是上、下底面的两条直径，且 $AD \perp BC$ ， $AB = BC = 4$ ，若 M 是弧 BC 的中点， N 是线段 AB 的中点，则 ()

- A. $AM \perp CN$ ， A, C, M, N 四点不共面 B. $AM \perp CN$ ， A, C, M, N 四点共面
C. $AM \perp BD$ ， $\triangle ACM$ 为直角三角形 D. $AM \perp CN$ ， $\triangle ACM$ 为直角三角形

9. 若函数 $f(x) = |x^2 - (m-2)x - 1|$ 在 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上单调，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{1}{2}, 1] \cup [3, \frac{9}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \frac{9}{2}]$
C. $[\frac{1}{2}, 1] \cup [3, \frac{9}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \frac{9}{2}]$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(x - \varphi)$ ($\varphi > 0$)，现有如下说法：

①若 $\frac{\pi}{3}$ ，函数 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ 上有最小值，无最大值，且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ，则 $\frac{5}{3}$ ；

②若直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴， $\left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$ 为函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，且 $f(x)$ 在

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减，则 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{18}{17}$ ；

③若 $f(x) = \frac{1}{2}$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上至少有 2 个解，至多有 3 个解，则 $\frac{16}{3}$ ；

则正确的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 若关于 x 的不等式 $a(\ln x - \ln a) - 2e^{2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, \sqrt{e}]$ B. $(0, e]$
C. $(0, e]$ D. $(0, 2e]$

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，点 $M, N, A(2, 2)$ 在抛物线 C 上， $k_{AM} \cdot k_{AN} = 0$ ，其中

$k_{AM} = 1$ ，则 $|\sin \angle FMN - \sin \angle FNM|$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，四位同学给出了四个说法：

小明：双曲线 C 的实轴长为 8；

小红：双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 3；

小强：双曲线 C 的离心率为 $\frac{3}{2}$ ；

小同：双曲线 C 上的点到焦点距离的最小值为 1；

若这 4 位同学中只有 1 位同学的说法错误，则说法错误的是 _____. (横线上填“小明”、“小红”、“小强”或“小同”)

14. 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 M 在线段 BC 上，且 $AM = 10, AC = 14, MC = 6, \angle ABC = \frac{\pi}{4}$ ，则 AB

_____.

15. 已知等边 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的面积为 36π ，动点 M 在圆 O 上，若 $MA + MB + MC \leq 6$ ，则实数 k 的取值范围为 _____.

16. 已知空间四面体 $ABCD$ 满足 $AB = AC = DB = DC$ ， $AD = 2BC = 6$ ，则该四面体外接球体积的最小值为_____.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分.

17. 某农业大学组织部分学生进行作物栽培试验，由于土壤相对贫瘠，前期作物生长较为缓慢，为了增加作物的生长速度，达到预期标准，小明对自己培育的一株作物使用了营养液，现统计了使用营养液十天之内该作物的高度变化

天数 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
作物高度 y/cm	9	10	10	11	12	13	13	14	14	14

（1）观察散点图可知，天数 x 与作物高度 y 之间具有较强的线性相关性，用最小二乘法求出作物高度 y 关于天数 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ （其中 $\hat{a}, \hat{b}$ 用分数表示）；

（2）小明测得使用营养液后第 22 天该作物的高度为 21.3cm，请根据（1）中的结果预测第 22 天该作物的高度的残差.

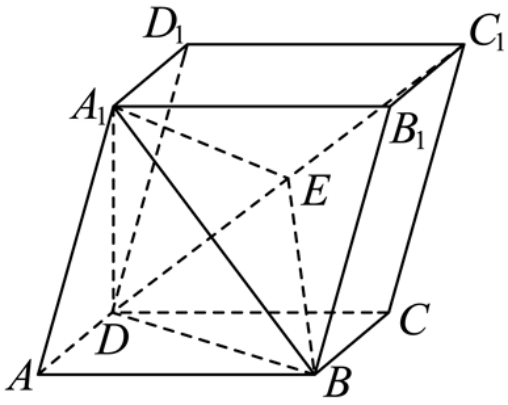
参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$
 参考数据： $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 710.$

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 = 3, 2S_n = n a_n + 2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若存在 $n \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} < a_{n+1}$ 成立，求实数 k 的取值范围.

19. 已知四棱柱 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 如图所示，底面 $ABCD$ 为平行四边形，其中点 D 在平面 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 内的投影为点 A_1 ，且 $AB = AA_1 = 2AD$ ， $\angle ABC = 120^\circ$.



(1) 求证：平面 A_1BD $\perp$ 平面 ADD_1A_1 ；

(2) 已知点 E 在线段 C_1D_1 上（不含端点位置），且平面 A_1BE 与平面 BCC_1B_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，求

$\frac{DE}{EC_1}$ 的值.

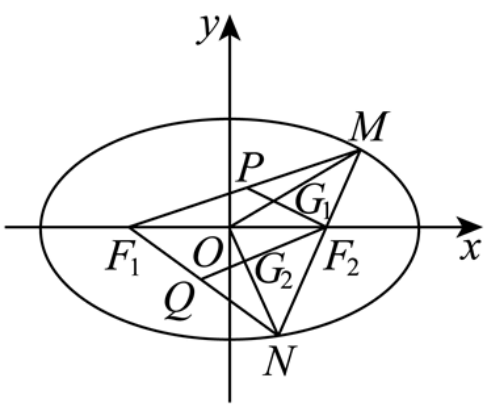
20. 已知函数 $f(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $x \in (1, \pi)$ ，讨论曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = 2\cos x$ 的交点个数.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 短轴长为 2，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C

交于 M, N 两点，其中 M, N 分别在 x 轴上方和下方， $MP \perp PF_1, NQ \perp QF_1$ ，直线 PF_2 与直线 MO 交于点 G_1 ，直线 QF_2 与直线 NO 交于点 G_2 .



(1) 若 G_1 坐标为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ，求椭圆 C 的方程；

(2) 若 $4S_{\triangle MNG_2} = 3S_{\triangle NF_1G_1} = 5S_{\triangle MNG_1}$ ，求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分.请考生在第 22, 23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

故选：D.

2. 已知 $z = (2a - 1) + (a - 1)i$ ($a \in \mathbb{R}$), 则 “ $|z| = \sqrt{2}$ ” 是 “ $a = \frac{2}{5}$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

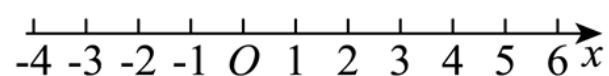
【解析】

【分析】由 $|z| = \sqrt{2}$ 建立 a 的等量关系, 求解 a , 从而判断选项.

【详解】因为 $|z| = \sqrt{(2a - 1)^2 + (a - 1)^2} = \sqrt{2}$, 化简得 $5a^2 - 2a = 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = \frac{2}{5}$, 故 “ $|z| = \sqrt{2}$ ” 是 “ $a = \frac{2}{5}$ ” 的必要不充分条件.

故选：B.

3. 如图所示, 已知一质点在外力的作用下, 从原点 O 出发, 每次向左移动的概率为 $\frac{2}{3}$, 向右移动的概率为 $\frac{1}{3}$. 若该质点每次移动一个单位长度, 设经过 5 次移动后, 该质点位于 X 的位置, 则 $P(X = 0)$ ()



A. $\frac{50}{243}$

B. $\frac{52}{243}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{17}{81}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意当 $X = 0$ 时, X 的可能取值为 1, 3, 5 且 $X \sim B(5, \frac{2}{3})$, 根据二项分布的概率公式计算即可求解.

【详解】依题意, 当 $X = 0$ 时, X 的可能取值为 1, 3, 5 且 $X \sim B(5, \frac{2}{3})$, 所以 $P(X = 0) = P(X = 5) + P(X = 3) + P(X = 1)$

$$= \frac{1}{3}^5 + C_5^1 \frac{1}{3}^4 \frac{2}{3} + C_5^2 \frac{1}{3}^3 \frac{2}{3}^2 = \frac{17}{81}.$$

故选：D.

4. 青少年视力问题是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量, 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 - \lg V$. 已知小明和小李视力的五

分记录法的数据分别为 4.5 和 4.9，记小明和小李视力的小数记录法的数据分别为 V_1, V_2 ，则 $\frac{V_2}{V_1^2}$ ()

- A. (1.52) B. (2,2.5) C. (2.5, 3) D. (3, 3.5)

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意得到方程组，求出 $\frac{V_2}{V_1^2} = \sqrt[5]{100}$ ，根据 $2.5 \leq 98 \leq 100 \leq 3^5 \leq 243$ 得到 $\sqrt[5]{100} \in (2.5, 3)$.

【详解】依题意， $\begin{matrix} 4.9 & 5 & \lg V_2 \\ 4.5 & 5 & \lg V_1 \end{matrix}$ ，两式相减可得， $0.4 = \lg V_2 - \lg V_1 = \lg \frac{V_2}{V_1}$ ，

故 $\frac{V_2}{V_1} = 10^{0.4} = \sqrt[5]{100}$ ，而 $2.5 \leq 98 \leq 100 \leq 3^5 \leq 243$ ，故 $\sqrt[5]{100} \in (2.5, 3)$.

故选：C.

5. 某公司有营销部门、宣传部门以及人事部门，其中营销部门有 50 人，平均工资为 5 千元，方差为 4，宣传部门有 40 人，平均工资为 3 千元，方差为 8，人事部门有 10 人，平均工资为 3 千元，方差为 6，则该公司所有员工工资的方差为 ()

- A. 6.2 B. 6.4 C. 6.6 D. 6.8

【答案】D

【解析】

【分析】先求出总的平均工资，再根据分层抽样的方差公式求解即可

【详解】所有人的平均工资为 $\frac{50 \times 5 + 40 \times 3 + 10 \times 3}{100} = 4$ 千元，

故该公司所有员工工资的方差为 $\frac{1}{100} [50 \times (4 - 5)^2 + 40 \times (4 - 3)^2 + 10 \times (4 - 3)^2] = 6.8$.

故选：D

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 BB_1 上靠近 B_1 的三等分点，点 F 是线段 D_1C_1 上靠近 D_1 的三等分点，则平面 AEF 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 形成的截面图形为 ()

- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

【答案】C

【解析】

【分析】如图，由题意，根据空间线面的位置关系、基本事实以及面面平行的性质定理可得 $l \parallel AE$ ，进而

$FI \parallel AE$ ，结合相似三角形的性质即可求解.

【详解】如图，设 $AB = 6$ ，分别延长 AE 、 AB_1 交于点 G ，此时 $B_1G = 3$ ，

连接 FG 交 BC_1 于 H ，连接 EH ，

设平面 AEF 与平面 DCC_1D_1 的交线为 l ，则 $F \in l$ ，

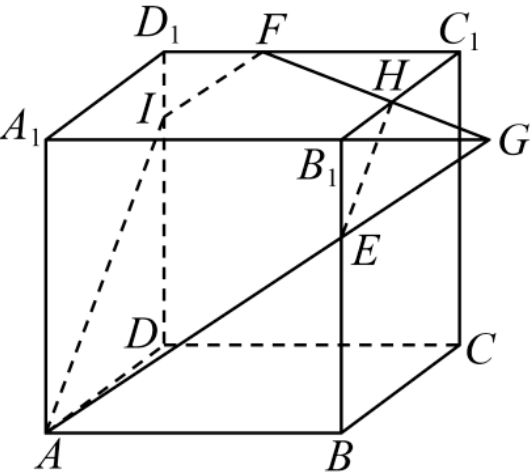
因为平面 $ABB_1A_1 \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ，平面 $AEF \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AE$ ，平面 $AEF \cap$ 平面 $DCC_1D_1 = l$ ，

所以 $l \parallel AE$ ，设 $l \cap DD_1 = I$ ，则 $FI \parallel AE$ ，

此时 $\triangle FD_1I \sim \triangle ABE$ ，故 $ID_1 = \frac{4}{3}$ ，连接 AI ，

所以五边形 $AIFHE$ 为所求截面图形，

故选：C.



7. $\frac{1 - \tan 19^\circ}{1 + \tan 37^\circ} - \frac{2 \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ} = (\quad)$

- A. $\tan 20^\circ$ B. $\tan 70^\circ$ C. $\tan 10^\circ$ D. $\tan 40^\circ$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，结合三角函数的基本关系式、诱导公式和倍角公式，准确化简、运算，即可求解.

【详解】由 $\frac{1 - \tan 19^\circ}{1 + \tan 37^\circ} - \frac{2 \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1 - \tan 10^\circ}{1 + \tan 10^\circ} - \frac{2 \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1 - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}}{1 + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}} - \frac{2 \sin 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{1 - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = -\tan 20^\circ.$$

故选：A.

8. 已知圆柱 OO_2 中， AD ， BC 分别是上、下底面的两条直径，且 $AD \perp BC$ ， $AB = BC = 4$ ，若 M 是弧 BC

的中点，N 是线段 AB 的中点，则（ ）

- A. $AM \perp CN$, A,C,M ,N 四点不共面
 B. $AM \perp CN$, A,C,M ,N 四点共面
 C. $AM \perp BD$, $\triangle ACM$ 为直角三角形
 D. $AM \perp CN$, $\triangle ACM$ 为直角三角形

【答案】D

【解析】

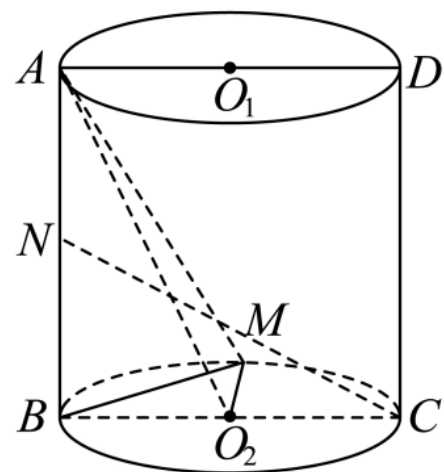
【分析】根据圆柱中的直线与直线、直线与平面的位置关系，逐项判断即可得结论.

【详解】因为点M 是弧BC 的中点，而BC 在平面ACN 内，结合圆柱结构，所以M 在平面ACN 内，故A,C,M ,N 四点不共面；

圆柱 O_1O_2 中，AD , BC 分别是上、下底面的两条直径，且 $AD \perp BC$, $AB = BC = 4$,

若M 是弧BC 的中点，N 是线段AB 的中点，故 $BM = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = 2\sqrt{2}$, $BN = \frac{1}{2}AB = 2$,

所以 $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 2\sqrt{6}$, $CN = \sqrt{CB^2 - BN^2} = 2\sqrt{5}$, 故 $AM \perp CN$;



连接 AO_2 , 则依题有 AO_2 为AM 在平面ABCD 内的射影，在平面ABCD 内显然BD 与 AO_2 不垂直，故AM 与BD 不垂直；

$MC = MB = 2\sqrt{2}$, $AC = 4\sqrt{2}$, $AM^2 + MC^2 = AC^2$, 则 $\triangle ACM$ 为直角三角形，

故选：D .

9. 若函数 $f(x) = |x^2 - (m-2)x - 1|$ 在 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上单调，则实数m 的取值范围为（ ）

- A. $[\frac{1}{2}, 1] \cup [3, \frac{9}{2}]$
 B. $[\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \frac{9}{2}]$
 C. $[\frac{1}{2}, 1] \cup [3, \frac{9}{2}]$
 D. $[\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \frac{9}{2}]$

得到 $\frac{12k-6}{17}, k \in \mathbb{Z}$, 即可判断出选项②正确; ③选项, 根据条件, 直接求出方程的解, 从而建方

程组 $\begin{cases} \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 得出 $4, \frac{16}{3}$, 即可得出结果.

【详解】对于①, 因为 $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 有最小值, 所以 $\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = 1$,
所以 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 得到 $8k - \frac{14}{3} = k \in \mathbb{Z}$,

因为 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上有最小值, 无最大值, 所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, 即 $\frac{12}{12} = 1$, 令 $k = 0$, 得 $\frac{14}{3}$,

故①错误;

对于②, 根据题意, 有 $\frac{\pi}{4} = 2k_1\pi - \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbb{Z}$,
 $\frac{5\pi}{3} = k_2\pi - k_2 \in \mathbb{Z}$,
 $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$

得出 $\frac{12(2k_1 - k_2) - 6}{17}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, 即 $\frac{12k - 6}{17}, k \in \mathbb{Z}$, 得到 $\frac{6}{17}$ 或 $\frac{18}{17}$, 故②正确;

对于③, 令 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ 或 $x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,
则 $x = \frac{2k\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ 或 $x = \frac{2k\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,

故需要上述相邻三个根的距离不超过 $\frac{\pi}{2}$, 相邻四个根 (距离较小的四个) 的距离超过 $\frac{\pi}{2}$, 即 $\begin{cases} \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\ \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

解得 $4, \frac{16}{3}$, 故③正确,

故选: C.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出抛物线方程，联立，结合韦达定理求得M，N的坐标，从而求得直线MN的方程，求出点F到直线MN的距离d，表示出 $|\sin \angle FMN - \sin \angle FNM|$ ，利用换元，结合基本不等式从而可求答案.

【详解】点A(2,2)在抛物线C上，把点A(2,2)代入C： $y^2 = 2px$ ($p > 0$)中得 $2^2 = 2p$ ，则 $p = 1$ ，

所以抛物线为C： $y^2 = 2x$ ，直线AM： $y - 2 = k(x - 2)$ ，

与抛物线方程联立可得， $ky^2 - 2y + 4 - 4k = 0$ ，则 $y_M = 2 - \frac{4 - 4k}{k}$ ，则 $y_M = \frac{2 - 2k}{k}$ ， $k_{AM} = k_{AN} = 0$ ，

则 $k_{AN} = k$ ，

所以用 k 替换可得 $y_N = \frac{2 - 2k}{k}$ ，则 $k_{MN} = \frac{\frac{y_M}{x_M} - \frac{y_N}{x_N}}{\frac{y_M^2}{2} - \frac{y_N^2}{2}} = \frac{2}{y_M - y_N} = \frac{1}{2}$ ，

则M $(\frac{2 - 1 - k^2}{k^2}, \frac{2 - 2k}{k})$ ，故N $(\frac{2 - 1 - k^2}{k^2}, \frac{2 - 2k}{k})$ ，

直线MN： $y = \frac{2 - 2k}{k} - \frac{1}{2}(x - \frac{2 - 1 - k^2}{k^2})$ ，即 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{k^2} - 1$ ，

则点F到直线MN的距离 $d = \frac{\left| \frac{1}{2} - \frac{2 - 2k^2}{k^2} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{5k^2 - 4}{2\sqrt{5}k^2} (k > 1)$ ，

$x_M - x_N = \frac{2 - 1 - k^2}{k^2} - \frac{2 - 1 - k^2}{k^2} = \frac{8}{k}$ ， $x_M x_N = \frac{2 - 1 - k^2}{k^2} \cdot \frac{2 - 1 - k^2}{k^2} = \frac{4 - 1 - k^2^2}{k^4}$ ，

$x_M - x_N = \frac{2 - 1 - k^2}{k^2} - \frac{2 - 1 - k^2}{k^2} = \frac{4 - 4k^2}{k^2}$ ，

而 $|\sin \angle FMN - \sin \angle FNM| = d \left| \frac{1}{|FM|} - \frac{1}{|FN|} \right| = d \left| \frac{1}{x_M - \frac{1}{2}} - \frac{1}{x_N - \frac{1}{2}} \right|$

$$d \left| \frac{\frac{x_M}{2} \frac{x_N}{2} \frac{1}{2} \frac{x_M}{2} \frac{x_N}{2} \frac{1}{4}}{\frac{5k^2}{2\sqrt{5}k^2} \frac{4}{25k^4} \frac{32k^3}{24k^2} \frac{16}{16}} \right|$$

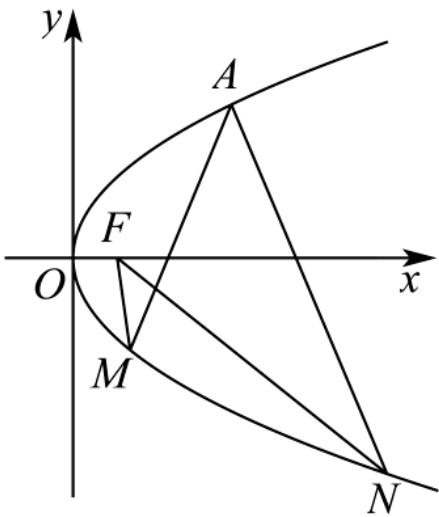
$$\frac{16}{\sqrt{5}} \frac{5k}{25k^2} \frac{4}{24} \frac{16}{\frac{16}{k^2}} \frac{16}{\sqrt{5}} \frac{5k}{5k} \frac{4}{\frac{4}{k^2}} \frac{16}{16},$$

$$\text{令 } t = 5k \cdot \frac{4}{k}, \text{ 因为 } k > 1, \text{ 所以 } t = 5k \cdot \frac{4}{k} > 1,$$

$$\text{故 } |\sin \angle FMN - \sin \angle FNM| = \frac{16}{\sqrt{5}} \frac{t}{t^2 - 16} - \frac{16}{\sqrt{5}} \frac{1}{t - \frac{16}{t}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \frac{1}{2\sqrt{t - \frac{16}{t}}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \frac{1}{8} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{当且仅当 } t = \frac{16}{t} \text{ (即 } t = 4\text{) 时等号成立,}$$

故选：A．



【点睛】关键点点睛：本题求解的关键有两个：一是利用点线距及三角函数表示出目标式；二是利用换元法和基本不等式求解最值．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 关于双曲线C： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ ，四位同学给出了四个说法：

小明：双曲线C 的实轴长为 8；

小红：双曲线C 的焦点到渐近线的距离为 3；

小强：双曲线C 的离心率为 $\frac{3}{2}$ ；

小同：双曲线C 上的点到焦点距离的最小值为 1；

若这 4 位同学中只有 1 位同学的说法错误，则说法错误的是_____．（横线上填“小明”、“小红”、“小强”或“小同”）

【答案】小强

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/045103344222012002>