函数值域的求法8大题型

命题趋势

函数的值域是函数概念中三要素之一，是高考中的必考内容，具有较强的综合性，贯穿整个高中数学的始终。在高考试卷中的形式千变万化，但万变不离其宗，真正实现了常考常新的考试要求，考生在复习过程中首先要掌握一些简单函数的值域求解的基本方法，其次要多看多练在其他板块中涉及值域类型的内容。

满分技巧

一、求函数值域的常见方法

1. 直接法：对于简单函数的值域问题，可通过基本初等函数的图象、性质直接求解；

2. 逐层法：求 $f_1(f_2\cdots f_n(x))$ 型复合函数的值域，利用一些基本初等函数的值域，从内向外逐层求函数的值域；

3. 配方法：配方法是二次型函数值域的基本方法，即形如"$y=ax^x+bx+c(a\neq 0)$"或"$y=a[f(x)]^2+bf(x)+c(a\neq 0)$"的函数均可用配方法求值域；

4. 换元法：利用换元法将函数转化为易求值域的函数，常用的换元有

(1)$y=\dfrac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{cx+d}}{ax+b}$ 的结构，可用"$\sqrt{cx+d}=t$"换元；

(2)$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$(a,b,c,d 均为常数，$a\neq 0,c\neq 0$)，可用"$\sqrt{cx+d}=t$"换元；

(3)$y=bx\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 型的函数，可用"$x=a\cos\theta(\theta\in[0,\pi])$"或"$x=a\sin\theta\left(\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$"换元；

5. 分离常数法：形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ac\neq 0)$ 的函数，应用分离常数法求值域，即 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$，然后求值域；

6. 基本不等式法：形如 $y=ax+\dfrac{b}{x}(ab>0)$ 的函数，可用基本不等式法求值域，利用基本不等式法求函数的值域时，要注意条件"一正、二定、三相等"，即利用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 求函数的值域(或最值)时，应满足三个条件：① $a>0,b>0$；② $a+b$(或 ab)为定值；③取等号的条件为 $a=b$，三个条件缺一不可；

7. 函数单调性法：确定函数在定义域上的单调性，根据函数单调性求出函数值域(或最值)

(1) 形如 $y=ax+b-\sqrt{cx+d}(ac<0)$ 的函数可用函数单调性求值域；

(2) 形如 $y=ax+\dfrac{b}{x}$ 的函数，当 $ab>0$ 时，若利用基本不等式等号不能成立时，可考虑利用对勾函数求解；

当 $ab<0$ 时，$y=ax+\frac{b}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上为单调函数，可直接利用单调性求解。

8. 函数的有界性法：形如 $y=\frac{a\sin x}{c+b\sin x}$（或 $y=\frac{a\cos x}{c+b\cos x}$）(其中 a,b,c 不为 0) 的函数求值域或最值，可用 y 表示出 $\sin x$（或 $\cos x$），再根据 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 且 $\sin x\neq-\frac{c}{b}$（或 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ 且 $\cos x\neq-\frac{c}{b}$），列出关于 y 的取值范围.

类似地，有：① $x^2=f(y)$，则 $f(y)\geqslant 0$；② $a^x=h(y)$，则 $h(y)>0$；③ $\sin x=g(y)$，则 $-1\leqslant g(y)\leqslant 1$

9. 判别式法：形如 $y=\frac{a_2x^2+b_2x+c_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}$ $(a_1a_2\neq 0)$ 或 $y=Ax+B\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(ABa\neq 0)$ 的函数求值域，可将函数转化为关于 x 的方程 $F(x,y)=0$，利用二次项系数不为 0，判别式 $\Delta\geqslant 0$ 或二次项系数为 0，一次方程有解得出函数的值域。

10. 导数法：对可导函数 $f(x)$ 求导，令 $f'(x)=0$，求出极值点，判断函数单调性；

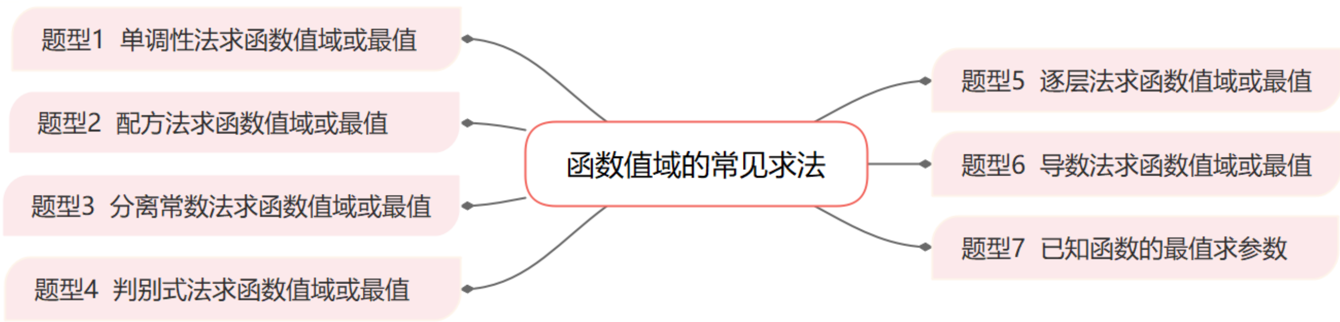
如果定义域是闭区间，则函数最值一定取在极值点处或区间端点处；

如果定义域是开区间且函数存在最值，则函数最值一定取在极值点处。

二、根据最值条件求解参数范围解题思路

已知函数的最值求参数范围时，要视参数为已知数，结合函数值域（或最值）的求法，得到函数的最值（含有参数），再与给出的函数最值作比较，求出参数范围。

热点题型解读



【题型1 单调性法求函数值域或最值】

【例1】(2022秋·陕西西安·高三校考期中) 函数 $f(x)=\frac{1}{x}-2^x$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值是（　　）

A. $-\frac{7}{2}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. 1　　D. -1

【答案】A

【解析】$\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 单调递减，-2^x 在区间 $[1,2]$ 也单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 单调递减，因此 $f(x)_{\min}=f(2)=\frac{1}{2}-2^2=-\frac{7}{2}$，故选：A

【变式1—1】(2022秋·北京·高三北京市第一六一中学校考期中)已知函数$f(x)=e^{|x|}+|x|$,则$f(x)$的值域是________.

【答案】$[1,+\infty)$

【解析】由已知,可得$f(-x)=f(x)$,即函数为偶函数.

又$x\geqslant 0$时,$y=e^x$为增函数,$y=x$为增函数,

所以,$f(x)=e^x+x$为$[0,+\infty)$上的增函数,则$f(x)\geqslant f(1)=1$

所以,$f(x)$的值域是$[1,+\infty)$.

【变式1—2】(2022春·浙江舟山·高三校考开学考试)已知$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则函数$y=\cos x+\frac{4}{\cos x}$(　　)

A. 有最小值4　　B. 有最大值4　　C. 无最小值　　D. 有最大值$+\infty$

【答案】C

【解析】$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$\cos x\in(0,1)$,

因为$t=\cos x$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上递减,$y=t+\frac{4}{t}$在$t\in(0,1)$上单调递减,

函数$y=\cos x+\frac{4}{\cos x}$是定义域上的单调增函数,

且$y>1+4=5$,其值域是$(5,+\infty)$;

所以函数无最大、最小值. 故选:C

【变式1—3】(2022·全国·高三专题练习)函数$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$的最大值为________.

【答案】0

【解析】由$f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln[-(x-1)^2+1]$,且$0<x<2$,

$\therefore$令$t(x)=-(x-1)^2+1$,$f(t)=\ln t$,

即$t(x)$在$0<x<1$为单调递增,$1<x<2$为单调递减,而$f(t)$为增函数,

$\therefore f(x)$在$0<x<1$上单调递增,$1<x<2$上单调递减,$f(x)_{\max}=f(1)=0$.

【变式1—4】(2022秋·江苏苏州·高三校联考阶段练习)已知函数$f(x)=\frac{mx+1}{1+x^2}$是R上的偶函数

(1)求实数m的值,判断函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性;

(2)求函数$f(x)$在$[-3,2]$上的最大值和最小值.

【答案】(1)$m=0$,单调递增;(2)最小值$\frac{1}{10}$,最大值1

【解析】(1)若函数$f(x)=\frac{mx+1}{1+x^2}$是R上的偶函数,则$f(-x)=f(x)$,

即$\frac{m(-x)+1}{1+(-x)^2}=\frac{mx+1}{1+x^2}$,解得$m=0$,

所以$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

(2)由(1)知函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,

又函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数，

所以函数 $f(x)$ 在 $[-3,0]$ 上为增函数，在 $[0,2]$ 上为减函数.

又 $f(-3)=\frac{1}{10}$，$f(0)=1$，$f(2)=\frac{1}{5}$

所以 $f(x)_{\min}=f(-3)=\frac{1}{10}$，$f(x)_{\max}=f(0)=1$

【变式1—5】(2022秋·黑龙江牡丹江·高三校考阶段练习)已知函数 $f(x)=b\cdot a^{x}(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象经过点 $A(1,4)$，$B(3,16)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)设函数 $g(x)=f(x)-f(-x)\ (x\geqslant2)$，求函数 $g(x)$ 的值域

【答案】(1) $f(x)=2^{x+1}$；(2) $\left[\frac{15}{2},+\infty\right)$.

【解析】(1)依题意，$\begin{cases}ab=4\\ ba^{3}=16\end{cases}$，而 $a>0$，解得 $a=2,b=2$，即有 $f(x)=2\cdot2^{x}=2^{x+1}$，

所以函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=2^{x+1}$.

(2)由(1)知，$g(x)=f(x)-f(-x)=2^{x+1}-2^{-x+1}=2\left(2^{x}-\frac{1}{2^{x}}\right)$，

因函数 $y=2^{x}$ 和 $y=-\frac{1}{2^{x}}$ 在 $[2,+\infty)$ 上都单调递增，

因此函数 $g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{\max}=g(2)=\frac{15}{2}$，

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $\left[\frac{15}{2},+\infty\right)$.

【题型2　配方法求函数值域或最值】

【例2】(2022秋·江西鹰潭·高三贵溪市实验中学阶段练习)函数 $y=\sqrt{-x^{2}+4x-4}$ 的值域是________.

【答案】$\{0\}$

【解析】函数 $y=\sqrt{-x^{2}+4x-4}$ 的定义域为 $-x^{2}+4x-4\geqslant0$，

化简得：$x^{2}-4x+4=(x-2)^{2}\leqslant0$，解得：$x=2$，

所以函数 $y=\sqrt{-x^{2}+4x-4}$ 的值域为 $\{0\}$.

【变式2—1】(2023·全国·高三专题练习)若函数 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2}}-\frac{2}{x}+1$，则函数 $g(x)=f(x)-4x$ 的最小值为(　　)

A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. -4

【答案】D

【解析】因为 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2}}-\frac{2}{x}+1=\frac{x^{2}-2x+1}{x^{2}}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2}$，所以 $f(x)=x^{2}(x\neq1)$.

从而 $g(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$，

当 $x=2$ 时，$g(x)$ 取得最小值，且最小值为 -4. 故选：D

【变式2—2】(2022·全国·高三专题练习) 函数 $f(x)=x+2\sqrt{1-x}$ 的最大值为__________.

【答案】2

【解析】设 $t=\sqrt{1-x}(t\geqslant 0)$，则 $x=1-t^2$，

所以原函数可化为：$y=-t^2+2t+1(t\geqslant 0)$，

由二次函数性质，当 $t=1$ 时，函数取最大值 2.

【变式2—3】(2022秋·广东深圳·高三深圳中学校考阶段练习) 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2$，则 $f(x)$ 的最大值为(　　).

A. $3+\sqrt{2}$　　B. $3-\sqrt{2}$　　C. $2+\sqrt{2}$　　D. $2-\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】$f(x)=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2=\sin x+\cos x+(\sin x+\cos x)^2-1+2$，

令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

即 $f(x)=g(t)=t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，

由 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则 $g(t)_{\max}=g(\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+1=3+\sqrt{2}$. 故选：$A$.

【变式2—4】(2022秋·北京·高三校考阶段练习) 函数 $f(x)=\sin x-\cos 2x$ 是(　　)

A. 奇函数，且最小值为 -2

B. 偶函数，且最小值为 -2

C. 非奇非偶函数，且最小值为 $-\frac{9}{8}$

D. 非奇非偶函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$

【答案】C

【解析】$f(x)=\sin x-\cos 2x=\sin x-(1-2\sin^2x)=2\sin^2x+\sin x-1$，其定义域为 R，

$f(-x)=2\sin^2(-x)+\sin(-x)-1=2\sin^2x-\sin x-1$，故函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，

令 $t=\sin x$，则 $t\in[-1,1]$，则 $f(x)=g(t)=2t^2+t-1=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，

易知 $f(x)_{\min}=g\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8}$，故选：$C$.

【变式2—5】(2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)=\frac{(x-1)(2x+1)(x^2+ax+b)}{x^2}$，对任意非零实数 x，均满足 $f(x)=f\left(-\frac{1}{x}\right)$. 则 $f(-1)$ 的值为________________；函数 $f(x)$ 的最小值为__________________.

【答案】　0　$-\frac{9}{8}$

【解析】函数 $f(x)=\frac{(x-1)(2x+1)(x^2+ax+b)}{x^2}$，因对任意非零实数 x，均满足 $f(x)=f\left(-\frac{1}{x}\right)$，

则 $\forall x\in R,x\neq 0$，有 $\dfrac{(x-1)(2x+1)(x^2+ax+b)}{x^2}=\dfrac{\left(-\frac{1}{x}-1\right)\left(-\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}+b\right)}{\frac{1}{x^2}}$，

即 $(x-1)(2x+1)(x^2+ax+b)=(-x-1)(x-2)(bx^2-ax+1)$，

由等式两边展开式最高次项系数得：$-b=2$，即 $b=-2$，

当 $x=1$ 时，$b-a+1=0$，解得 $a=-1$，经检验得，$a=-1$，$b=-2$，

$f(x)=f\left(-\frac{1}{x}\right)$ 对任意非零实数 x 成立，

因此，$f(x)=\dfrac{(x-1)(2x+1)(x^2-x-2)}{x^2}=\dfrac{(x^2-1)(2x^2-3x-2)}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left[2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right]$

$=2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{4}\right]^2-\frac{9}{8}$，

$f(-1)=0$，当 $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{4}$ 即 $x=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{8}$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{9}{8}$，

所以 $f(-1)$ 的值为 0，函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{9}{8}$.

【题型3　分离常数法求函数值域或最值】

【例3】(2022秋·河南郑州·高三校考阶段练习) 函数 $y=\dfrac{\cos x+1}{2\cos x-1}$ 的值域是(　　)

A. $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$　B. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$　C. $[0,4]$　D. $[0,2]$

【答案】B

【解析】令 $\cos x=t,t\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$，$y=\dfrac{t+1}{2t-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{2t-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2t-1}$，

可得 $2t-1\in[-3,0)\cup(0,1]$，$\dfrac{1}{2t-1}\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$，

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2t-1}\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，故 $y\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$. 故选：$B$.

【变式3—1】(2022秋·上海徐汇·高三上海市南洋模范中学校考阶段练习) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ 的值域为__________.

【答案】$(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】由 $x^2+3x+2\neq 0$，可得 $x\neq -1$ 且 $x\neq -2$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq -1$ 且 $x\neq -2\}$，

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}=1-\dfrac{3}{x+2}$，

所以 $f(x)\neq -2$ 且 $f(x)\neq 1$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ 的值域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$.

【变式3—2】(2022秋·天津滨海新·高三天津市滨海新区塘沽第一中学校考阶段练习) 已知 $x\in(0,3)$，则 $y=\dfrac{2x-8}{x-3}+\dfrac{1}{2x}$ 的最小值__________，此时 $x=$__________.

【答案】 $\frac{7}{2}$##3.5 1

【解析】$y=\frac{2x-8}{x-3}+\frac{1}{2x}=\frac{2(x-3)-2}{x-3}+\frac{1}{2x}=2-\frac{2}{x-3}+\frac{1}{2x}=2+\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2x}$,

由 $2(3-x)+2x=6$,

则 $2+\left(\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2x}\right)[2(3-x)+2x]\times\frac{1}{6}=2+\frac{1}{6}\left(4+\frac{3-x}{x}+\frac{4x}{3-x}+1\right)$

$\geqslant 2+\frac{1}{6}\left(5+2\sqrt{\frac{3-x}{x}\cdot\frac{4x}{3-x}}\right)=2+\frac{1}{6}\times(5+4)=\frac{7}{2}$,

当且仅当 $\frac{3-x}{x}=\frac{4x}{3-x}$,即 $x=1$ 时,等号成立.

【变式3—3】(2022秋·湖北·高三校联考阶段练习)已知 $1\leqslant x\leqslant 4$,则函数 $f(x)=\frac{x^2+x}{x^3+x^2+4x+4}$ 的值域为________.

【答案】$\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$

【解析】因为 $1\leqslant x\leqslant 4$,所以 $x+1\neq 0$,

$f(x)=\frac{x^2+x}{x^3+x^2+4x+4}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}}$,

令 $g(x)=x+\frac{4}{x}, x\in[1,4]$,

由双勾函数知,$g(x)$ 在 $[1,2)$ 上单调递减,在 $(2,4]$ 上单调递增,

所以 $g(2)=4, g(1)=5, g(4)=5$,

所以 $g(x)\in[4,5]$,所以 $f(x)\in\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$.

【变式3—4】(2023·全国·高三专题练习)已知函数 $f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}$.

(1)若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 是增函数,求实数 k 的取值范围;

(2)若 $f(x)+1<k\cdot 2^x$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立,求实数 k 的取值范围.

【答案】(1)$k\leqslant 4$; (2)$k>\frac{4}{3}$

【解析】(1)$f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}=2^x+\frac{k}{2^x}$,令 $t=2^x$,则 $f(x)=t+\frac{k}{t}$,由 $x\in(1,+\infty)$ 可得 $t>2$,

由条件可知 $y=t+\frac{k}{t}$ 在 $(2,+\infty)$ 是增函数.

当 $k\leqslant 0$ 时,结论显然成立;当 $k>0$ 时,则 $\sqrt{k}\leqslant 2$, $\therefore 0<k\leqslant 4$.

综上,k 的取值范围为 $k\leqslant 4$.

(2)由 $f(x)+1<k\cdot 2^x$ 可得 $2^x+k\cdot 2^{-x}+1<k\cdot 2^x$,

因为 $x\in[2,+\infty)$,所以 $2^x-2^{-x}>0$,所以 $k>\frac{2^x+1}{2^x-2^{-x}}$,

令 $t=2^x$，则 $t\geqslant 4$，$k>\dfrac{2^x+1}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{t+1}{t-\dfrac{1}{t}}=\dfrac{t^2+t}{t^2-1}=\dfrac{t}{t-1}=1+\dfrac{1}{t-1}$，

因为 $t\geqslant 4$，所以 $0<\dfrac{1}{t-1}\leqslant\dfrac{1}{3}$，$\therefore 1<1+\dfrac{1}{t-1}\leqslant\dfrac{4}{3}$，

所以 k 的范围是 $k>\dfrac{4}{3}$.

【题型4　判别式法求函数值域或最值】

【例4】(2022秋·浙江宁波·高一镇海中学校考期中) 函数 $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+1}$ 的值域是________.

【答案】$\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$

【解析】由题知函数的定义域为 R，

所以，将 $y=\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+1}$ 整理得 $(1+y)x^2-x+y+1=0$，

所以，当 $y=-1$ 时，$x=0$；

当 $y\neq-1$ 时，$\begin{cases}\Delta=1-4(y+1)^2\geqslant 0\\ y\neq-1\end{cases}$，解得 $y\in\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$，

所以，$y\in\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$，即函数 $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+1}$ 的值域是 $\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$

【变式4—1】(2022·全国·高三专题练习) 若函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$ 的最大值为 a，最小值为 b，则 $a+b=$ (　　)

A. 4　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】B

【解析】设 $y=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$，$yx^2+y=3x^2+x+3$，$(y-3)x^2-x+y-3=0$，

$x=0$ 时，$y=3$，

$y\neq 3$ 时，因为 $x\in R$，所以 $\Delta=1-4(y-3)^2\geqslant 0$，解得 $\dfrac{5}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{2}$，即 $\dfrac{5}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{2}$ 且 $y\neq 3$，

综上 $\dfrac{5}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{7}{2}$，最大值是 $\dfrac{7}{2}$，最小值是 $\dfrac{5}{2}$，和为6．故选：B.

【变式4—2】(2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$ 的最大值与最小值的和是 (　　)

A. $\dfrac{5}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. 1　　D. $-\dfrac{2}{3}$

【答案】B

【解析】设 $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$，则有 $(y-1)x^2+(y+1)x+y+1=0$，

当 $y=1$ 时，代入原式，解得 $x=-1$.

当 $y\neq 1$ 时，$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)(y+1)=(y+1)(-3y+5)$，

由$\Delta \geqslant 0$，解得$-1 \leqslant y \leqslant \frac{5}{3}$，于是$y$的最大值为$\frac{5}{3}$，最小值为$-1$，

所以函数$f(x)$的最大值与最小值的和为$\frac{2}{3}$． 故选：B.

【变式4—3】(2022·全国·高三专题练习)函数$y=\frac{\sin^2 x+\sin 2x}{1+\sin^2 x}$的值域为_________.

【答案】$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

【解析】由题可得，$y=\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{\tan^2 x+2\tan x}{1+2\tan^2 x}$，令$\tan x=t$，则$y=\frac{t^2+2t}{2t^2+1}$，

即$(2y-1)t^2-2t+y=0$，当$2y-1=0$，即$y=\frac{1}{2}$时，$t=\frac{1}{4}$；

当$2y-1\neq 0$，即$y\neq\frac{1}{2}$时，要使方程有解，

则需$\Delta=4-4y(2y-1)\geqslant 0$，得$y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$.

综上，$y\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$

【变式4—4】(2021·全国·高三专题练习)求函数$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$的最小值.

【答案】$\sqrt{26}$.

【解析】解法一：$\because$函数$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x-2)^2+9}$的定义域为一切实数.$\therefore y-\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2-4x+13}$.①

又$y-\sqrt{x^2-2x+5}>0$，即$y>\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}\geqslant 2$，

对①式两边平方，得$y^2-2y\sqrt{x^2-2x+5}+x^2-2x+5=x^2-4x+13$.

整理，得$y^2-8+2x=2y\sqrt{x^2-2x+5}$.②

对②式两边平方，得$(y^2-8)^2+4x(y^2-8)+4x^2=4y^2(x^2-2x+5)$，

再整理，得$(4y^2-4)x^2-(12y^2-32)x-y^4+36y^2-64=0$.③

$\because 4y^2-4>0$，x为实数，$\therefore \Delta=(12y^2-32)^2-4(4y^2-4)(-y^4+36y^2-64)\geqslant 0$，

化简并整理，得$y^6-28y^4+52y^2\geqslant 0$，

即$y^2(y^4-28y^2+52)\geqslant 0 \Leftrightarrow y^2(y^2-2)(y^2-26)\geqslant 0$，

又$y>2$，$\therefore y^2\geqslant 26$，$y\geqslant\sqrt{26}$，

当$y=\sqrt{26}$时，方程③为$100x^2-280x+196=0$，即$25x^2-70x+49=0$，

解得$x=\frac{7}{5}$，故函数的最小值为$\sqrt{26}$.

解法二：$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}=\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x-2)^2+3^2}$

令$P(x,0)$，$A(1,2)$，$B(2,3)$，则$y=|AP|+|BP|$

点A关于x轴的对称点为$A'(1,-2)$.

则$y_{\min}=|AP|+|BP|=|A'P|+|BP|\geqslant|A'B|=\sqrt{26}$

(其中运用三角形两边之和大于第三边，当且仅当A'、P、B三点共线时取"等号").

【题型5 逐层法求函数值域或最值】

【例5】(2022秋·江西宜春·高三江西省丰城中学校考阶段练习)已知幂函数$f(x)=x^a$的图象过点(9,3),则函数$y=\dfrac{1-f(x)}{f(x)+1}$在区间[1,9]上的值域为( )

A. [−1,0] B. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ C. [0,2] D. $\left[-\frac{3}{2},1\right]$

【答案】B

【解析】解法一:因为幂函数$f(x)=x^a$的图象过点(9,3),所以$9^a=3$,可得$a=\dfrac{1}{2}$,

所以$f(x)=\sqrt{x}$,$y=\dfrac{1-f(x)}{f(x)+1}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{2-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-1$.

因为$1\leqslant x\leqslant 9$,所以$2\leqslant\sqrt{x}+1\leqslant 4$,故$y=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-1\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

因此,函数$y=\dfrac{1-f(x)}{f(x)+1}$在区间[1,9]上的值域为$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$. 故选:$B$.

解法二:因为幂函数$f(x)=x^a$的图象过点(9,3),所以$9^a=3$,可得$a=\dfrac{1}{2}$,

所以$f(x)=\sqrt{x}$. 因为$x\in[1,9]$,所以$f(x)\in[1,3]$. 因为$y=\dfrac{1-f(x)}{f(x)+1}$,

所以$f(x)=\dfrac{1-y}{y+1}$,所以$1\leqslant\dfrac{1-y}{y+1}\leqslant 3$,解得$-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 0$,

即函数$y=\dfrac{1-f(x)}{f(x)+1}$在区间[1,9]上的值域为$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$. 故选:$B$.

【变式5—1】(2022春·江苏南京·高三统考开学考试)已知函数$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{9}-x\right)$,$g(x)=f(f(x))$,则$g(x)$的最大值为( )

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. 2

【答案】B

【解析】记$t=x+\dfrac{\pi}{9}$,则$f(x)=h(t)=\sin t+\sin\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\sin t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t$,

所以$h(t)=\sqrt{3}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$,且$\sqrt{3}>\dfrac{\pi}{3}$,所以$f(f(x))$最大为$\sqrt{3}$. 故选:$B$.

【变式5—2】(2021秋·安徽六安·金寨县青山中学高三开学考)函数$f(x)=4^x-2\times 2^x-3,x\in[0,2]$的最小值是___________.

【答案】−4

【解析】令$t=2x$, $x\in[0,2]$,则$t\in[1,4]$.

原函数化为$g(t)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$,

当$t=1$时,$g(t)$有最小值,即$f(x)$有最小值为-4.

【变式5—3】(2020秋·吉林白城·高三校考阶段练习) 已知函数 $f(x)=\dfrac{4^x+3\cdot 2^x+1}{4^x+2^x+1}$，$x\in[-1,1]$，则函数 $f(x)$ 的值域为______.

【答案】$\left[\dfrac{11}{7},\dfrac{5}{3}\right]$

【解析】由题得 $f(x)=\dfrac{4^x+2^x+1}{4^x+2^x+1}+\dfrac{2\times 2^x}{4^x+2^x+1}=1+\dfrac{2}{\dfrac{1}{2^x}+2^x+1}$,

设 $t=2^x$, $t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$, $g(t)=\dfrac{1}{t}+t$,

所以函数 $g(t)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 单调递减, 在 $[1,2]$ 单调递增,

所以 $g(t)_{\min}=g(1)=2, g(t)_{\max}=g(2)=\dfrac{5}{2}$.

所以函数 $g(t)$ 的值域为 $\left[2,\dfrac{5}{2}\right]$,

所以 $f(x)_{\min}=1+\dfrac{2}{\dfrac{5}{2}+1}=\dfrac{11}{7}$, $f(x)_{\max}=1+\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{5}{3}$

所以 $f(x)\in\left[\dfrac{11}{7},\dfrac{5}{3}\right]$.

【题型6　导数法求函数值域或最值】

【例6】(2022·陕西宝鸡·统考一模) 函数 $y=\ln\left(x-\dfrac{2}{x}\right)$, $x\in[2,4]$ 的值域是______.

【答案】$\left[0,\ln\dfrac{7}{2}\right]$

【解析】由题意, 在 $y=\ln\left(x-\dfrac{2}{x}\right)$ 中, $x\in[2,4]$

$y'=\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x}}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)=\dfrac{x}{x^2-2}\cdot\dfrac{x^2+2}{x^2}=\dfrac{x^2+2}{x(x^2-2)}>0$,

$\therefore$ 函数在 $[2,4]$ 单调递增

$\because f(2)=\ln\left(2-\dfrac{2}{2}\right)=\ln 1=0$, $f(4)=\ln\left(4-\dfrac{2}{4}\right)=\ln\dfrac{7}{2}$

$\therefore$ 函数 $y=\ln\left(x-\dfrac{2}{x}\right)$, $x\in[2,4]$ 的值域是 $\left[0,\ln\dfrac{7}{2}\right]$

【变式6—1】(2022秋·江苏·高三校联考阶段练习) 函数 $f(x)=|3x-1|-3\ln x$ 的最小值为______.

【答案】2

【解析】令 $g(x)=x-1-\ln x$, 则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$, 令 $g'(x)=0$, 解得 $x=1$,

当 $0<x<1$ 时, $g'(x)<0$, 则 $g(x)$ 单调递减;

当 $1<x$ 时, $g'(x)>0$, 则 $g(x)$ 单调递增;

故 $g(x)\geqslant g(1)=0$, 则 $x-1\geqslant\ln x$.