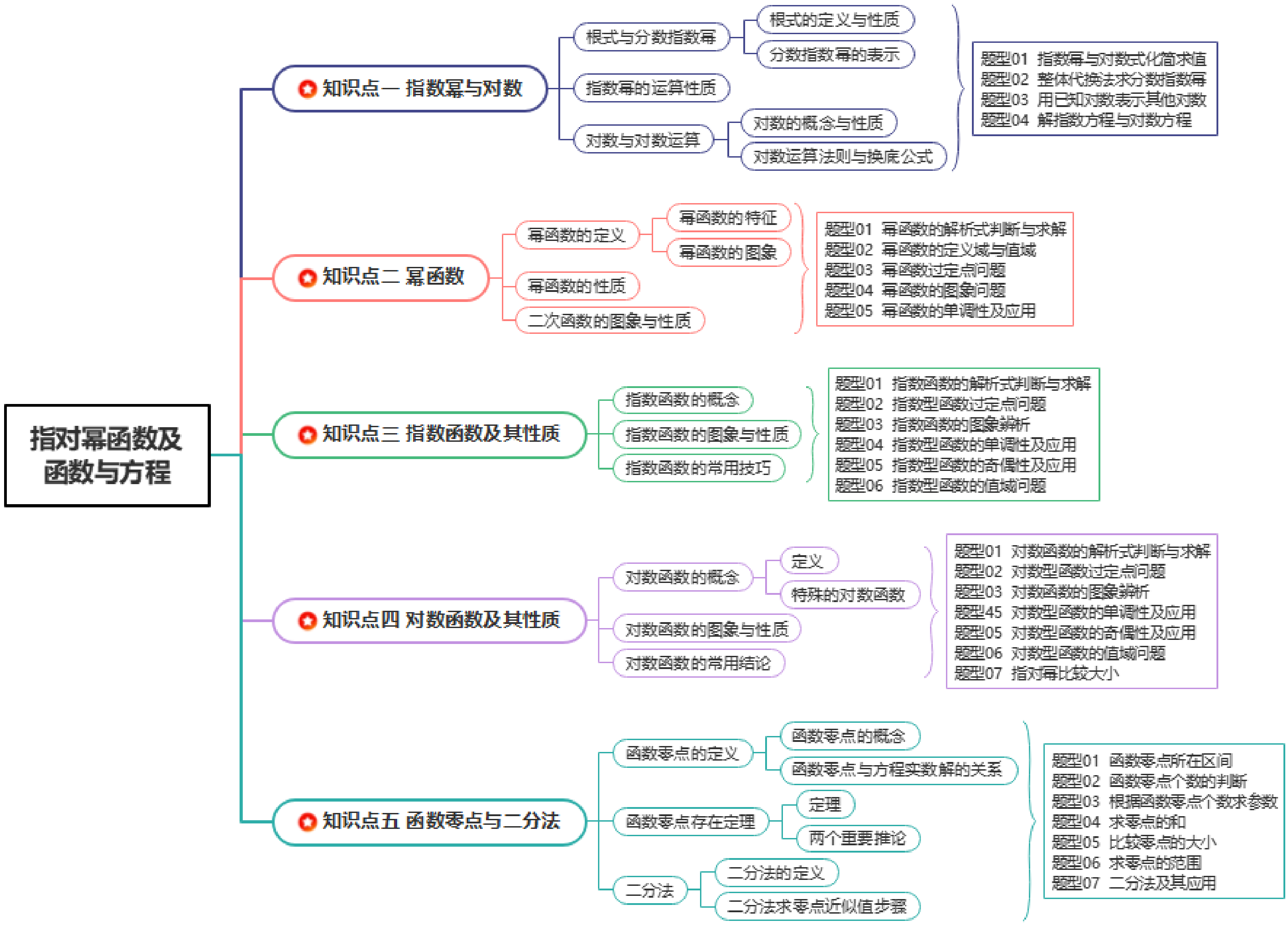
专题 04　指对幂函数及函数与方程

（思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧）

思维构建·理清脉络



知识盘点·查漏补缺

知识点 1　指数幂与对数

1、根式与分数指数幂

（1）根式的定义：一般地，如果 $x^n = a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$。

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数．

（2）根式的性质（$n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$）：$(\sqrt[n]{a})^n = a$；$(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a, n\text{为奇数}, \\ |a|, n\text{为偶数}. \end{cases}$

（3）分数指数幂的表示

正分数指数幂：规定：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\left(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1\right)$

负分数指数幂：规定：$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\left(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1\right)$

性质：0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

2、指数幂的运算性质

（1）无理数指数幂：一般地，无理数指数幂 a^α（$a>0$，α 为无理数）是一个确定的实数.

有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂.

（2）指数幂的运算性质

①$a^r a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$． ②$\left(a^r\right)^s=a^{rs}\ (a>0,r,s\in\mathbf{R})$． ③$(ab)^r=a^r b^r\ (a>0,b>0,r\in\mathbf{R})$．

3、对数与对数运算

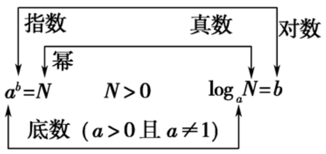
（1）对数的概念：如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么数 x 叫做以 a 为底数 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数，$\log_a N$ 叫做对数式。

（2）对数的性质

对数式与指数式的互化：$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N(a>0$，且 $a\neq1)$；

①$\log_a 1=0$，②$\log_a a=1$，③$a^{\log_a N}=N$，④ $\log_a a^N=N\ (a>0$，且 $a\neq1)$.

指数式与对数式的关系



（3）对数的的运算法则与换底公式：如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$

运算法则：①$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$　　②$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$

换底公式：①$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(a>0$，且 $a\neq1$，$c>0$，且 $c\neq1$，$b>0)$，

选用换底公式时，一般选用 e 或 10 作为底数。

②换底公式的三个重要结论：$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；　　$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$；　　$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$.

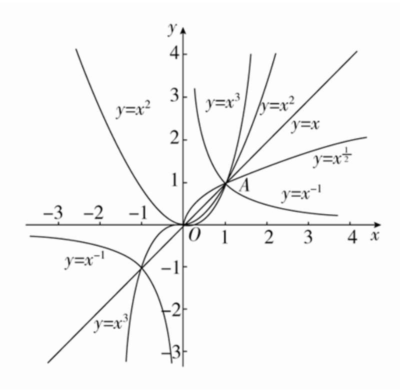
知识点 2　幂函数及其性质

1、幂函数的定义：一般地，函数 $y=x^\alpha$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数.

（1）幂函数的特征：x^α 的系数是 1；x^α 的底数 x 是自变量；x^α 的指数 α 为常数.

只有满足这三个条件，才是幂函数．对于形如 $y=(2x)^\alpha$，$y=2x^5$，$y=x^\alpha+6$ 等的函数都不是幂函数.

（2）幂函数的图象：同一坐标系中，幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象(如图).



2、幂函数的性质

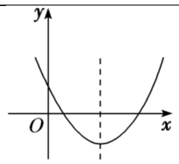
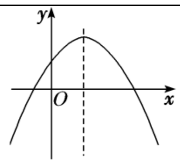
（1）所有的幂函数在(0，+∞)上都有定义，并且图象都过点(1,1)；

（2）如果 $\alpha>0$，那么幂函数的图象过原点，并且在区间[0，+∞)上单调递增；

（3）如果 $\alpha<0$，那么幂函数的图象在区间(0，+∞)上单调递减，在第一象限内，当 x 从右边趋向于原点时，图象在 y 轴右方无限接近 y 轴，当 x 从原点趋向于+∞时，图象在 x 轴上方无限接近 x 轴；

（4）在(1，+∞)上，随幂指数的逐渐增大，图象越来越靠近 y 轴．

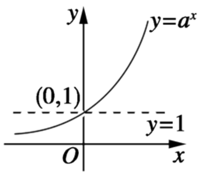
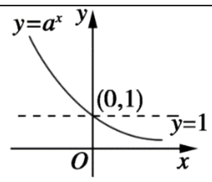
2、二次函数的图象和性质

函数	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图象(抛物线)		
定义域	R	
值域	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},\ +\infty\right)$	$\left(-\infty,\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
奇偶性	当 $b=0$ 时是偶函数，当 $b\neq0$ 时是非奇非偶函数	
单调性	在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ 上是减函数； 在 $\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上是增函数	在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ 上是增函数； 在 $\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上是减函数

知识点 3 指数函数及其性质

1、指数函数的概念：一般地，函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，定义域是 **R**，a 是指数函数的底数．

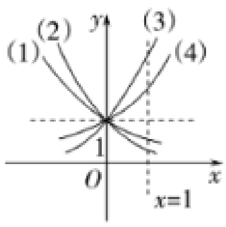
2、指数函数的图象与性质

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图象</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">图像特征</td><td colspan="2">在 x 轴的上方，过定点 $(0,1)$</td></tr>
<tr><td>当 x 逐渐增大时，图象逐渐上升</td><td>当 x 逐渐增大时，图象逐渐下降</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>定义域</td><td colspan="2">R</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在 $\boldsymbol{R}$ 上是增函数</td><td>在 $\boldsymbol{R}$ 上是减函数</td></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td colspan="2">非奇非偶函数</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>当 $x<0$ 时，$0<y<1$；
当 $x>0$ 时，$y>1$；</td><td>当 $x<0$ 时，$y>1$；
当 $x>0$ 时，$0<y<1$；</td></tr>
</table>

3、指数函数的常用技巧

（1）当底数大小不定时，必须分"$a>1$"和"$0<a<1$"两种情况讨论；

（2）指数函数的图象与底数大小的比较



如图是指数函数（1）$y=a^x$；（2）$y=b^x$；（3）$y=c^x$；（4）$y=d^x$ 的图象，

底数 a,b,c,d 与 1 的之间的大小关系为 $c>d>1>a>b$；

规律：在 y 轴右（左）侧图象越高（低），其底数越大。

（3）指数函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称。

知识点 4　对数函数及其性质

1、对数函数的概念

（1）定义：函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域为 $(0,+\infty)$.

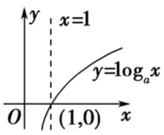
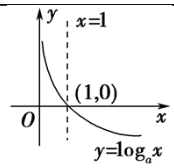
（2）特殊的对数函数

①常用对数函数：以 10 为底的对数函数 $y=\lg x$.

②自然对数函数：以无理数 e 为底的对数函数 $y=\ln x$.

2、对数函数的图象与性质

图象	$a>1$	$0<a<1$

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="6">性质</td><td colspan="2">定义域：(0，＋∞)</td></tr>
<tr><td colspan="2">值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">当 $x=1$ 时，$y=0$，即过定点(1,0)</td></tr>
<tr><td>当 $0<x<1$ 时，$y<0$；
当 $x>1$ 时，$y>0$</td><td>当 $0<x<1$ 时，$y>0$；
当 $x>1$ 时，$y<0$</td></tr>
<tr><td>在(0，＋∞)上为增函数</td><td>在(0，＋∞)上为减函数</td></tr>
</table>

3、对数函数图象的常用结论

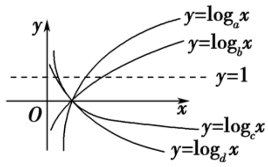
（1）函数 $y=\log_a x$ 与 $y=log_{\frac{1}{a}}x$ 的图象 x 轴对称；

（2）对数函数的图象与底数大小的关系

如图，作直线 $y=1$，则该直线与四个函数图象交点的横坐标为相应的底数，

故 $0<c<d<1<a<b$.

由此我们可得到以下规律：在第一象限内从左到右底数逐渐增大.



知识点 5　函数零点与二分法

1、函数零点的定义

（1）函数零点的概念：对于函数 $y=f(x)(x\in D)$，把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x\in D)$的零点.

（2）函数零点与方程实数解的关系

方程 $f(x)=0$ 有实数根⇔函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴有交点⇔函数 $y=f(x)$有零点.

【注意】函数的零点不是函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴的交点，而是交点的横坐标，

也就是说函数的零点不是一个点，而是一个数.

2、函数零点存在定理

（1）定理：如果函数 $y=f(x)$在区间$[a，b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，

那么，函数 $y=f(x)$在区间$(a，b)$内有零点，即存在 $c\in(a，b)$，使得 $f(c)=0$，

这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

（2）两个重要推论

推论 1：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$，且 $f\left(x\right)$ 具有单调性，则函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(a.b\right)$ 内只有一个零点.

推论 2：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(a.b\right)$ 内有零点，且函数 $f\left(x\right)$ 具有单调性，则 $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$

3、二分法

（1）二分法的定义：对于在区间[a，b]上连续不断且$f(a)f(b)<0$的函数$y=f(x)$，通过不断地把函数$f(x)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法．

（2）给定精确度ε，用二分法求函数$y=f\left(x\right)$零点x_0的近似值的步骤

①确定零点x_0的初始区间$\left[a,b\right]$，验证$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$

②求区间$\left(a,b\right)$的中点c

③计算$f\left(c\right)$，进一步确定零点所在的区间：

若$f\left(c\right)=0$（此时$x_0=c$），则c就是函数的零点；

若$f\left(a\right)\cdot f\left(c\right)<0$（此时$x_0\in\left(a,c\right)$），则令$b=c$；

若$f\left(c\right)\cdot f\left(b\right)<0$（此时$x_0\in\left(c,b\right)$），则令$a=c$．

④判断是否达到精确度ε：若$\left|a-b\right|<\varepsilon$，则得到零点近似值$a$（或$b$）；否则重复（2）~（4）

【注意】初始区间的确定要包含函数的变号零点；

重点突破·高分必抢

重难点 01　指数型复合函数的值域

1、形如$y=f(a^x)$（$a>0$，且$a\neq1$）的函数求值域

换元法：令$a^x=t$，将求原函数的值域转化为求$f(t)$的值域，但要注意“新元t”的范围

2、形如$y=a^{f(x)}$（$a>0$，且$a\neq1$）的函数求值域

换元法：令$\mu=f\left(x\right)$，先求出$\mu=f\left(x\right)$的值域，再利用$y=a^\mu$的单调性求出$y=a^{f(x)}$的值域。

【典例 1】（2024·贵州·模拟预测）已知函数$f(x)=2^{-x^2+2x+3}$，则$f(x)$的最大值是_____.

【答案】16

【解析】由$f\left(x\right)=2^{-x^2+2x+3}$，而$t=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4\leq4$，

因为$y=2^t$单调递增，所以$y=2^t\leq2^4$，则$f(x)$的最大值是 16.

【典例 2】（23-24 高三上·福建福州·期中）函数$y=\dfrac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2}$的值域为______.

【答案】$\left(-1,1\right)$

【解析】因为 $y=\frac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2}=\frac{\left(e^{3x}+2\right)-4}{e^{3x}+2}=1+\frac{-4}{e^{3x}+2}$，

又 $e^{3x}>0$，所以 $e^{3x}+2>2$，所以 $0<\frac{1}{e^{3x}+2}<\frac{1}{2}$，所以 $-2<\frac{-4}{e^{3x}+2}<0$，

所以 $-1<1+\frac{-4}{e^{3x}+2}<1$，所以函数 $y=\frac{e^{3x}-2}{e^{3x}+2}$ 的值域为 $(-1,1)$.

【典例 3】（23-24 高三上·湖北·期中）已知 $f(x)=a^{x+1}-2a^{-x}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数.

（1）函数 $g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2f(x)$，$x\in[0,2]$，求 $g(x)$ 的最小值.

（2）是否存在 $\lambda>0$，使得 $f(2x)\le\lambda f(x)$ 对 $x\in[-2,-1]$ 恒成立，若存在，求 λ 的取值范围；若不存在，说明理由.

【答案】（1）$g(x)_{\min}=-2$；（2）存在，$0<\lambda\le\frac{5}{2}$

【解析】（1）由 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，知 $f(0)=a-2=0$，得 $a=2$；

代入函数得：$f(x)=2^{x+1}-2\cdot2^{-x}=2\left(2^{x}-2^{-x}\right)$，

由于 $f(-x)=2\left(2^{-x}-2^{x}\right)=-f(x)$，故 $a=2$ 时，$f(x)$ 为奇函数，满足条件，

$g(x)=2^{2x}+2^{-2x}-2\left(2^{x+1}-2\cdot2^{-x}\right)=\left(2^{x}\right)^{2}+\left(2^{-x}\right)^{2}-4\left(2^{x}-2^{-x}\right)=\left(2^{x}-2^{-x}\right)^{2}-4\left(2^{x}-2^{-x}\right)+2$，

令 $t=2^{x}-2^{-x}$，易知 $t=2^{x}-2^{-x}$ 在 $x\in[0,2]$ 上单调递增，

故当 $x=0$ 时，t 取得最小值，$t_{\min}=1-1=0$，

当 $x=2$ 时，t 取得最大值，$t_{\max}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$.$\therefore t\in\left[0,\frac{15}{4}\right]$，

则上式转化为 $h(t)=t^{2}-4t+2=(t-2)^{2}-2$，

$\therefore t=2$时，$g(x)_{\min}=-2$，此时 $x=\log_{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$；

（2）$f(x)=2\left(2^{x}-2^{-x}\right)$，$f(2x)=2\left(2^{2x}-2^{-2x}\right)$，

代入不等式得 $2\left(2^{2x}-2^{-2x}\right)\le2\lambda\left(2^{x}-2^{-x}\right)$，

即得：$2\left(2^{x}+2^{-x}\right)\left(2^{x}-2^{-x}\right)\le2\lambda\left(2^{x}-2^{-x}\right)$，

$\because x\in[-2,-1]$时，$2^x-2^{-x}<0$，$\therefore \lambda\le 2^x+2^{-x}$，

又$\because 2^x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，$\therefore$当$2^x=\frac{1}{2}$，即$x=-1$时，$2^x+2^{-x}$取得最小值，

而$\left(2^x+2^{-x}\right)_{\min}=\frac{5}{2}$，$\therefore 0<\lambda\le\frac{5}{2}$.

重难点 02　对数型复合函数的值域

1、形如$y=f(\log_a x)$（$a>0$，且$a\ne1$）的函数求值域

换元法：令$\log_a x=t$，先求出$\log_a x=t$的值域，再利用$y=f\left(t\right)$的单调性，再求出$y=f\left(t\right)$的值域。

2、形如$y=\log_a f\left(x\right)$（$a>0$，且$a\ne1$）的函数的值域

换元法：令$\mu=f\left(x\right)$，先求出$\mu=f\left(x\right)$的值域，再利用$y=\log_a\mu$的单调性，求出$y=\log_a f\left(x\right)$的值域。

【典例 1】（23-24 高三上·四川广安·月考）已知函数$f(x)=\log_3\left(-x^2+2x+3\right)$，则$f(x)$的值域是______.

【答案】$(-\infty,\log_3 4]$

【解析】$\because f(x)=\log_3\left(-x^2+2x+3\right),\therefore y=\log_3 t,t=-x^2+2x+3,$

$t=-x^2+2x+3=-\left(x-1\right)^2+4\le4$,

$\because y=\log_3 t$单调递增，$\therefore y=\log_3 t\le\log_3 4$,

则$f(x)$的值域是$(-\infty,\log_3 4]$。

【典例 2】（23-24 高三上·江苏常州·月考）已知函数$f\left(x\right)=1+\log_3 x$，$x\in[1,9]$，则函数$y=\left[f\left(x\right)\right]^2+f\left(x^2\right)$的值域为________.

【答案】$[2,7]$

【解析】由于$f\left(x\right)=1+\log_3 x$，$x\in[1,9]$,

由$y=f^2(x)+f(x^2)$，得$\begin{cases}1\le x\le9\\1\le x^2\le9\end{cases}$，解得$1\le x\le3$,

即函数$y=f^2(x)+f(x^2)$的定义域为$[1,3]$．$\therefore 0\le\log_3 x\le1$,

又 $y=f^2(x)+f(x^2)=(1+\log_3 x)^2+1+\log_3 x^2=(\log_3 x)^2+4\log_3 x+2=(2+\log_3 x)^2-2$，

$\because 0\le \log_3 x\le 1$，$\therefore 2\le y\le 7$，

故函数 $y=f^2(x)+f(x^2)$ 的值域为 $[2,7]$.

重难点 03　嵌套函数的零点问题

处理复合函数 $y=f[g(x)]$ 的零点问题的方法：

①确定内层函数 $u=g(x)$ 和外层函数 $y=f(u)$；

②确定外层函数 $y=f(u)$ 的零点 $u=u_i(i=1,2,3,\cdots,n)$；

③确定直线 $u=u_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 与内层函数 $u=g(x)$ 图象的交点个数分别为 a_1、a_2、a_3、…、a_n，则函数 $y=f[g(x)]$ 的零点个数为 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

【典例 1】（2024·浙江金华·三模）若函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{|x|}$，则方程 $f\left[f(x)\right]=3$ 的实数根个数为（　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】D

【解析】$f(x)=x+\dfrac{1}{|x|}=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x},x>0\\ x-\dfrac{1}{x},x<0\end{cases}$，

当 $x<0$ 时，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$，

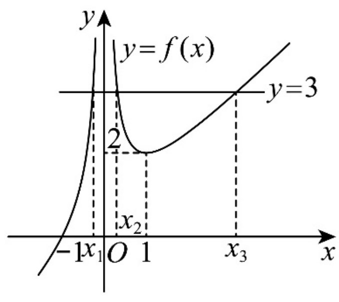
此时 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$，

故当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

画出函数 $f(x)$ 和 $y=3$ 的图象如下：



令 $x+\dfrac{1}{x}=3$ 得，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},x_3=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

故 $x_1\in(-1,0),x_2\in(0,1),x_3\in(2,+\infty)$，

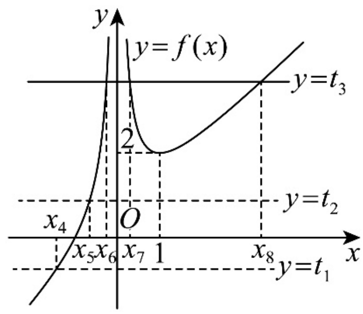
令 $f(x)=t$，则 $f(t)=3$，且 $t_1\in(-1,0),t_2\in(0,1),t_3\in(2,+\infty)$，

当 $f(x)=t_1\in(-1,0)$ 时，结合图象可知，只有 1 个解 x_4，

当 $f(x)=t_2\in(0,1)$ 时，结合图象可知，只有 1 个解 x_5，

当 $f(x)=t_3\in(2,+\infty)$ 时，结合图象可知，由 3 个解 x_6,x_7,x_8，

综上，方程 $f\left[f(x)\right]=3$ 的实数根的个数为 5.故选：D

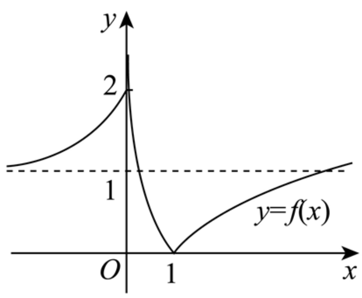


【典例 2】（23-24 高三上·江西上饶·月考）设函数 $f(x)=\begin{cases}3^x+1,x\le 0\\ \left|\log_4 x\right|,x>0\end{cases}$，若关于 x 的函数

$g(x)=f^2(x)-(a+1)f(x)+1$ 恰好有五个零点.则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$1<a\le\dfrac{3}{2}$

【解析】作出函数 $f(x)=\begin{cases}3^x+1,x\le 0\\ \left|\log_4 x\right|,x>0\end{cases}$ 的图象如图，



令 $f(x)=t$，函数 $g(x)=f^2(x)-(a+1)f(x)+1$ 恰好有五个零点.

则方程 $f^2(x)-(a+1)f(x)+1=0$ 化为 $t^2-(a+1)t+1=0$，

则 $t^2-(a+1)t+1=0$ 必有两个不同实根 t_1,t_2，则 $t_1t_2=1$，

结合图形可知 $t_1,t_2>0$，则 t_1,t_2 必不为1，

故方程 $t^2-(a+1)t+1=0$ 的一根在区间 $(0,1)$ 内，另一根在区间 $(1,2]$ 内，

令 $g(t)=t^2-(a+1)t+1$，则 $\begin{cases}g(0)=1>0\\ g(1)=1-(a+1)\times 1+1<0\\ g(2)=4-(a+1)\times 2+1\ge 0\end{cases}$，解得：$1<a\le\dfrac{3}{2}$，

综上：实数 a 的取值范围为 $1<a\le\dfrac{3}{2}$.

【典例 3】（23-24 高三下·重庆·月考）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x},x\le 0\\ \dfrac{2\ln x}{x},x>0\end{cases}$，$g(x)=x^{2}+2x+1-2\lambda,\lambda\in\mathbf{R}$，若关于 x 的方程 $f(g(x))=\lambda$ 有 6 个解，则 λ 的取值范围为________.

【答案】$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$

【解析】由题可得，令 $g(x)=t$，则方程 $f(t)=\lambda$ 的解有 3 个，

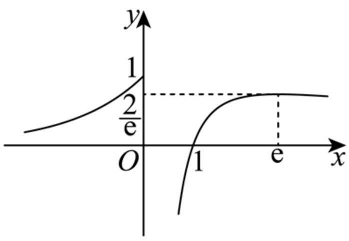
当 $t\le 0$ 时，$f(t)=2^{x}$，所以 $f(t)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，

当 $t>0$ 时，$f'(t)=\dfrac{2(1-\ln t)}{t^{2}}$，

则 $f(t)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

$f(\mathrm{e})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，$f(1)=0$，当 $x>1$ 时，$\ln x>0$，所以 $f(x)>0$，

画 $y=f(t)$ 的图象如下：



由图象可得 $0<\lambda<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，

且方程 $f(t)=\lambda$ 的三个解分别为 t_1,t_2,t_3，不妨设 $t_1<t_2<t_3$，

则有 $2^{t_1}=\lambda$，即 $t_1=\log_2\lambda$，

又 $g(x)=x^{2}+2x+1-2\lambda=(x+1)^{2}-2\lambda$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(x)_{\min}=-2\lambda$，

又因为 $g(x)=t$，所以 $-2\lambda<t_1<t_2<t_3$，所以有 $\log_2\lambda>-2\lambda$，即 $2\lambda+\log_2\lambda>0$，

令 $h(\lambda)=2\lambda+\log_2\lambda,(\lambda>0)$，所以 $h'(\lambda)=2+\dfrac{1}{\lambda\ln 2}>0$，所以 $h(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以 $2\lambda+\log_2\lambda>0$ 的解集为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，