

上海中学 2023 学年第一学期高二年级数学期中

2023. 11

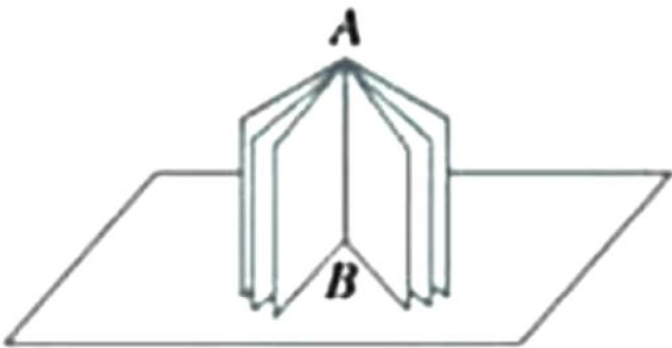
一 填空题（本大题共有 12 题，满分 42 分，第 16 题每题 3 分，第 7-12 题每题 4 分）

1. 向量 $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (x, 1, 2)$ 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x =$ _____.

2. 已知两条相交直线 a, b , 且 $a \parallel \text{平面}$ _____, 则 b 与 _____ 的位置关系是_____.

3. 将一个圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 面积为 3π 的扇形卷成一个圆锥, 那么该圆锥的体积为_____.

4. 如图, 我们将一本书打开放置在桌面上（每页书都有一边恰好落在桌面上）. 根据我们所学的_____定理, 我们可以证明书脊所在的直线 AB 垂直于桌面.



5. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 2, 其底面 $ABCD$ 水平放置的直观图（斜二测画法）是边长为 1 的正方形, 则该四棱锥的体积为_____.

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, M 为棱 CC_1 的中点, 则点 M 到平面 A_1BD 的距离是_____.

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = 1, AA_1 = 2$, 则直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为_____.

8. 下列说法正确的是_____.

①一条直线和平面平行的充要条件是直线的方向向量垂直于平面的法向量.

②如果直线 AB 与 CD 是异面直线, 那么向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 不共面

③两条异面直线的公垂线段, 是连接两条异面直线所有线段中的最短线段.

④直三棱柱任意两个侧面的面积之和大于第三个侧面的面积.

9. 设 AB 和 CD 都是平面 α 的垂线, 其垂足分别为 B, D . 已知 $AB = 5, CD = 9, BD = 3$, 那么线段 AC _____.

10. 设 O_1, O_2 分别是圆柱 P 的上、下底面 α_1, α_2 的中心, Q_1 是以 O_1 为顶点, α_2 为底面的圆锥体 Q_1 , Q_2 是以 O_2 为顶点, α_1 为底面的圆锥体 Q_2 , 若圆柱 P 的体积为 1, 那么圆锥 Q_1, Q_2 的公共部分的体积为_____.

11. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = 2, AA_1 = 1$, 那么以 A 为球心, 半径为 2 的球面与该四棱柱表面交线的总长度为_____.

12. 已知空间四个单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ 满足: $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| + |\vec{e}_3 - \vec{e}_4| + 2|\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4| = 1$, 则 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3$ 的最大值为_____.

二 选择题（本大题共有 4 题，满分 16 分，每小题 4 分）

13. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔^{148.5m}时，相应水面的面积为^{140.0km²}；水位为海拔^{157.5m}时，相应水面的面积为^{180.0km²}，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔^{148.5m}上升到^{157.5m}时，增加的水量约为（ ^{$\sqrt{7}$} 2.65）（ ）

A. 1.0 10⁹m³ B. 1.2 10⁹m³ C. 1.4 10⁹m³ D. 1.6 10⁹m³

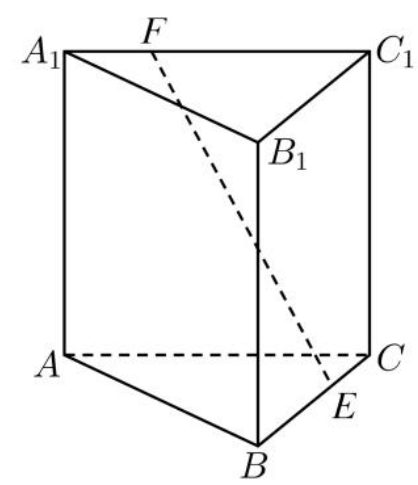
14. 已知平面 α 、 β 、 γ 两两垂直，直线 a、b、c 满足：a $\perp$ α , b $\perp$ β , c $\perp$ γ ，则直线 a、b、c 不可能满足以下哪种关系

A. 两两垂直 B. 两两平行 C. 两两相交 D. 两两异面

15. 已知二面角 α 为 60°，点 P、Q 分别在 α 、 β 内且 PQ $\perp$ β ，P 到 β 的距离为 $\sqrt{3}$ ，Q 到 α 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 PQ 两点之间的距离为

A. $\sqrt{3}$ B. 1 C. 2 D. $\sqrt{2}$

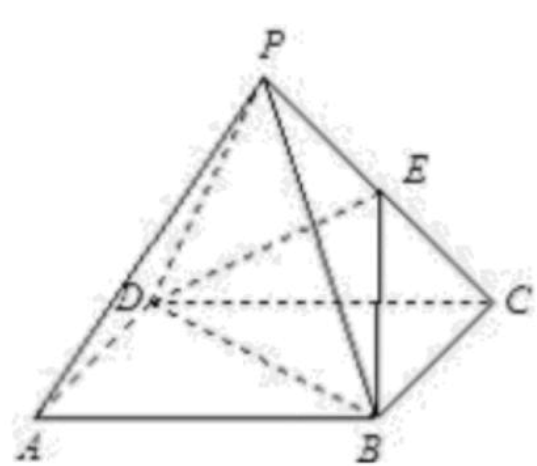
16. 如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，AC $\perp$ AA_1 ，E、F 分别是棱 BC、 A_1C_1 上的点. 记 EF 与 AA_1 所成的角为 θ_1 ，EF 与平面 ABC 所成的角为 θ_2 ，二面角 F-BC-A 的平面角为 θ_3 ，则（ ）



- A. B. C. D.

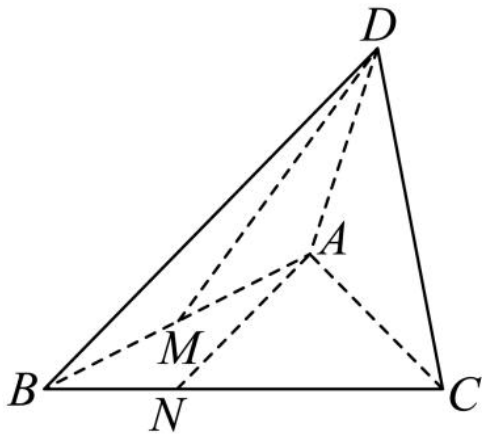
三 解答题（本大题共有 4 题，满分 42 分）

17. 如图，在正四棱锥 P-ABCD 中，PA = AB = a, E 是棱 PC 的中点；



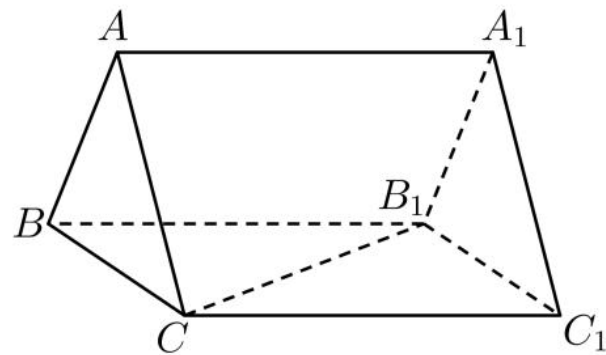
- (1) 求证：PA $\perp$ 平面 EDB ；
- (2) 求三棱锥 E-BDC 的体积.

18. 如图，在四面体 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $AC = AD = 2$ ， $\angle BAD = \angle CAD = \frac{2}{3}$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ ，点 M ， N 分别在棱 AB ， BC 上，且 $AM = BM$ ， $CN = 2BN$ 。



- (1) 用 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{AN}$ ， $\overrightarrow{DM}$ ；
- (2) 求异面直线 AN ， DM 所成角的余弦值.

19. 在底面为正三角形的三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ， $\angle CBB_1 = 60^\circ$ ， $AA_1 = 2AB = 4$.



- (1) 证明： $B_1C \perp AC_1$ ；
- (2) 求二面角 $C - AB - A_1$ 的余弦值.

20. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

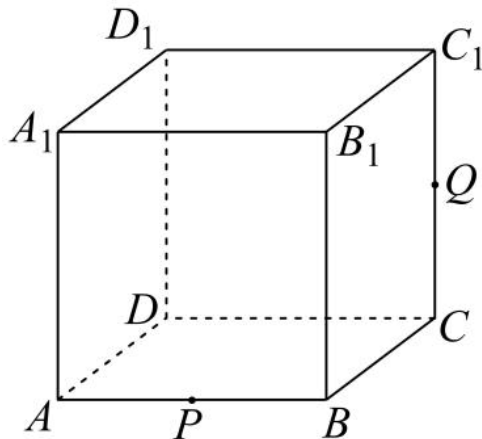


图1

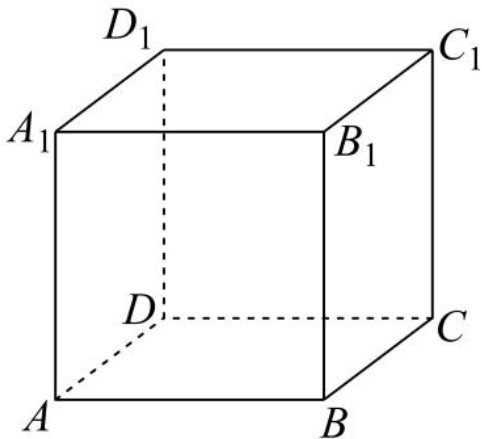


图2

- (1) 已知 P ， Q 分别为棱 AB ， CC_1 的中点（如图 1），做出过点 D_1 ， P ， Q 的平面与长方体的截面.保留作图痕迹，不必说明理由；
- (2) 如图 2，已知 $AB = 13$ ， $AD = 5$ ， $AA_1 = 12$ ，过点 A 且与直线 CD 平行的平面 将长方体分成两部分.现同时将两个球分别放入这两部分几何体内，则在平面 变化的过程中，求这两个球的半径之和的最大值.

上海中学 2023 学年第一学期高二年级数学期中

2023. 11

一 填空题（本大题共有 12 题，满分 42 分，第 16 题每题 3 分，第 7-12 题每题 4 分）

1. 向量 $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (x, 1, 2)$ 且 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 3$, 则 $x =$ _____.

【答案】1

【分析】利用向量数量积的坐标公式求解即可.

【详解】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot x + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = x + 2 = 3$,

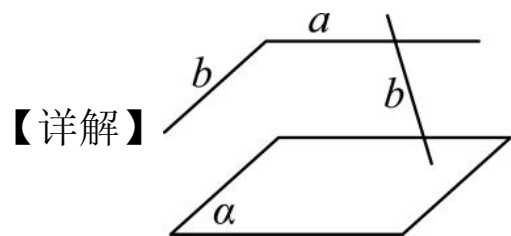
所以 $x = 1$.

故答案为：1

2. 已知两条相交直线 a, b , 且 $a \parallel \text{平面}$ _____, 则 b 与 _____ 的位置关系是_____.

【答案】 $b \parallel \text{平面}$ 或 b 与平面 相交

【分析】画出图形不难看出直线 b 与平面 的位置关系，平行或相交.



由题意画出图形，当 a, b 所在平面与平面 平行时， b 与平面 平行，

当 a, b 所在平面与平面 相交时， b 与平面 相交.

故答案为： $b \parallel \text{平面}$ 或 b 与平面 相交.

【点睛】本题考查空间中直线与平面之间的位置关系，考查空间想象能力，是基础题.

3. 将一个圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 面积为 3π 的扇形卷成一个圆锥，那么该圆锥的体积为_____.

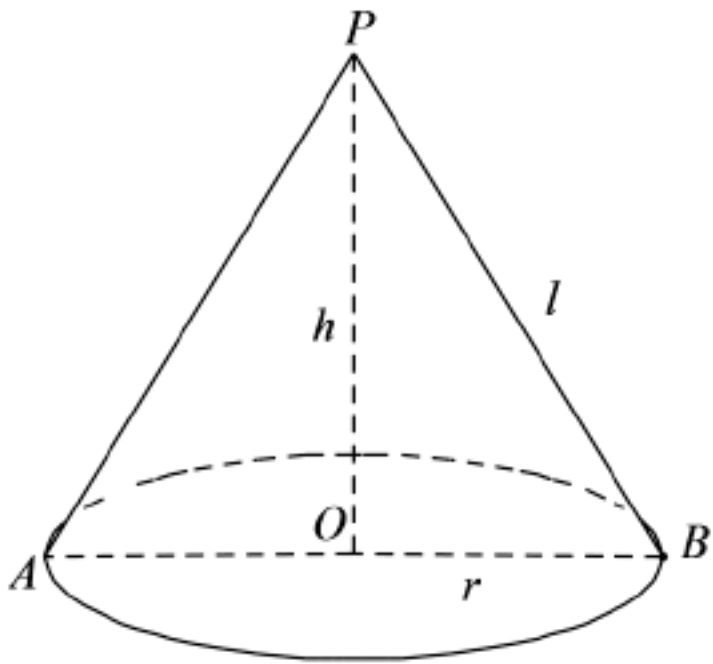
【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

【分析】求出扇形的半径，进而求出圆锥的底面半径和高，利用体积公式求出答案.

【详解】设扇形的半径为 l , 则 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} l^2 = 3\pi$, 解得 $l = 3$,

即卷成的圆锥母线长为 3, 设圆锥的底面半径为 r , 则 $2\pi r = \frac{2\pi}{3} l = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi$,

解得 $r = 1$,

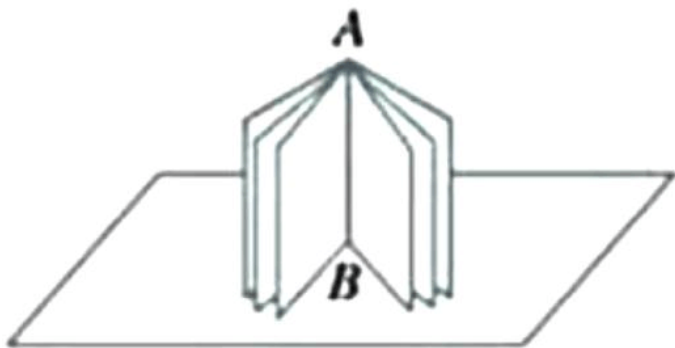


则圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2\sqrt{2}$,

故圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$

故答案为: $\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$

4. 如图，我们将一本书打开放置在桌面上（每页书都有一边恰好落在桌面上）.根据我们所学的_____定理，我们可以证明书脊所在的直线 AB 垂直于桌面.



【答案】线面垂直的判定

【分析】略

【详解】略

5. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 2，其底面 $ABCD$ 水平放置的直观图（斜二测画法）是边长为 1 的正方形，则该四棱锥的体积为_____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【分析】由直观图得到原图形，进而得到底面 $ABCD$ 的面积，利用锥体体积公式求出答案.

【详解】直观图如图 1，则原图形如图 2，

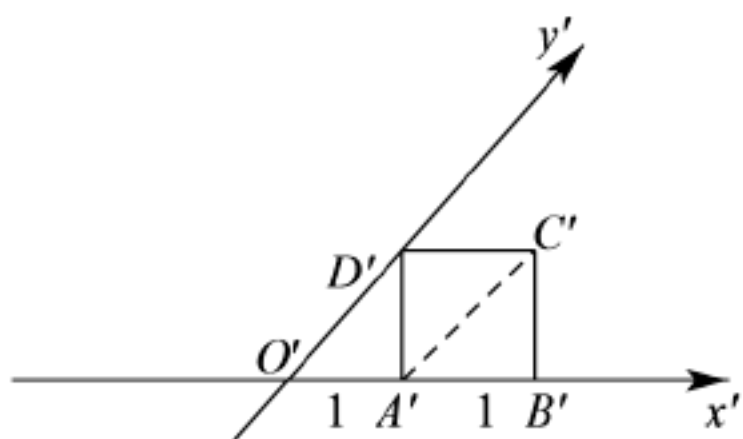


图1

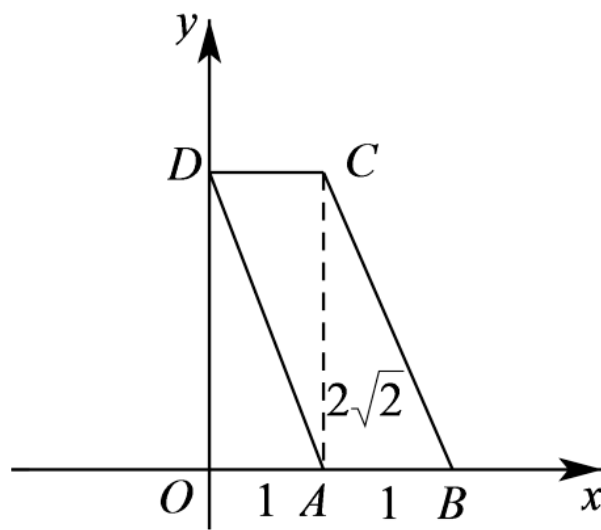


图2

则原图形为平行四边形，面积为 $1 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

故底面 ABCD 的面积为 $2\sqrt{2}$ ，

故该四棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 。

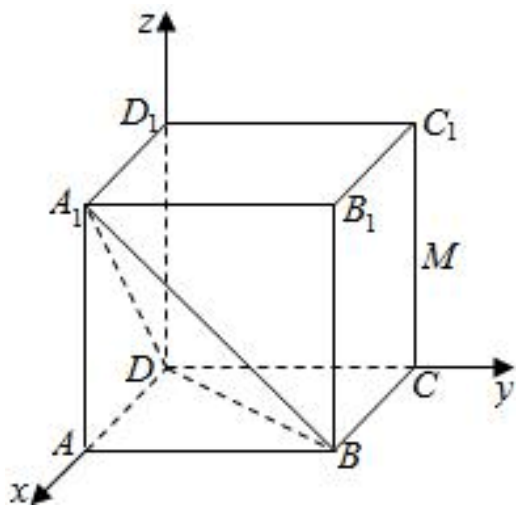
故答案为： $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, M 为棱 CC_1 的中点, 则点 M 到平面 A_1BD 的距离是___。

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】 建立空间直角坐标系，得到平面的法向量，根据空间向量的运算求得点到平面的距离。

【详解】 以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴， DD_1 为 z 轴，建立如下图所示的空间直角坐标系



则 $D(0, 0, 0)$, $A_1(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $M(0, 1, \frac{1}{2})$

所以 $\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{DM} = (0, 1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DA_1} = (1, 0, 1)$

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，根据向量垂直可得

$$\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = x + y = 0$$

$$\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DA_1} = x + z = 0 \quad , \quad \text{令 } x=1, \text{ 解得 } \mathbf{m} = (1, -1, -1)$$

所以 M 到平面 A_1BD 的距离为 $d = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{DM}|}{|\vec{m}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】 本题考查了空间向量在求点到平面距离中的基本应用，属于中档题.

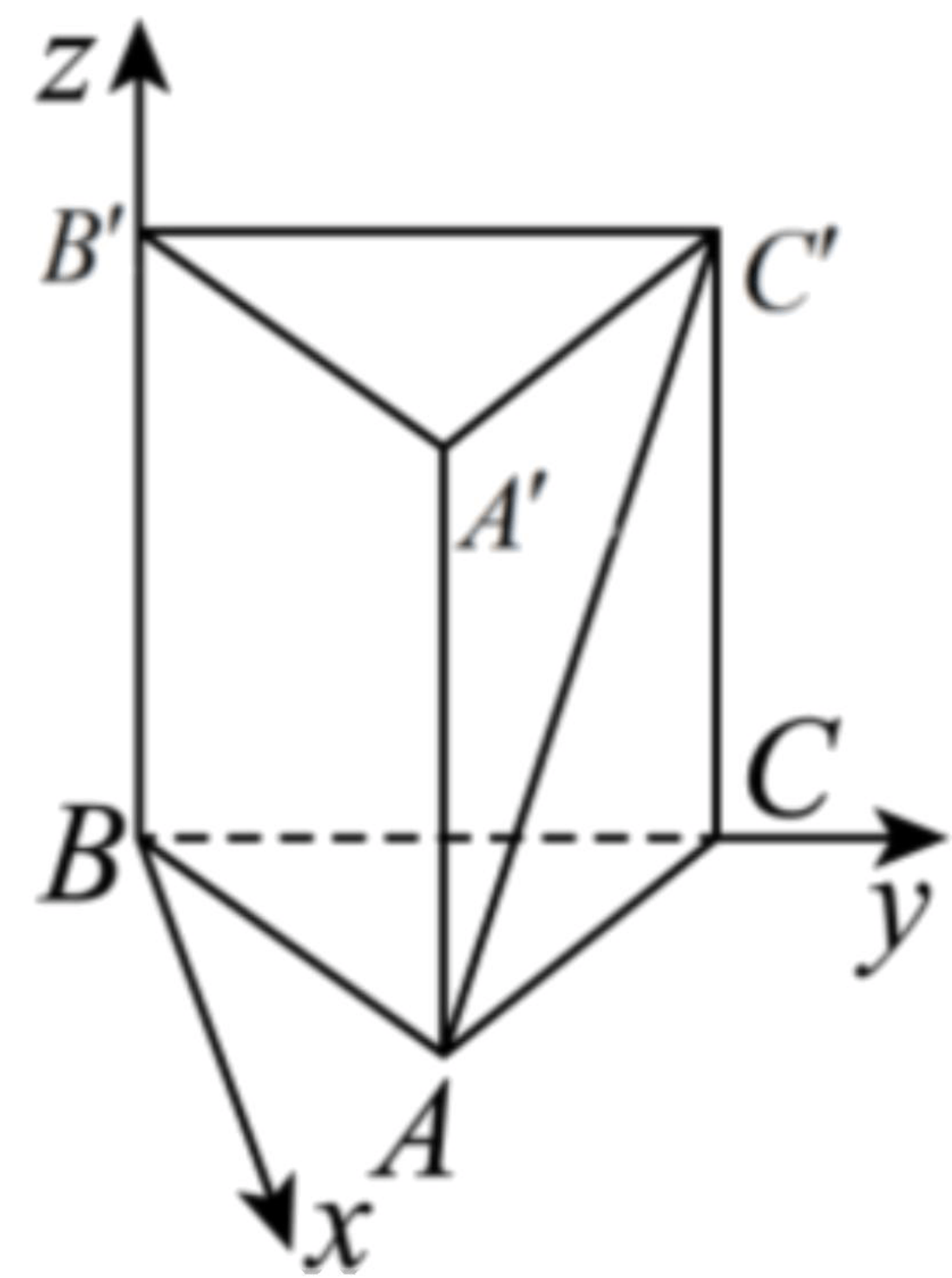
7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=1, AA_1=2$ ，则直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{15}}{10}$

【分析】 建立空间直角坐标系，利用空间向量的夹角坐标公式即可求出结果.

【详解】 以 B 为原点，以过 B 作 BC_1 的垂线为 x 轴，以 BC, BB_1 为 y, z 轴，

建立空间直角坐标系，如图，



则 $B(0, 0, 0), B_1(0, 0, 2), C(0, 1, 0), A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ，所以 $\vec{BB_1} = (0, 0, 2), \vec{BA} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

平面 ABB_1A_1 的一个法向量设为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$\vec{n} \cdot \vec{BB_1} = 2z = 0$
则 $\vec{n} \cdot \vec{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$ ，令 $x = 1$ 得 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 0)$,

又BC (0, 12), 设直线BC 与平面ABB A 所成的角为 , [0, $\frac{\pi}{2}$],

则 $\sin \left| \cos n,BC \right| = \frac{\left| n \cdot BC \right|}{\left| n \right| \left| BC \right|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$

故答案为: $\frac{\sqrt{15}}{10}$

8. 下列说法正确的是_____.

- ①一条直线和平面平行的充要条件是直线的方向向量垂直于平面的法向量.
- ②如果直线AB 与CD 是异面直线, 那么向量AB 与CD 不共面
- ③两条异面直线的公垂线段, 是连接两条异面直线所有线段中的最短线段.
- ④直三棱柱任意两个侧面的面积之和大于第三个侧面的面积.

【答案】③④

【分析】利用直线方向向量和平面法向量的位置关系判断①, 利用向量可以平移的性质判断②, 根据异面直线公垂线段的定义判断③, 根据直三棱柱的结构特征判断④.

【详解】由“一条直线和平面平行”可得“直线的方向向量垂直于平面的法向量”, 所以充分性成立, 由“直线的方向向量垂直于平面的法向量”可得“直线平行于平面或直线在平面内”, 所以必要性不成立, 综上一条直线和平面平行的充分不必要条件是直线的方向向量垂直于平面的法向量, ①说法错误; 直线AB 与CD 是异面直线, 因为向量是可以自由平移的, 所以向量AB 与CD 可以平移到同一平面, ②说法错误; 两条异面直线的距离是两条异面直线的公垂线段的长度, 两条异面直线的公垂线段, 是连接两条异面直线所有线段中的最短线段, ③说法正确; 因为直三棱柱的侧棱垂直于底面, 三角形的任意两边之和大于第三边, 所以直三棱柱任意两个侧面的面积之和大于第三个侧面的面积, ④说法正确; 故答案为: ③④

9. 设AB 和CD 都是平面 的垂线, 其垂足分别为B,D .已知AB 5,CD 9,BD 3, 那么线段AC _____.

【答案】5或 $\sqrt{205}$

【分析】根据线面垂直的性质, 证得AB //CD , 且AB BD ,CD BD , 分A,C 在平面的同侧和A,C 在平面的两侧, 两种情况讨论, 分别作AE CD 和AF CF , 在直角△ACE 和直角△ACF 中, 结合勾股定理, 即可求解.

【详解】如图所示, 因为AB 和CD 都是平面 的垂线, 其垂足分别为B,D ,

可得 $AB \parallel CD$, 且 $AB \perp BD, CD \perp BD$,

如图 (1) 所示, 当点 A, C 在平面的同侧时,

过点 A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , 则 $AE \parallel BD$,

又因为 $AB = 5, CD = 9, BD = 3$, 可得 $CE = CD - DE = CD - AB = 4$,

在直角 $\triangle ACE$ 中, 可得 $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

如图 (2) 所示, 当点 A, C 在平面的两侧时,

过点 A 作 CD 的延长线的垂线, 设 $AF \perp CF$, 垂足为 F , 则 $AF \parallel BD$,

又因为 $AB = 5, CD = 9, BD = 3$, 可得 $CF = CD + DF = CD + AB = 14$,

在直角 $\triangle ACF$ 中, 可得 $AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{3^2 + 14^2} = \sqrt{205}$.

故答案为: 5 或 $\sqrt{205}$.

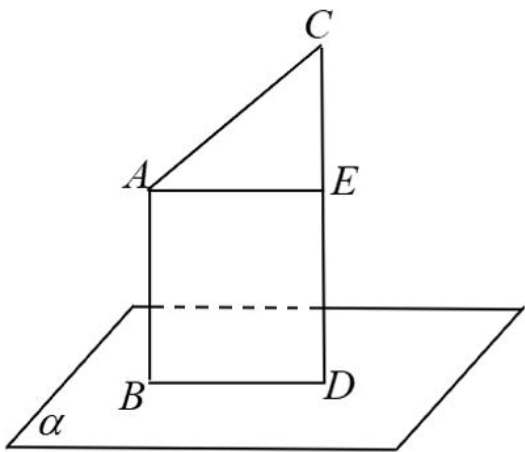


图 (1)

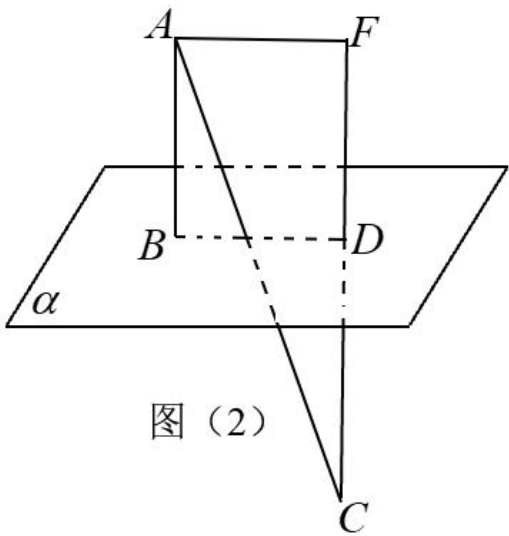


图 (2)

10. 设 O_1, O_2 分别是圆柱 P 的上、下底面 ω_1, ω_2 的中心, Q_i 是以 O_i 为顶点, ω_{3-i} 为底面的圆锥体 $i = 1, 2$, 若圆柱 P 的体积为 1 , 那么圆锥 Q_1, Q_2 的公共部分的体积为_____.

【答案】 $\frac{1}{12}$

【分析】 根据题意, 得到圆锥 Q_1, Q_2 的公共部分为同底的圆锥 O_1O_2 和 O_2O_1 , 结合圆柱和圆锥的体积公式, 即可求解.

【详解】 如图所示, 根据题意, 以 Q_i 是以 O_i 为顶点, ω_{3-i} 为底面的圆锥体 $i = 1, 2$,

则圆锥 Q_1, Q_2 的公共部分为同底的圆锥 O_1O_2 和 O_2O_1

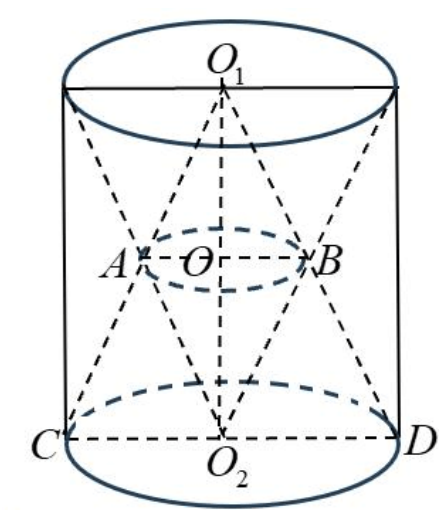
设圆锥 P 底面圆的半径为 R , 高为 h , 可得 $\pi R^2 h = 1$,

由 $O_1A \sim O_2C$, 且根据几何体的对称性, 可得 $AB = R$,

即公共部分的圆锥的底面圆的半径为 $\frac{1}{2}R$, 且每个小圆锥的高为 $\frac{1}{2}h$,

所以公共部分的体积为 $V = \frac{1}{3} \pi (\frac{1}{2}R)^2 \frac{1}{2}h = \frac{1}{12} \pi R^2 h$.

故答案为： $\frac{1}{12}$.

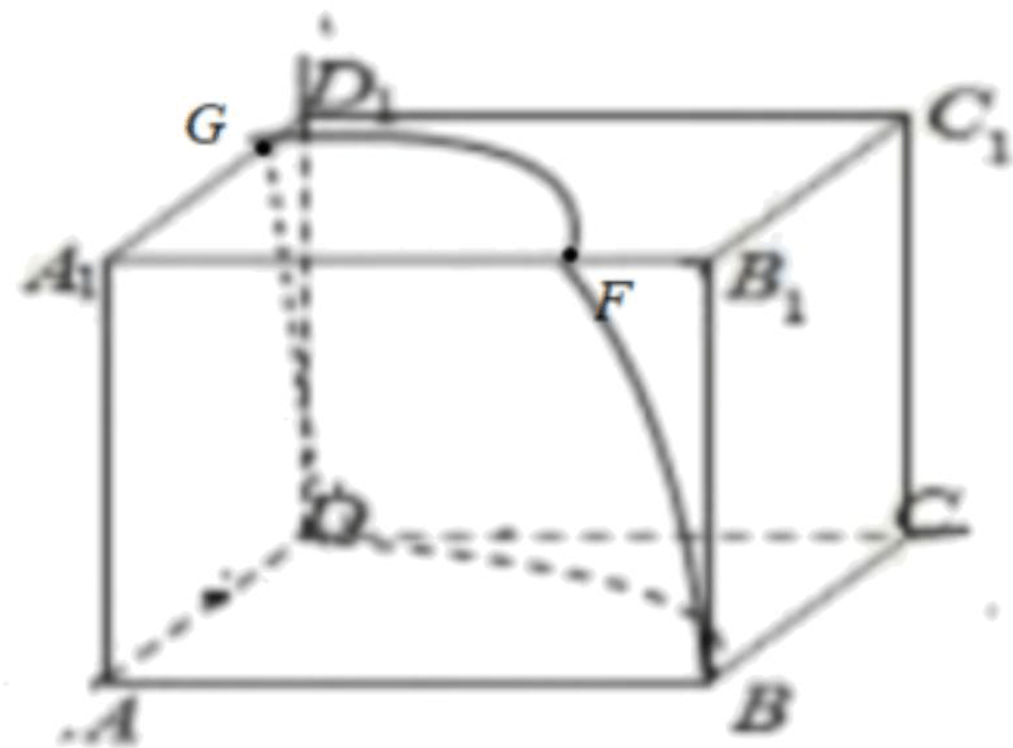


11. 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB = 2, AA_1 = 1$ ，那么以 A 为球心，半径为 2 的球面与该四棱柱表面交线的总长度为_____.

【答案】 $\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

【分析】 利用球与正四棱柱的特征求轨迹长度即可.

【详解】



如图所示，以 A 为球心，半径为 2 的球面与该四棱柱的表面交线为四段弧 FB 、 BD 、 FG 、 DG ，

分别在平面 ABB_1A_1 、 $ABCD$ 、 ADD_1A_1 、 $A_1B_1C_1D_1$ 上，

易知 $\angle FAB = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle DBA = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle GDA = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle BDG = \frac{\pi}{2}$ ，

$$\angle GFD = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle GFD = \frac{\pi}{2},$$

所以交线长为 $\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/045221024104011342>