

专题 35 最值模型之费马点模型

费马点问题是由全等三角形中的手拉手模型衍生而来，主要考查转化与化归等的数学思想，在各类考试中都以中高档题为主。本专题就最值模型中的费马点问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

【模型背景】皮耶·德·费马，17 世纪法国数学家，有“业余数学家之王”的美誉，之所以叫业余并非段位不够，而是因为其主职是律师，兼职搞搞数学。费马在解析几何、微积分等领域都有卓越的贡献，除此之外，费马广为人知的是以其名字命名的“费马小定理”、“费马大定理”等。**费马点：**三角形内的点到三个顶点距离之和最小的点。

目录导航

例题讲模型

模型 1.费马点模型	1
模型 2.加权费马点模型	12

习题练模型

20

例题讲模型

模型 1.费马点模型

模型解读

结论：如图 1，点 M 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，连接 AM 、 BM 、 CM ，当 M 与三个顶点连线的夹角为 120° 时， $MA+MB+MC$ 的值最小。

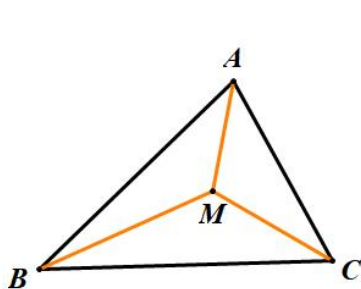


图1

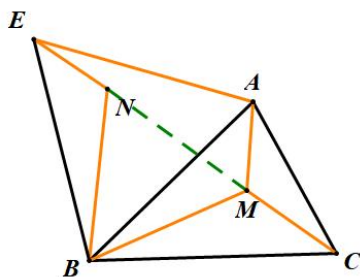


图2

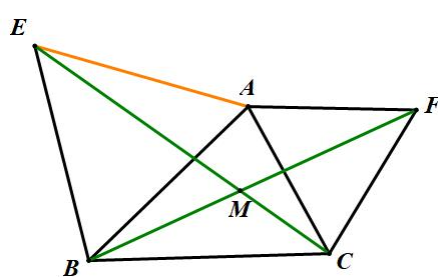


图3

注意：上述结论成立的条件是 $\triangle ABC$ 的最大的角要小于 120° ，若最大的角大于或等于 120° ，此时费马点就

是最大角的顶点 A 。(这种情况一般不考,通常只考查三角形的最大顶角小于 120°)

模型证明

证明: 如图 2, 以 AB 为一边向外作等边三角形 $\triangle ABE$, 将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN , 连接 EN .

$\because \triangle ABE$ 为等边三角形, $\therefore AB=BE$, $\angle ABE=60^\circ$. 而 $\angle MBN=60^\circ$, $\therefore \angle ABM=\angle EBN$.

在 $\triangle AMB$ 与 $\triangle ENB$ 中, $\therefore \begin{cases} AB=BE \\ \angle ABM=\angle EBN \\ BM=BN \end{cases}, \therefore \triangle AMB \cong \triangle ENB \text{ (SAS)}.$

连接 MN . 由 $\triangle AMB \cong \triangle ENB$ 知, $AM=EN$. $\because \angle MBN=60^\circ$, $BM=BN$, $\therefore \triangle BMN$ 为等边三角形.

$\therefore BM=MN$. $\therefore AM+BM+CM=EN+MN+CM$. $\therefore$ 当 E 、 N 、 M 、 C 四点共线时, $AM+BM+CM$ 的值最小.

此时, $\angle BMC=180^\circ - \angle NMB=120^\circ$; $\angle AMB=\angle ENB=180^\circ - \angle BNM=120^\circ$;

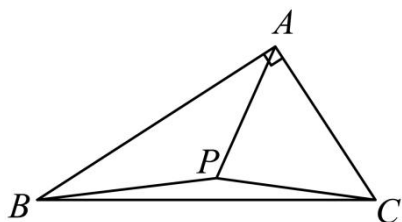
$\angle AMC=360^\circ - \angle BMC - \angle AMB=120^\circ$.

费马点的作法: 如图 3, 分别以 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 为一边向外作等边 $\triangle ABE$ 和等边 $\triangle ACF$, 连接 CE 、 BF , 设交点为 M , 则点 M 即为 $\triangle ABC$ 的费马点.

【最值原理】 两点之间, 线段最短.

模型运用

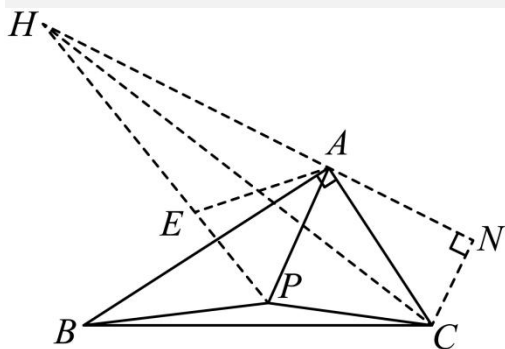
例 1. (23-24 九年级上·广东江门·阶段练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=5$, $AC=2\sqrt{3}$, 点 P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 则点 P 到 $\triangle ABC$ 三个顶点之和的最小值是_____.



【答案】 $\sqrt{67}$

【分析】 将 $\triangle ABP$ 绕着点 A 顺时针旋转 60° , 得到 $\triangle AEH$, 连接 EP , CH , 过点 C 作 $CN \perp AH$, 交 HA 的延长线于 N , 由旋转的性质可得 $\angle BAP=\angle HAE$, $AE=AP$, $AH=AB=5$, $\angle BAH=60^\circ$, $BP=HE$, 易得 $\triangle AEP$ 是等边三角形, 可得 $AE=AP=EP$, 进而得到 $AP+BP+PC=EP+EH+PC$, 当点 H 、 E 、 P 、 C 共线时, $AP+BP+PC$ 有最小值 HC , 再求出 CN 和 HN 的长度, 由勾股定理可求解.

【详解】 解: 将 $\triangle ABP$ 绕着点 A 顺时针旋转 60° , 得到 $\triangle AEH$, 连接 EP , CH , 过点 C 作 $CN \perp AH$, 交 HA 的延长线于 N ,



$\therefore \angle BAP = \angle HAE$, $AE = AP$, $AH = AB = 5$, $\angle BAH = 60^\circ$, $BP = HE$,

$\therefore \angle HAB = \angle EAP = 60^\circ$, $\therefore \triangle AEP$ 是等边三角形, $\therefore AE = AP = EP$,

$\therefore AP + BP + PC = EP + EH + PC$, $\therefore$ 当点 H 、 E 、 P 、 C 共线时, $AP + BP + PC$ 有最小值 HC .

$\therefore \angle NAC = 180^\circ - \angle BAH - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$,

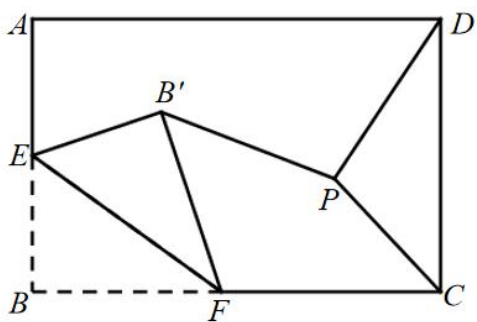
$\therefore CN = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$, $\therefore AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$, $\therefore HN = AH + AN = 5 + 3 = 8$.

在 $\text{Rt}\triangle CNH$ 中, $CH = \sqrt{HN^2 + CN^2} = \sqrt{8^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{67}$, 即点 P 到 $\triangle ABC$ 三个顶点之和的最小值是 $\sqrt{67}$.

故答案为: $\sqrt{67}$.

【点睛】本题属于几何变换综合题,考查了旋转的性质,等边三角形的判定和性质,勾股定理,直角三角形的性质,构造旋转图形是本题的关键.

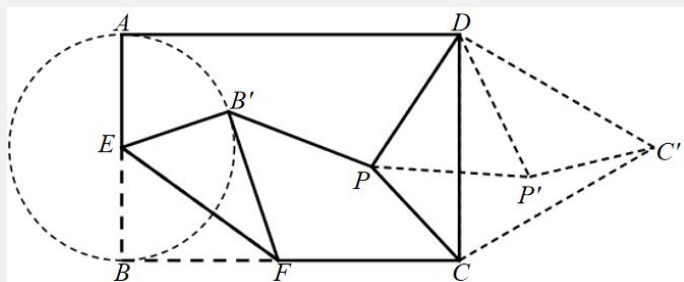
例 2. (2024·江苏宿迁·模拟预测) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 6$, E 是 AB 的中点, F 是 BC 边上一动点, 将 $\triangle BEF$ 沿着 EF 翻折, 使得点 B 落在点 B' 处, 矩形内有一动点 P , 连接 PB' , PC , PD , 则 $PB' + PC + PD$ 的最小值为_____.



【答案】 $4 + 2\sqrt{3}$

【分析】将 $\triangle DPC$ 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle DP'C'$, 连接 PP' 、 CC' , 从而将 $PB' + PC + PD$ 转化到 $PB' + PP' + P'C'$, 当点 E 、 B' 、 P 、 P' 、 C' 在同一条直线上时, $PB' + PC + PD = PB' + PP' + P'C'$ 取得最小值.

【详解】



如图，将 $\triangle DPC$ 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle DP'C'$ ，连接 PP' 、 CC' ，则有：

$\triangle DPP'$ 、 $\triangle DCC'$ 是等边三角形， $\therefore PD = PP'$ ， $PC = P'C'$ $\therefore PB' + PC + PD = PB' + PP' + P'C'$

由折叠的性质可知， B' 的运动轨迹是以 E 为圆心， EB 长为半径的圆（如图所示），故当 E 、 B' 、 P 、 P' 、 C' 在同一直线上时取最小值；

$\because AB = 4, BC = 6, E$ 是 AB 的中点， $\triangle DPP'$ 、 $\triangle DCC'$ 是等边三角形，

$\therefore DC = 4, EB = EB' = \frac{1}{2} AB = 2$ ，

$\therefore PD = PP' = \frac{\sqrt{3}}{3} DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}, PC = P'C' = PD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \therefore PB' = 6 - 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore PB' + PC + PD$ 的最小值为： $PB' + PC + PD = PB' + PP' + P'C' = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 + 2\sqrt{3}$ ；

故答案为 $4 + 2\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查了图形中求最短距离的问题，解题的关键是把所求线段转化到同一直线中求解。

例 3. (23-24 九年级下·河南周口·阶段练习) 【问题背景】在已知 $\triangle ABC$ 所在平面内求一点 P ，使它到三角形的三个顶点的距离之和最小（如图 1）。这个问题是有着“业余数学家之王”美誉的法国律师费马在 1640 年前后向意大利物理学家托里拆利提出的，所求的点被人们称为“费马点”。解决方法如下：如图 2，把 $\triangle APC$ 绕 A 点逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AP'C'$ （点 P, C 的对应点分别为点 P', C' ），连接 PP' ，则 $\angle PAP' = 60^\circ$ ， $P'C' = PC$ 。

$\because$ _____， $\therefore \triangle APP'$ 为等边三角形， $\therefore AP = PP'$ ， $\therefore PA + PB + PC = PP' + PB + P'C'$ ，

$\therefore$ 当 B, P, P', C' 四点在同一直线上时， $PA + PB + PC$ 的值最小，即点 P 是 $\triangle ABC$ 的“费马点”。

任务：(1)横线处填写的条件是_____；(2)当点 P 是 $\triangle ABC$ 的“费马点”时， $\angle APB = \angle BPC = \angle APC =$ _____；

(3) 如图 3， $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， E, F 为 BC 上的点，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，判断 BE, EF, FC 之间的数量关系并说明理由；

【实际应用】图 4 所示是一个三角形公园，其中顶点 A, B, C 为公园的出入口， $\angle A = 75^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{2}\text{km}$ ， $AC = 4\text{km}$ ，工人师傅准备在公园内修建一凉亭 P ，使该凉亭到三个出入口的距离最小，则 $PA + PB + PC$ 的最小值是_____。

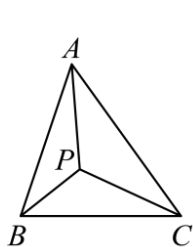


图1

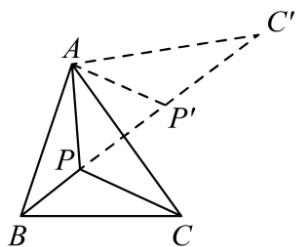


图2

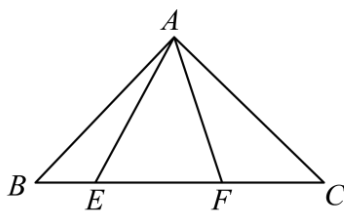


图3

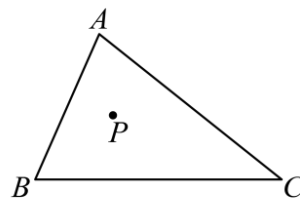


图4

【答案】问题背景：（1）见解析；（2） 120° ；（3） $EF^2 = BE^2 + CF^2$ ，理由见解析；实际应用： $2\sqrt{10}\text{km}$

【分析】问题背景：（1）先证明 $\triangle APP'$ 为等边三角形，得到 $AP = PP'$ ，则 $PA + PB + PC = PP' + PB + P'C'$ ，由此可得当 B, P, P', C' 四点在同一直线上时， $PA + PB + PC$ 的值最小，即点 P 是 $\triangle ABC$ 的“费马点”。

（2）由旋转的性质可得 $\angle CAC' = 60^\circ$ ， $\angle C' = \angle ACP$ ，进而利用三角形内角和定理得到 $\angle CPO = \angle CAC' = 60^\circ$ ，再由等边三角形的性质得到 $\angle APP' = 60^\circ$ ，则 $\angle AP'C' = 120^\circ$ ， $\angle APC = 120^\circ$ ，即可利用周角的定义得到 $\angle BPC = 360^\circ - \angle ABP - \angle APC = 120^\circ$ ；

（3）将 $\triangle BAE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle CAD$ ，连接 DF ，利用旋转的性质和等边对等角，得到 $CD = BE$ ， $\triangle FCD$ 为直角三角形，进而得到 $DF^2 = CD^2 + CF^2$ ，证明 $\triangle AFE \cong \triangle AFD$ ，得到 $EF = DF$ ，即可得出结论；实际应用：如图所示，将 $\triangle CAP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle C'AP'$ ，连接 PP' ，由问题背景（1）可得当 B, P, P', C' 四点在同一直线上时， $PA + PB + PC$ 的值最小，最小值为 BC' ，过点 C' 作 $C'D \perp BA$ 交 BA 延长线于 D ，证明 $\triangle C'DA$ 是等腰直角三角形，得到 $AD = C'D = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 2\sqrt{2}\text{km}$ ，则 $BD = AB + AD = 4\sqrt{2}\text{km}$ ，利用勾股定理得到 $BC' = \sqrt{C'D^2 + BD^2} = 2\sqrt{10}\text{km}$ ，则 $PA + PB + PC$ 得最小值为 $2\sqrt{10}\text{km}$ 。

【详解】解：问题背景：（1）如图 2，把 $\triangle APC$ 绕 A 点逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AP'C'$ （点 P, C 的对应点分别为点 P', C' ），连接 PP' ，则 $\angle PAP' = 60^\circ$ ， $P'C' = PC$ 。

$\because AP = AP'$ ， $\therefore \triangle APP'$ 为等边三角形， $\therefore AP = PP'$ ， $\therefore PA + PB + PC = PP' + PB + P'C'$ ，

$\therefore$ 当 B, P, P', C' 四点在同一直线上时， $PA + PB + PC$ 的值最小，即点 P 是 $\triangle ABC$ 的“费马点”。

（2）如图 2 所示，设 PP' ， AC 交于 O ，由（1）可得当 B, P, P', C' 四点在同一直线上时， $PA + PB + PC$ 的值最小，由旋转的性质可得 $\angle CAC' = 60^\circ$ ， $\angle C' = \angle ACP$ ，又 $\because \angle AOC' = \angle POC$ ， $\therefore \angle CPO = \angle CAC' = 60^\circ$

$\because \triangle APP'$ 为等边三角形， $\therefore \angle APP' = 60^\circ$ ， $\therefore \angle AP'C' = 180^\circ - \angle AP'P = 120^\circ$ ， $\angle APC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = 360^\circ - \angle ABP - \angle APC = 120^\circ$ ， $\therefore \angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$ ，故答案为： 120° ；

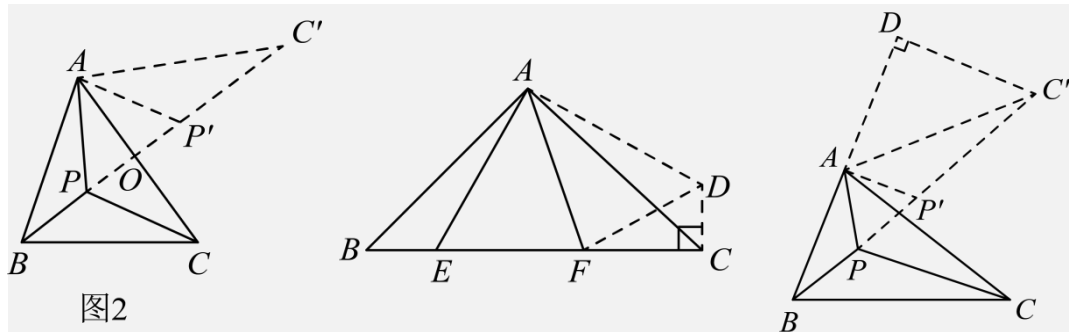


图2

(3) $EF^2 = BE^2 + CF^2$ ，理由如下： $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ$ ，

如图所示，将 $\triangle BAE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle CAD$ ，连接 DF ，

则： $\angle BAE = \angle DAC$ ， $\angle ACD = \angle B = 45^\circ$ ， $AD = AE$ ， $BE = CD$ ，

$\therefore \angle DCF = \angle ACB + \angle DCA = 90^\circ$ ， $\therefore DF^2 = CF^2 + CD^2 = CF^2 + BE^2$ ，

$\because \angle EAF = 45^\circ$ ， $\therefore \angle DAC + \angle CAF = \angle BAE + \angle CAF = \angle BAC - \angle EAF = 45^\circ$ ， $\therefore \angle DAF = \angle EAF = 45^\circ$ ，

又 $\because AF = FA$ ， $AD = AE$ ， $\therefore \triangle AFE \cong \triangle AFD$ ， $\therefore EF = DF$ ， $\therefore EF^2 = CF^2 + BE^2$ ；

实际应用：如图所示，将 $\triangle CAP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle C'AP'$ ，连接 PP' ，

由问题背景(1)可得当 B, P, P', C' 四点在一直线上时， $PA + PB + PC$ 的值最小，最小值为 BC' ，

过点 C' 作 $C'D \perp BA$ 交 BA 延长线于 D，由旋转的性质可得 $\angle CAC' = 60^\circ$ ， $AC' = AC = 4\text{km}$ ，

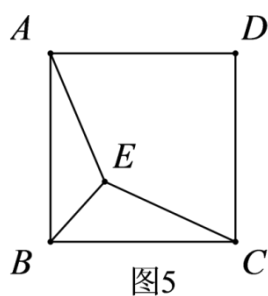
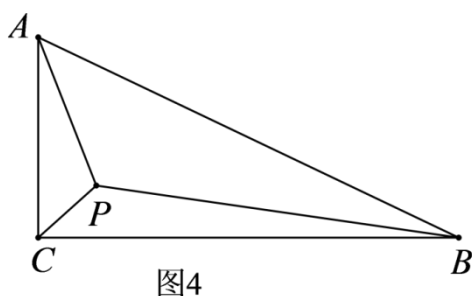
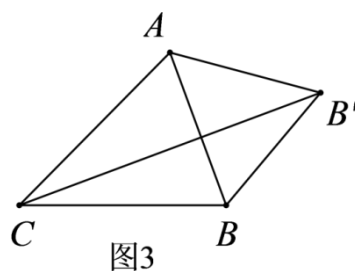
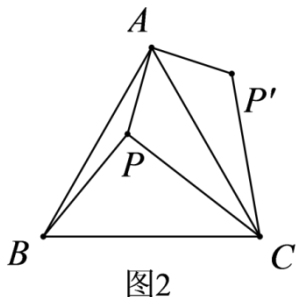
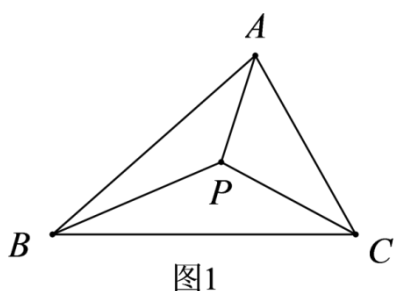
$\because \angle BAC = 75^\circ$ ， $\therefore \angle C'AD = 180^\circ - \angle CAC' - \angle BAC = 45^\circ$ ， $\therefore \triangle C'DA$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AD = C'D = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 2\sqrt{2}\text{km}$ ， $\therefore BD = AB + AD = 4\sqrt{2}\text{km}$ ，

$\therefore BC' = \sqrt{C'D^2 + BD^2} = 2\sqrt{10}\text{km}$ ， $\therefore PA + PB + PC$ 得最小值为 $2\sqrt{10}\text{km}$ ，故答案为： $2\sqrt{10}\text{km}$ 。

【点睛】本题主要考查了旋转的性质，等边三角形的性质与判定，勾股定理，全等三角形的性质与判定，等腰直角三角形的性质与判定等等，通过旋转构造全等三角形是解题的关键。

例 4. (2023 春·重庆·九年级专题练习) 背景资料：在已知 $\triangle ABC$ 所在平面上求一点 P，使它到三角形的三个顶点的距离之和最小. 这个问题是法国数学家费马 1640 年前后向意大利物理学家托里拆利提出的，所求的点被人们称为“费马点”. 如图 1，当 $\triangle ABC$ 三个内角均小于 120° 时，费马点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，当 $\angle APB = \angle APC = \angle CPB = 120^\circ$ 时，则 $PA + PB + PC$ 取得最小值.



(1)如图2, 等边 $\triangle ABC$ 内有一点 P , 若点 P 到顶点 A 、 B 、 C 的距离分别为3, 4, 5, 求 $\angle APB$ 的度数, 为了解决本题, 我们可以将 $\triangle ABP$ 绕顶点 A 旋转到 $\triangle ACP'$ 处, 此时 $\triangle ACP' \cong \triangle ABP$ 这样就可以利用旋转变换, 将三条线段 PA 、 PB 、 PC 转化到一个三角形中, 从而求出 $\angle APB = \underline{\hspace{2cm}}$;

知识生成: 怎样找三个内角均小于 120° 的三角形的费马点呢? 为此我们只要以三角形一边在外侧作等边三角形并连接等边三角形的顶点与 $\triangle ABC$ 的另一顶点, 则连线通过三角形内部的费马点. 请同学们探索以下问题. (2)如图3, $\triangle ABC$ 三个内角均小于 120° , 在 $\triangle ABC$ 外侧作等边三角形 $\triangle ABB'$, 连接 CB' , 求证: CB' 过 $\triangle ABC$ 的费马点. (3)如图4, 在 $RT\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$, $\angle ABC = 30^\circ$, 点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点, 连接 AP 、 BP 、 CP , 求 $PA + PB + PC$ 的值. (4)如图5, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 为内部任意一点, 连接 AE 、 BE 、 CE , 且边长 $AB = 2$; 求 $AE + BE + CE$ 的最小值.

【答案】(1) 150° ; (2)见详解; (3) $\sqrt{7}$; (4) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

【分析】(1)根据旋转性质得出 $\triangle ABP \cong \triangle ACP'$, 得出 $\angle BAP = \angle CAP'$, $\angle APB = \angle AP'C$, $AP = AP' = 3$, $BP = CP' = 4$, 根据 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 得出 $\angle BAC = 60^\circ$, 可证 $\triangle APP'$ 为等边三角形, $PP' = AP = 3$, $\angle AP'P = 60^\circ$, 根据勾股定理逆定理 $PP'^2 + P'C^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = PC^2$, 得出 $\triangle PP'C$ 是直角三角形, $\angle PP'C = 90^\circ$, 可求 $\angle AP'C = \angle APP' + \angle PPC = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ 即可;

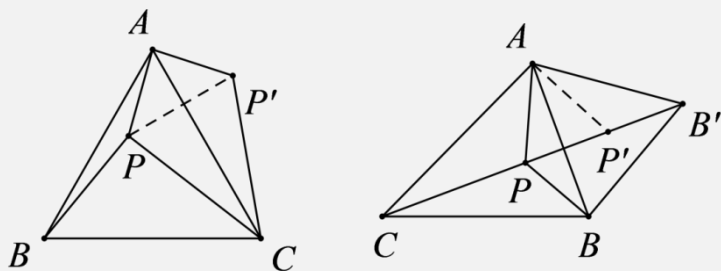
(2) 将 $\triangle APB$ 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle AB'P'$, 连结 PP' , 根据 $\triangle APB \cong \triangle AB'P'$, $AP = AP'$, $PB = P'B'$, $AB = AB'$, 根据 $\angle PAP' = \angle BAB' = 60^\circ$, $\triangle APP'$ 和 $\triangle ABB'$ 均为等边三角形, 得出 $PP' = AP$, 根据 $PA + PB + PC = PP' + P'B' + PC$, 根据两点之间线段最短得出点 C , 点 P , 点 P' , 点 B' 四点共线时, $PA + PB + PC_{\text{最小}} = CB'$, 点 P 在 CB' 上即

可;

(3) 将 $\triangle APB$ 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle AP'B'$, 连结 BB' , PP' , 得出 $\triangle APB \cong \triangle AP'B'$, 可证 $\triangle APP'$ 和 $\triangle ABB'$ 均为等边三角形, 得出 $PP'=AP$, $BB'=AB$, $\angle ABB'=60^\circ$, 根据 $PA+PB+PC=PP'+P'B'+PC$, 可得点 C , 点 P , 点 P' , 点 B' 四点共线时, $PA+PB+PC_{\text{最小}}=CB'$, 利用 30° 直角三角形性质得出 $AB=2AC=2$, 根据勾股定理 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, 可求 $BB'=AB=2$, 根据 $\angle CBB'=\angle ABC+\angle ABB'=30^\circ+60^\circ=90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle CBB'$ 中, $B'C=\sqrt{BC^2+BB'^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$ 即可;

(4) 将 $\triangle BCE$ 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle CE'B'$, 连结 EE' , BB' , 过点 B' 作 $B'F \perp AB$, 交 AB 延长线于 F , 得出 $\triangle BCE \cong \triangle CE'B'$, $BE=B'E'$, $CE=CE'$, $CB=CB'$, 可证 $\triangle ECE'$ 与 $\triangle BCB'$ 均为等边三角形, 得出 $EE'=EC$, $BB'=BC$, $\angle B'BC=60^\circ$, $AE+BE+CE=AE+EE'+E'B'$, 得出点 C , 点 E , 点 E' , 点 B' 四点共线时, $AE+BE+CE=AE+EE'+E'B'_{\text{最小}}=AB'$, 根据四边形 $ABCD$ 为正方形, 得出 $AB=BC=2$, $\angle ABC=90^\circ$, 可求 $\angle FBB'=180^\circ-\angle ABC-\angle CBB'=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$, 根据 30° 直角三角形性质得出 $BF=\frac{1}{2}BB'=\frac{1}{2} \times 2=1$, 勾股定理 $BF=\sqrt{BB'^2-B'F^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, 可求 $AF=AB+BF=2+\sqrt{3}$, 再根据勾股定理 $AB'=\sqrt{AF^2+B'F^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 即可.

【详解】(1) 解: 连结 PP' , $\because \triangle ABP \cong \triangle ACP'$, $\therefore \angle BAP=\angle CAP'$, $\angle APB=\angle AP'C$, $AP=AP'=3$, $BP=CP'=4$, $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore \angle BAC=60^\circ \therefore \angle PAP'=\angle PAC+\angle CAP'=\angle PAC+\angle BAP=60^\circ$, $\therefore \triangle APP'$ 为等边三角形, $\therefore PP'=AP=3$, $\angle AP'P=60^\circ$, 在 $\triangle P'PC$ 中, $PC=5$, $PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25=PC^2$, $\therefore \triangle PP'C$ 是直角三角形, $\angle PP'C=90^\circ$, $\therefore \angle AP'C=\angle APP'+\angle PPC=60^\circ+90^\circ=150^\circ$, $\therefore \angle APB=\angle AP'C=150^\circ$, 故答案为 150° ;



(2) 证明: 将 $\triangle APB$ 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle AB'P'$, 连结 PP' , $\because \triangle APB \cong \triangle AB'P'$, $\therefore AP=AP'$, $PB=P'B'$, $AB=AB'$,

$\because \angle PAP'=\angle BAB'=60^\circ$, $\therefore \triangle APP'$ 和 $\triangle ABB'$ 均为等边三角形, $\therefore PP'=AP$,

$\because PA+PB+PC=PP'+P'B'+PC$, $\therefore$ 点 C , 点 P , 点 P' , 点 B' 四点共线时, $PA+PB+PC_{\text{最小}}=CB'$,

∴点 P 在 CB' 上, ∴ CB' 过 $\triangle ABC$ 的费马点.

(3) 解: 将 $\triangle APB$ 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle AP'B'$, 连结 BB' , PP' ,

∴ $\triangle APB \cong \triangle AP'B'$, ∴ $AP' = AP$, $AB' = AB$,

∵ $\angle PAP' = \angle BAB' = 60^\circ$, ∴ $\triangle APP'$ 和 $\triangle ABB'$ 均为等边三角形, ∴ $PP' = AP$, $BB' = AB$, $\angle ABB' = 60^\circ$,

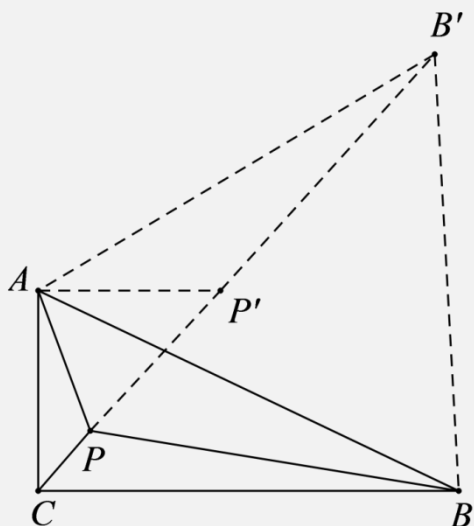
∵ $PA + PB + PC = PP' + P'B' + PC$ ∴ 点 C , 点 P , 点 P' , 点 B' 四点共线时, $PA + PB + PC_{\text{最小}} = CB'$,

∵ $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$, $\angle ABC = 30^\circ$, ∴ $AB = 2AC = 2$, 根据勾股定理 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ∴

$BB' = AB = 2$,

∵ $\angle CBB' = \angle ABC + \angle ABB' = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, ∴ 在 $\text{Rt}\triangle CBB'$ 中, $B'C = \sqrt{BC^2 + BB'^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$

∴ $PA + PB + PC_{\text{最小}} = CB' = \sqrt{7}$;



(4) 解: 将 $\triangle BCE$ 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle CE'B'$, 连结 EE' , BB' , 过点 B' 作 $B'F \perp AB$, 交 AB 延长线于 F ,

∴ $\triangle BCE \cong \triangle CE'B'$, ∴ $BE = B'E'$, $CE = CE'$, $CB = CB'$,

∵ $\angle ECE' = \angle BCB' = 60^\circ$, ∴ $\triangle ECE'$ 与 $\triangle BCB'$ 均为等边三角形, ∴ $EE' = EC$, $BB' = BC$, $\angle B'BC = 60^\circ$,

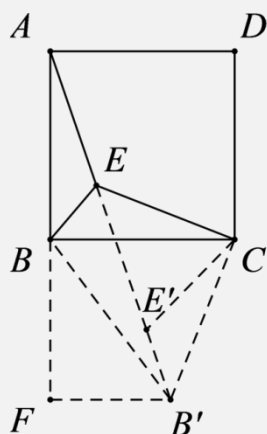
∵ $AE + BE + CE = AE + EE' + E'B'$,

∴ 点 C , 点 E , 点 E' , 点 B' 四点共线时, $AE + BE + CE = AE + EE' + E'B'_{\text{最小}} = AB'$,

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形, ∴ $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 90^\circ$, ∴ $\angle FBB' = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBB' = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

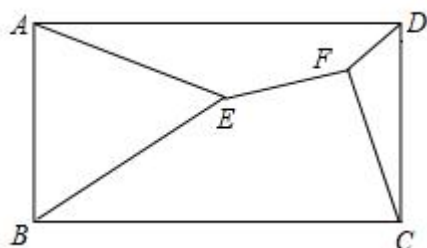
∵ $B'F \perp AF$, ∴ $BF = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$, $BF = \sqrt{BB'^2 - B'F^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

∴ $AF = AB + BF = 2 + \sqrt{3}$, ∴ $AB' = \sqrt{AF^2 + B'F^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, ∴ $AE + BE + CE_{\text{最小}} = AB' = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.



【点睛】本题考查图形旋转性质，等边三角形判定与性质，勾股定理，直角三角形判定与性质，两点之间线段最短，四点共线，正方形性质， 30° 直角三角形性质，掌握图形旋转性质，等边三角形判定与性质，勾股定理，直角三角形判定与性质，两点之间线段最短，四点共线，正方形性质， 30° 直角三角形性质是解题关键。

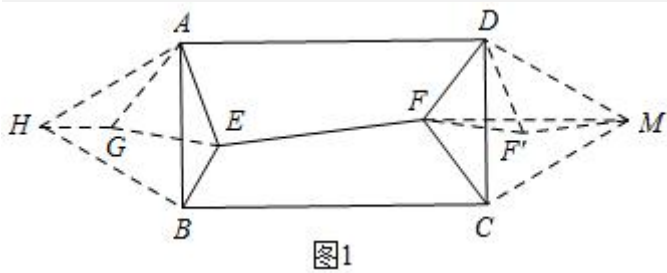
例 5. (2024·江苏·校考三模) 如图，四个村庄坐落在矩形 $ABCD$ 的四个顶点上， $AB=10$ 公里， $BC=15$ 公里，现在要设立两个车站 E, F ，则 $EA+EB+EF+FC+FD$ 的最小值为_____公里。



【答案】 $15+10\sqrt{3}$

【分析】将 $\triangle AEB$ 绕 A 顺时针旋转 60° 得 $\triangle AGH$ ，连接 BH, EG ，将 $\triangle DFC$ 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle DFM$ ，连接 CM, FM, FF' ，如图 2，此时 EH, EF, FM 共线， $EA+EB+EF+FC+FD$ 是最小值，利用旋转的性质和等边三角形的性质，相加即可得出结论。

【详解】解：如图 1，将 $\triangle AEB$ 绕 A 顺时针旋转 60° 得 $\triangle AGH$ ，连接 BH, EG ，将 $\triangle DFC$ 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle DFM$ ，连接 CM, FF' ，

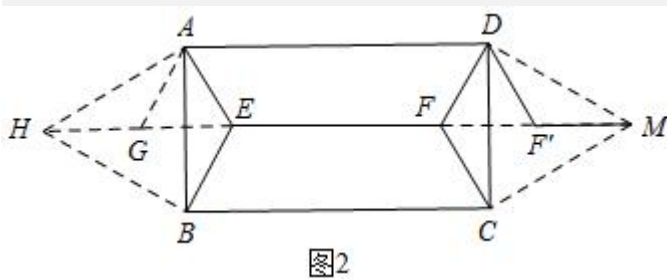


由旋转得： $AB=AH$ ， $AE=AG$ ， $\angle EAG=\angle BAH=60^\circ$ ， $BE=GH$ ，

$\therefore \triangle AEG$ 和 $\triangle ABH$ 是等边三角形， $\therefore AE=EG$ ，

同理得： $\triangle DFF'$ 和 $\triangle DCM$ 是等边三角形， $DF=FF'$ ， $FC=FM$ ，

$\therefore$ 当 H 、 G 、 E 、 F 、 F' 、 M 在同一条直线上时， $EA+EB+EF+FC+FD$ 有最小值， 如图 2，



$\because AH=BH$ ， $DM=CM$ ， $\therefore HM$ 是 AB 和 CD 的垂直平分线， $\therefore HM \perp AB$ ， $HM \perp CD$ ，

$\because AB=10$ ， $\therefore \triangle ABH$ 的高为 $5\sqrt{3}$ ，

$\therefore EA+EB+EF+FC+FD=EG+GH+EF+FF'+F'M=HM=15+5\sqrt{3}+5\sqrt{3}=15+10\sqrt{3}$ ，

则 $EA+EB+EF+FC+FD$ 的最小值是 $(15+10\sqrt{3})$ 公里． 故答案为： $(15+10\sqrt{3})$ ．

【点睛】 本题考查了矩形的性质和最短路径问题， 旋转的性质和等边三角形的性质， 确定最小值时点 E 和 F 的位置是本题的关键， 利用全等、 勾股定理求其边长， 从而得出结论．

模型 2. 加权费马点模型

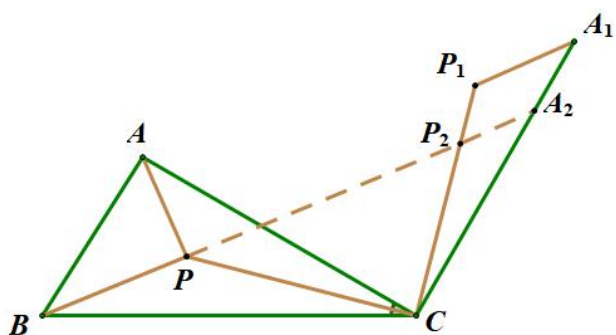
模型解读

结论：点 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内任意一点，连接 AP 、 BP 、 CP ，求 $xAP+yBP+zCP$ 最小值。（加权费马点）

模型证明

证明：第一步，选定固定不变线段；第二步，对剩余线段进行缩小或者放大。

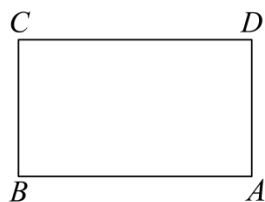
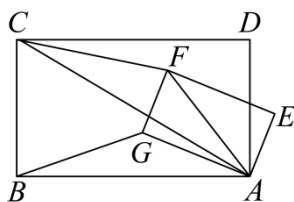
如：保持 BP 不变， $xAP+yBP+zCP=y(\frac{x}{y}AP+BP+\frac{z}{y}CP)$ ，如图， B 、 P 、 P_2 、 A_2 四点共线时，取得最小值。



模型运用

例 1. (2024·广东广州·一模) 如图，在矩形 $ABCD$ 和矩形 $AGFE$ 中， $AD=4$ ， $AE=2$ ，

$AB=\sqrt{3}AD$ ， $AG=\sqrt{3}AE$ ．矩形 $AGFE$ 绕着点 A 旋转，连接 BG ， CF ， AC ， AF ．



备用图

(1) 求证： $\triangle ABG \sim \triangle ACF$ ；(2) 当 CE 的长度最大时，①求 BG 的长度；②在 $\triangle ACF$ 内是否存在一点 P ，使得 $CP+AP+\sqrt{3}PF$ 的值最小？若存在，求 $CP+AP+\sqrt{3}PF$ 的最小值；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) 见解析 (2) ① $BG=2\sqrt{21}$ ；② 存在，最小值是 $4\sqrt{13}$

【分析】 (1) 根据矩形的性质，先证 $\triangle ABC \sim \triangle AGF$ ，利用相似三角形的性质准备条件，再证 $\triangle ABG \sim \triangle ACF$ 即可；(2) ① 先确定当 E 在矩形 $ABCD$ 外，且 C, A, E 三点共线时， CE 的长度最大，并画出图形，在 $Rt\triangle CEF$ 中求出 CF 的长，最利用 $\triangle ABG \sim \triangle ACF$ 的性质求解即可；② 将 AP 绕着点 A 顺时针旋转 30° ，且使 $AK=\sqrt{3}AP$ ，连接 PK ，同理将 AF 绕着点 A 顺时针旋转 30° ，得到 AL ，且使 $AL=\sqrt{3}AF$ ，连接 LK ，过 P 作 $PS \perp AK$ 于 S ，过点 L 作 LQ 垂直 CE 的延长线于点 Q ，确定 $CP+AP+\sqrt{3}PF \geq CL$ ，当 C, P, K, L 四点共线时， CL 的长

【详解】(1) 证明: $\because AB = \sqrt{3}AD, AG = \sqrt{3}AE, \therefore \frac{AB}{AG} = \frac{\sqrt{3}AD}{\sqrt{3}AE} = \frac{AD}{AE},$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AGF, \angle BAC = \angle GAF, \therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AG}, \angle BAC - \angle GAC = \angle GAF - \angle GAC,$$
$$\text{即 } \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AG}, \angle BAG = \angle CAF, \therefore \triangle ABG \sim \triangle ACF$$
[illegible]

① $\because AD=4$, $AB=\sqrt{3}AD=4\sqrt{3}$, $\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=8$, $\angle BAC=30^\circ$,

$$\therefore CF = \sqrt{CE^2 + EF^2} = \sqrt{10^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{7}, \text{ 由 (1) 得: } \triangle ABG \sim \triangle ACF,$$
$$\therefore \frac{BG}{CF} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{即} \frac{BG}{4\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{3}}{8}, \quad \therefore BG = 2\sqrt{21};$$

由旋转可得: $\angle PAF = \angle KAL = 30^\circ - \angle FAK$, $\therefore \triangle AKL \sim \triangle APF$, $\therefore \frac{KL}{PF} = \frac{AK}{AP} = \sqrt{3}$, $\therefore KL = \sqrt{3}PF$,

$$\therefore KS = AK - AS = \frac{\sqrt{3}}{2} AP, \text{ 则 } \tan \angle PKS = \frac{PS}{KS} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \therefore \angle PKS = 30^\circ, \quad \therefore PK = AP,$$

由题意, $\angle LAC = 90^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 150^\circ$, $AF = 4$, $AC = 8$, $AL = 4\sqrt{3}$,

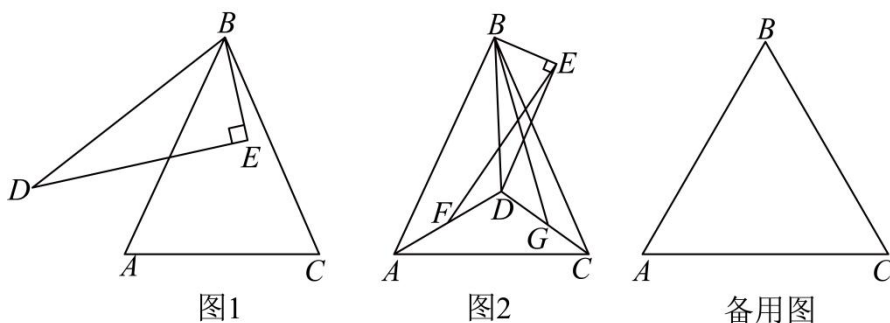
过点 L 作 LQ 垂直 CE 的延长线于点 Q , $\angle LAQ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$,

$\therefore QL = 2\sqrt{3}$, $AQ = 6$, 则 $CQ = AC + AQ = 14$,

在 $Rt\triangle CQL$ 中, 根据勾股定理得 $CL = \sqrt{CQ^2 + QL^2} = 4\sqrt{13}$, $\therefore CP + AP + \sqrt{3}PF$ 的最小值为 $4\sqrt{13}$.

【点睛】本题是一道压轴题, 主要考查了矩形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 旋转的性质, 解直角三角形, 等腰三角形的判定, 最短路径等知识, 涉及知识点较多, 综合性强, 熟练掌握相关的知识与联系, 适当添加辅助线是解答的关键.

例 2. (2024·重庆·二模) 已知 $\triangle ABC$ 中 $AB = BC$, 点 D 和点 E 是平面内两点, 连接 BD , DE 和 BE , $\angle BED = 90^\circ$.



- (1) 如图 1, 若 $BD = BA$, $\angle ABC = 2\angle D$, $BE = 2$, 求 AC 的长度; (2) 如图 2, 连接 AD 和 CD , 点 F 为 AD 中点, 点 G 为 CD 中点, 连接 EF 和 BG , 若 $EF = BG$, 求证: $\angle BAC = \angle DBE$; (3) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2$, 当 $\frac{1}{2}AD + \frac{\sqrt{3}}{2}BD + CD$ 取得最小值, 且 AE 取得最大值时, 直接写出 $\triangle BDE$ 的面积.

【答案】(1) 4 (2) 见解析 (3) $\frac{12\sqrt{19}}{133}$

【分析】(1) 过点 B 作 $BH \perp AC$ 交 AC 于点 H , 证明 $\triangle AHB \cong \triangle BED$ (AAS) 即可求解;

(2) 取 BD 的中点 T , 连接 TE, TF, TG , 根据中位线的性质, 直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半, 得出 $\triangle TFE \cong \triangle TBG$ (SSS), 再证明 $\triangle TBE \sim \triangle TFG$, 得出 $\angle EBT = \angle GFT$, 进而即可得证;

(3) 将 $\triangle BDC$ 绕点 B 顺时针转 60° 得到 $\triangle BD'A$, 将 $\triangle ABD$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle BA'D'$, 连接 AA' , 根据 $\frac{1}{2}AD + \frac{\sqrt{3}}{2}BD + CD = GF + FD + CD \geq GC$, 当 G, F, D, C 四点共线时, GC 最小, 进而确定 E 的位置, 根据点 E 在 O 为圆心, $\frac{1}{2}BD$ 为半径的圆上运动, 由点到圆上的距离关系, 得出当 AE 取得最大值时, E 在 AO 的延长线上, 连接 OF , 过点 E 作 $ES \perp BD$ 于点 S , 进而解直角三角形, 求得 SE 的长, 根据三角形面积公式, 即可求解.

【详解】(1) 解: 如图所示, 过点 B 作 $BH \perp AC$ 交 AC 于点 H ,

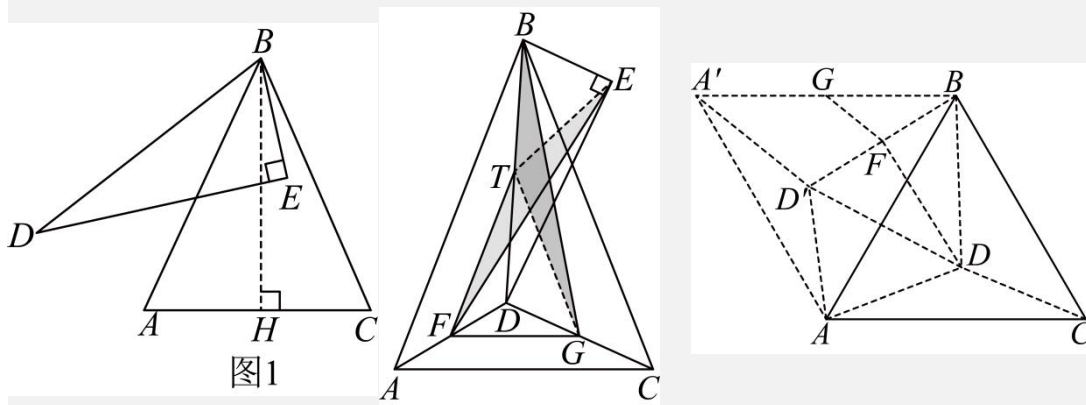


图1

$\because \triangle ABC$ 中 $AB=BC$, $\therefore \angle AHB=90^\circ$, $\angle ABC=2\angle ABH$, $AC=2AH$

$\because \angle BED=90^\circ$, $\angle ABC=2\angle D$, $\therefore \angle AHB=\angle BED$, $\angle ABH=\angle D$.

又 $\because BD=BA$, $\therefore \triangle AHB \cong \triangle BED$ (AAS) $\therefore AH=BE=2 \therefore AC=2AH=4$;

(2) 解: 如图所示, 取 BD 的中点 T , 连接 TE, TF, TG ,

又 $\because F, G$ 是 AD, DC , $\therefore FT=\frac{1}{2}AB, TG=\frac{1}{2}BC$, $FG \parallel AC, FT \parallel AB$

$\because AB=BC \therefore FT=TG$, $\because \angle BED=90^\circ$, T 为 BD 的中点, $\therefore TE=BT$,

在 $\triangle TFE, \triangle TBG$ 中, $\begin{cases} TF=TG \\ TE=TB \\ EF=BG \end{cases} \therefore \triangle TFE \cong \triangle TBG$ (SSS) $\therefore \angle FTE = \angle GTB$

$\therefore \angle FTE - \angle GTE = \angle GTB - \angle GTE$ 即 $\angle FTG = \angle ETB$

又 $\because FT=TG, TE=EB$ 即 $\frac{TE}{TF} = \frac{TB}{TG}$, $\therefore \triangle TBE \sim \triangle TFG \therefore \angle EBT = \angle GFT$

$\because FG \parallel AC, FT \parallel AB \therefore \angle TFB = \angle BAC \therefore \angle BAC = \angle DBE$

(3) 解: $\because \triangle ABC$ 中 $AB=BC$, $\angle ABC=60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

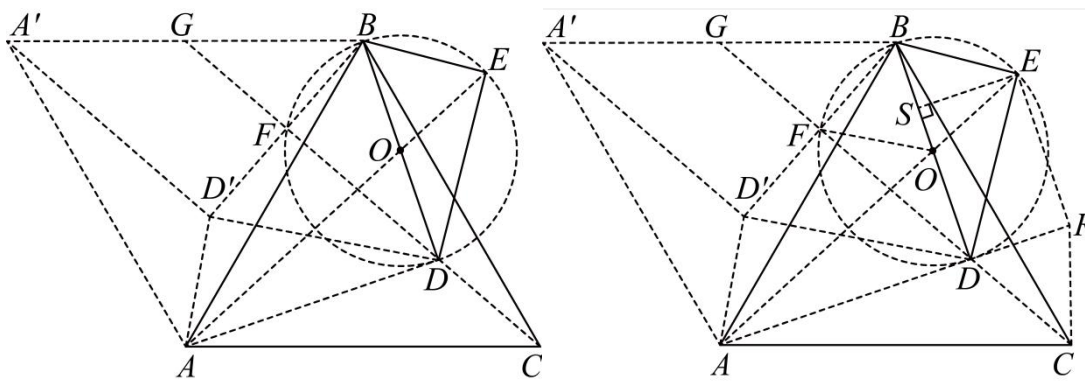
如图所示, 将 $\triangle BDC$ 绕点 B 顺时针转 60° 得到 $\triangle BD'A$, 将 $\triangle ABD$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle BA'D'$, 连接 AA' ,

$\therefore BD=BD'$, $\angle DBD'=60^\circ$, $AB=A'B$, $A'B \parallel AC$ 则 $\triangle DBD'$ 是等边三角形, $\triangle A'AB$ 是等边三角形,

$\because CD=AD', AA'=AC$ 取 BD', BA' 的中点 F, G , 则 $FG=\frac{1}{2}A'D'=\frac{1}{2}AD$,

$\because F$ 是 BD' 的中点, $DF \perp BD$, $DF=BD \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$, $\therefore \frac{1}{2}AD + \frac{\sqrt{3}}{2}BD + CD = GF + FD + CD \geq GC$

$\therefore$ 当 G, F, D, C 四点共线时, GC 最小 此时如图所示, $\therefore GC \perp BD'$



$\because A'D' \parallel GF, \therefore A'D' \perp BD', \therefore \triangle A'DB$ 是直角三角形, $\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形, $\therefore AD \perp BD$

$\because \angle BDD' = 60^\circ \therefore \angle D'DA = 30^\circ \therefore AD' = \frac{1}{2}AD = DC$ 设 $CD = a$, 则 $AD' = a, AD = 2a$,

在 $\text{Rt}\triangle ADD'$ 中, $DD' = \cos 30^\circ \times AD = \sqrt{3}a \because \triangle BDD'$ 是等边三角形, $\therefore BD = DD' = \sqrt{3}a$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = 2 \therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 \therefore 2^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2$ 解得: $a = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\therefore BD = \sqrt{3}a = \frac{2\sqrt{21}}{7}, AD = 2a = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ 取 BD 的中点 O , 连接 AO, OE ,

$\because \angle BED = 90^\circ \therefore$ 点 E 在以 O 为圆心, $\frac{1}{2}BD$ 为半径的圆上运动,

$\therefore OE = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{21}}{7}, \therefore$ 当 AE 取得最大值时, E 在 AO 的延长线上, 连接 OF , 过点 E 作 $ES \perp BD$ 于点 S ,

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OD = OE = \frac{\sqrt{21}}{7}, \therefore AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{133}}{7},$

$\therefore \cos \angle AOD = \frac{AD}{AO} = \frac{\frac{4\sqrt{7}}{7}}{\frac{\sqrt{133}}{7}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}, \therefore SE = \cos \angle SOE \times OE = \cos \angle AOD \times OE = \frac{4\sqrt{19}}{19} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4\sqrt{339}}{133},$

$\therefore \triangle BDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}BD \times SE = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{21}}{7} \times \frac{4\sqrt{339}}{133} = \frac{12\sqrt{9}}{133}.$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定, 等腰三角形的性质与判定, 等边三角形的性质与判定, 三角形中位线的性质, 旋转的性质, 直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半, 相似三角形的性质与判定, 加权费马点问题, 点与圆的位置关系, 直径所对的圆周角是直角; 熟练掌握以上知识是解题的关键.

例 3. (23-24 九年级上·重庆·阶段练习) 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 BC 上一点, 连接 AD , 将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 120° 得到线段 AE , 则 $\angle DAE = 120^\circ, AE = AD$, 连接 BE 交 AD 于点 F , 交 AC 于点 H .

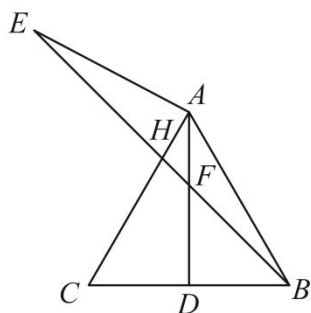


图1

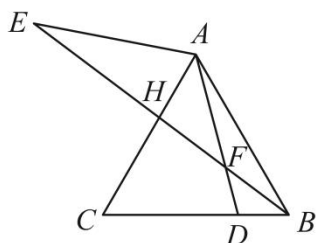


图2

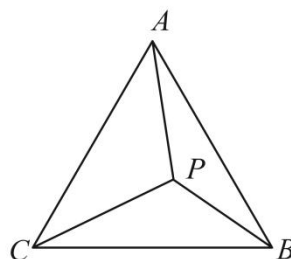


图3

(1)如图 1，当点 D 为 BC 中点时，且 $AD=3$ ，求 $\triangle ABE$ 的面积；(2)如图 2，猜想线段 AB 、 BD 、 AH 之间的数量关系，并证明你的猜想；(3)如图 3，若 $AB=8$ ，在 $\triangle ABC$ 内部有一个动点 P ，连接 PA 、 PB 、 PC ，直接写出 $3PA+4PB+5PC$ 的最小值。

【答案】(1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $AB-BD=2AH$ ，见解析 (3) $8\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

【分析】(1) 过点 E 作 $EM \perp AB$ ，交 BA 的延长线于点 M ，求得 $AB=2\sqrt{3}$ ， $\angle EAM=30^\circ$ ， $EM=\frac{1}{2}AE=\frac{3}{2}$ ，利用 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB \cdot EM=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 计算即可。(2) 在 AC 上取点 M 使 $CM=BD$ ，连接 BM 。则由 SAS 可证明 $\triangle ABD \cong \triangle BCM$ ，从而有 $AD=BM$ ， $\angle BAD=\angle CBM$ ；再由 AAS 证明 $\triangle AEH \cong \triangle MBH$ ，得 $AH=MH$ ，则由线段的和差关系可得结论；(3) 过点 C 作 $DC \perp BC$ 于点 C ，使得 $\frac{DC}{BC}=\frac{4}{3}$ ，过点 C 作 $EC \perp PC$ 于点 C ，使得 $\frac{EC}{PC}=\frac{4}{3}$ ，证明 $\triangle DCE \sim \triangle BCP$ ，得到 $4PB=3DE$ ，根据勾股定理，得 $5PC=3PE$ ，从而得到

$3PA+4PB+5PC=3PA+3DE+3PE=3(PA+PE+ED)$ ，根据两点之间线段最短，得到 $PA+PE+ED \geq AD$ ，得到当 PA, PE, ED 共线时， $3PA+4PB+5PC$ 取得最小值，过点 A 作 $AQ \perp DC$ ，交 DC 的延长线于点 Q ，过点 A 作 $AR \perp BC$ 于点 R ，则四边形 $AQCR$ 是矩形，利用等边三角形的性质，勾股定理解答即可。

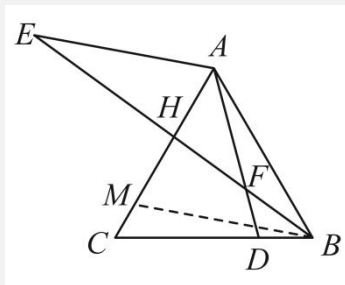
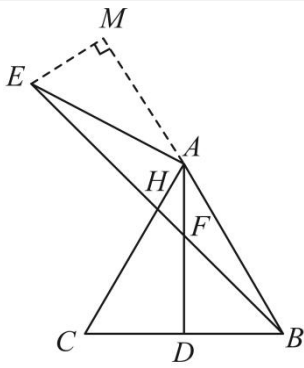
【详解】(1) 解：过点 E 作 $EM \perp AB$ ，交 BA 的延长线于点 M ，

$\because$ 等边 $\triangle ABC$ ， $\therefore AB=BC=CA$ ， $\angle ABC=\angle BCA=\angle CAB=60^\circ$ ，

$\because$ 点 D 为 BC 中点， $\therefore CD=BD=\frac{1}{2}BC$ ， $\angle CAD=\angle BAD=\frac{1}{2}\angle CAB=30^\circ$ ，

$\because AD=3$ ， $\angle DAE=120^\circ$ ， $AE=AD$ ， $\therefore BD=\frac{1}{2}AB$ ，由勾股定理得 $AB^2-BD^2=AD^2$ ，解得 $AB=2\sqrt{3}$ ；

$\because \angle EAM=180^\circ-150^\circ=30^\circ$ ， $AE=AD=3$ ， $\therefore EM=\frac{1}{2}AE=\frac{3}{2}$ ， $\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB \cdot EM=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。



(2) 解： $AB - BD = 2AH$. 理由如下：在 AC 上取点 M 使 $CM = BD$ ，连接 BM .

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore AB = BC = AC$ ， $\angle CAB = \angle ABD = \angle C = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCM$ 中，
$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABD = \angle C \\ BD = CM \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle BCM (\text{SAS})$$
,

$\therefore AD = BM$ ， $\angle BAD = \angle CBM$ ， $\therefore EA = BM$ ，

$\therefore \angle EAH = \angle EAD - \angle CAD = \angle EAD - (\angle CAB - \angle BAD) = 60^\circ + \angle BAD$ ， $\angle BMH = \angle C + \angle CBM = 60^\circ + \angle CBM$ ，

$\therefore \angle EAH = \angle BMH$ ， 在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle MBH$ 中，
$$\begin{cases} \angle AHE = \angle MHB \\ \angle EAH = \angle BMH \\ EA = BM \end{cases} \therefore \triangle AEH \cong \triangle MBH (\text{AAS})$$
,

$\therefore AH = MH$ ， 即 $AM = AH + MH = 2AH$ ， $\therefore AM = AC - CM = AB - BD$ ， $\therefore AB - BD = 2AH$.

(3) 解：过点 C 作 $DC \perp BC$ 于点 C ，使得 $\frac{DC}{BC} = \frac{4}{3}$ ，过点 C 作 $EC \perp PC$ 于点 C ，使得 $\frac{EC}{PC} = \frac{4}{3}$ ，根据题意，

得 $\angle DCE = 90^\circ - \angle ECB = \angle BCP$ ， $\frac{DC}{BC} = \frac{EC}{PC}$ ， $\therefore \frac{DC}{EC} = \frac{BC}{PC}$ ， $\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCP$ ，

$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{PB} = \frac{4}{3}$ ， $\therefore 4PB = 3DE$ ，根据勾股定理，得 $PE = \sqrt{PC^2 + EC^2} = \frac{5}{3}PC$ ，

$\therefore 5PC = 3PE$ ， $\therefore 3PA + 4PB + 5PC = 3PA + 3DE + 3PE = 3(PA + PE + ED)$ ，

$\therefore PA + PE + ED \geq AD$ ， $\therefore$ 当 PA, PE, ED 共线时， $3PA + 4PB + 5PC$ 取得最小值，

$\therefore AB = 8$ ， $\therefore AB = BC = CA = 8$ ， $\therefore DC = \frac{32}{3}$ ，

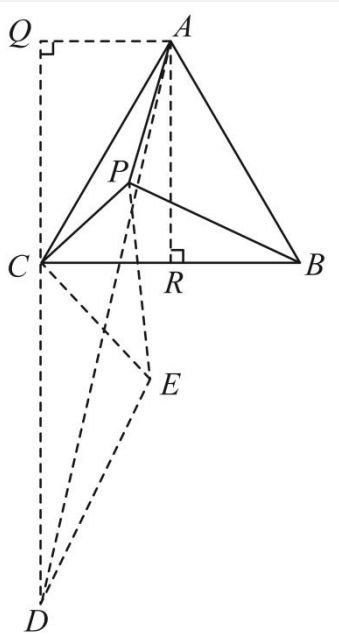
过点 A 作 $AQ \perp DC$ ，交 DC 的延长线于点 Q ，过点 A 作 $AR \perp BC$ 于点 R ，则四边形 $AQCR$ 是矩形，

$\therefore AQ = CR, CQ = AR$ ， $\therefore$ 等边 $\triangle ABC$ ， $\therefore AQ = CR = \frac{1}{2}BC = 4$ ， $CQ = AR = \sqrt{AC^2 - CR^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore AD = \sqrt{DQ^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{32}{3} + 4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times \left[\left(\frac{8}{3} + \sqrt{3}\right)^2 + 1\right]} = \sqrt{4^2 \times \frac{100 + 48\sqrt{3}}{9}}$

$$= \sqrt{\frac{4^2 \times 4}{9} \times (25 + 12\sqrt{3})} = \frac{8}{3} \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}, \therefore 3PA + 4PB + 5PC = 8\sqrt{25 + 12\sqrt{3}},$$

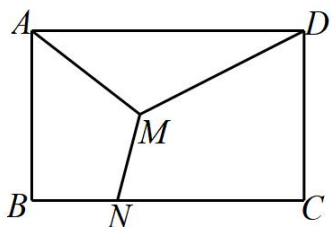
故 $3PA + 4PB + 5PC$ 的最小值为 $8\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.



【点睛】本题考查了等边三角形的判定和性质，勾股定理，矩形的判定和性质，三角形相似的判定和性质，含 30° 直角三角形的性质，三角形全等的判定和性质，熟练掌握相应的知识是解题的关键，本题有一定的难度，添加适当的辅助线是解题的关键。

习题练模型

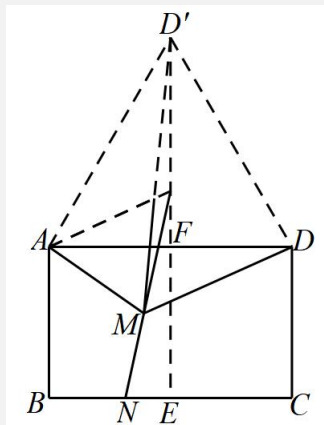
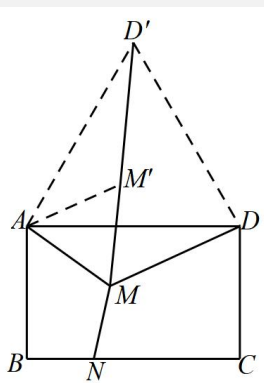
1. (2023 春·湖北武汉·九年级校考阶段练习) 如图, 点 M 是矩形 $ABCD$ 内一点, 且 $AB=5$, $AD=8$, N 为边 BC 上一点, 连接 MA 、 MD 、 MN , 则 $MA+MD+MN$ 的最小值为_____.



【答案】 $5+4\sqrt{3}$

【分析】 将 $\triangle ADM$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AD'M'$, 连接 DD' 、 MM' , 然后即可得 $\triangle ADD'$ 为等边三角形, 同理 $\triangle AMM'$ 为等边三角形, 接着证明当 $M'D'$ 、 MM' 、 MN 三条线段在同一直线上, $MM'+M'D'+MN$ 的值最小, 即 $MA+MD+MN$ 的值最小, 过点 D' 作 $D'E \perp BC$ 于点 E , 即 $MA+MD+MN$ 最小值为: $D'E$, 问题随之得解.

【详解】 如图所示, 将 $\triangle ADM$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AD'M'$, 连接 DD' 、 MM' ,



根据旋转的性质有: $\angle DAD'=60^\circ$, $AD=AD'$, $MD=M'D'$,

$\therefore \triangle ADD'$ 为等边三角形, 同理 $\triangle AMM'$ 为等边三角形,

$\therefore AM=AM'=MM'$, $AD=AD'=DD'=8$, $\therefore MA+MD+MN=MM'+M'D'+MN$,

$\therefore$ 当线段 $M'D'$ 、 MM' 、 MN 三条线段在同一直线上, 且该直线与 BC 垂直时, $MM'+M'D'+MN$ 的值最小, 即 $MA+MD+MN$ 的值最小, 如下图, 过点 D' 作 $D'E \perp BC$ 于点 E , 交 AD 于点 F ,

$\therefore MA+MD+MN$ 最小值为: $D'E$, 在矩形 $ABCD$ 中, $D'E \perp BC$ 于点 E ,

即可知四边形 $ABEF$ 是矩形, $D'E \perp AD$, 即 $AB=EF=5$,

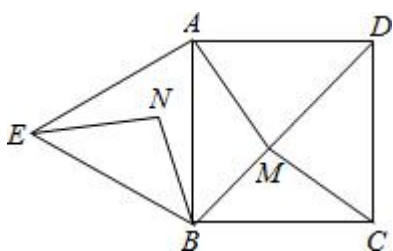
$\because \triangle ADD'$ 为等边三角形, $D'F \perp AD$, $\therefore AF=FD=\frac{1}{2}AD=4$,

$\therefore D'F=\sqrt{D'A^2-AF^2}=4\sqrt{3}$, $\therefore D'E=EF+D'F=5+4\sqrt{3}$,

$\therefore MA+MD+MN$ 的最小值为 $5+4\sqrt{3}$, 故答案为: $5+4\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了旋转的性质, 矩形的性质, 等边三角形的判定定理与性质, 勾股定理, 垂线段最短等知识, 作出合理的辅助线是解答本题的关键.

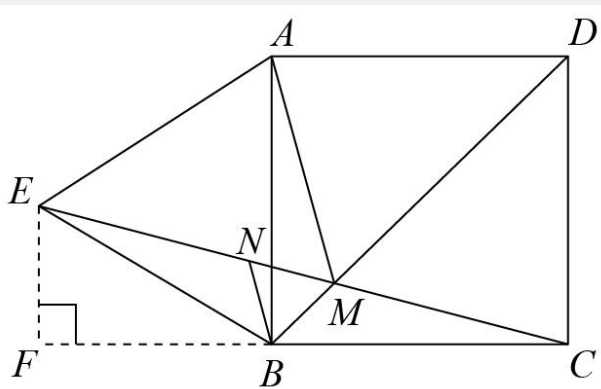
2. (2023·广东深圳·二模) 如图, $\triangle ABE$ 是等边三角形, M 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD (不含 B 点) 上任意一点, $BM=BN$, $\angle ABN=15^\circ$ (点 N 在 AB 的左侧), 当 $AM+BM+CM$ 的最小值为 $\sqrt{3}+1$ 时, 正方形的边长为_____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】首先通过 SAS 判定 $\triangle AMB \cong \triangle ENB$, 得出 $AM=EN$, 因为 $\angle ABD + \angle ABN = 60^\circ$, $BM=BN$, 得出 $\triangle MNB$ 是等边三角形, $AM+BM+CM=EN+MN+CM$, 而且为最小值, 我们可以得出 $EC=\sqrt{3}+1$, 作辅助线, 过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 CB 的延长线于 F , 由题意求出 $\angle EBF=30^\circ$, 设正方形的边长为 x , 在 $Rt\triangle EFC$ 中, 根据勾股定理求得正方形的边长为 $\sqrt{2}$.

【详解】 $\because \triangle ABE$ 为正三角形, $\therefore \angle ABE=60^\circ$, $AB=BE$ $\therefore \angle NBE=\angle ABE-\angle ABN=45^\circ$



$\because BD$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线, $\therefore \angle ABD=45^\circ$ $\therefore \angle ABD=\angle NBE$.

在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle ENB$ 中 $\begin{cases} BM=BN \\ \angle MBA=\angle NBE \\ AB=EB \end{cases}$, $\therefore \triangle AMB \cong \triangle ENB$ (SAS) $\therefore AM=EN$

在 $\triangle MBN$ 中, $\angle ABD + \angle ABN = 60^\circ$ 又 $\because BM = BN$, $\therefore \triangle MBN$ 为等边三角形, $\therefore MN = BM$.

$\because AM + BM + CM$ 最小值为 $\sqrt{3} + 1$. $\therefore EN + MN + CM$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 1$ 即 $CE = \sqrt{3} + 1$.

过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 CB 的延长线于 F , 可得 $\angle EBF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

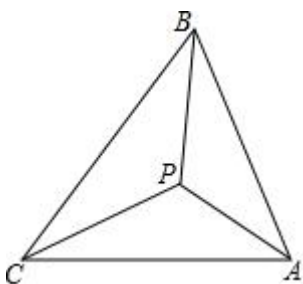
设正方形的边长为 x , 则 $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $EF = \frac{x}{2}$.

在 $Rt\triangle EFC$, $\because EF^2 + FC^2 = EC^2$, $\therefore (\frac{x}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + x)^2 = (\sqrt{3} + 1)^2$

解得 $x = \sqrt{2}$ (负值舍去). $\therefore$ 正方形的边长为 $\sqrt{2}$. 故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了等边三角形和正方形边相等的性质, 全等三角形的判定, 灵活使用辅助线, 掌握直角三角形的性质, 熟练运用勾股定理是解题的关键.

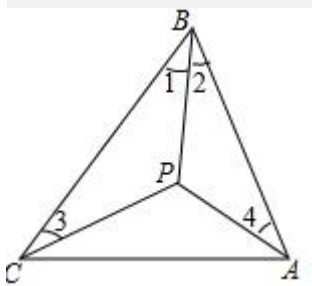
3. (24-25 九年级上·湖南长沙·阶段练习) 法国数学家费马提出: 在 $\triangle ABC$ 内存在一点 P , 使它到三角形顶点的距离之和最小. 人们称这个点为费马点, 此时 $PA + PB + PC$ 的值为费马距离. 经研究发现: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 费马点 P 满足 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$, 如图, 点 P 为锐角 $\triangle ABC$ 的费马点, 且 $PA = 3$, $PC = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$, 则费马距离为_____.



【答案】 $7 + 2\sqrt{3}$

【分析】 根据相似三角形的判定和性质, 即可求解.

【详解】 解: 如图: $\because \angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$,



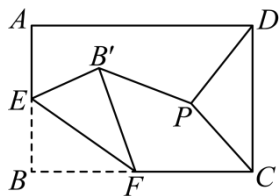
$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 60^\circ$, $\angle 1 + \angle 2 = 60^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 60^\circ$, $\therefore \angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, $\therefore \triangle BPC \sim \triangle APB$

$\therefore \frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA}$ 即 $PB^2 = 12$ $\therefore PB = 2\sqrt{3}$ $\therefore PA + PB + PC = 7 + 2\sqrt{3}$ 故答案为: $7 + 2\sqrt{3}$

【点睛】 本题考查了轴对称-最短路线问题, 解决本题的关键是利用相似三角形的判定和性质.

4. (2023·四川成都·二模) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 BC 边上一

动点. 将 $\triangle BEF$ 沿着 EF 翻折, 使得点 B 落在点 B' 处, 若点 P 是矩形内一动点, 连接 PB 、 PC 、 PD , 则 $PB' + \sqrt{2}PC + PD$ 的最小值为_____.



【答案】 $\sqrt{26} - 1$

【分析】 本题考查了图形的折叠与旋转, 两点之间线段最短的应用, 勾股定理等知识点, 将 $\triangle CDP$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CDP'$, 连接 PP' , 连接 ED' , 由等腰三角形 CPP' 得出 $PP' = \sqrt{2}PC$, 再由折叠得出点 B' 的轨迹在以点 E 为圆心, EB 为半径的圆周上, 所以 $EB' + PB' + PP' + P'D'$ 的最小值为 ED' , 即 $PB' + \sqrt{2}PC + PD$ 的最小值为 $ED' - EB'$, 经计算得出答案即可, 熟练掌握图形的旋转及图形的折叠对称的性质是解决此题的关键.

【详解】 将 $\triangle CDP$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CDP'$, 连接 PP' , 连接 ED' ,

则 B, C, D' 三点共线, $PD = P'D'$, $\therefore CD' = CD = AB = 2$, $\therefore PP' = \sqrt{2}PC$,

$\because$ 点 E 是 AB 的中点, $\therefore EB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1$, $\therefore BD' = BC + CD' = 3 + 2 = 5$,

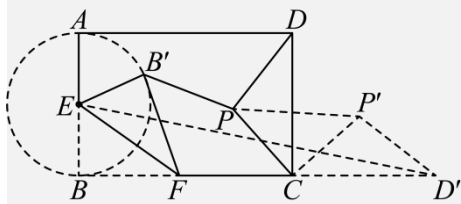
$\therefore ED' = \sqrt{BE^2 + D'B^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, 由 $\triangle BEF$ 折叠成 $\triangle B'EF$, $\therefore EB = EB' = EA$,

$\therefore$ 点 B' 在以点 E 为圆心, EB 为半径的圆上, $\therefore EB' = 1$,

$\therefore$ 两点间线段最短, $\therefore ED' \leq EB' + PB' + PP' + P'D'$, 即 $ED' \leq EB' + PB' + \sqrt{2}PC + PD$,

$\therefore \sqrt{26} \leq 1 + PB' + \sqrt{2}PC + PD$, $\therefore PB' + \sqrt{2}PC + PD \geq \sqrt{26} - 1$,

则 $PB' + \sqrt{2}PC + PD$ 的最小值为 $\sqrt{26} - 1$, 故答案为: $\sqrt{26} - 1$.



5. (2023·四川·校联考模拟预测) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, P 为平面内的一点, 连接 AP 、 PB 、 PC , 若 $\angle ACB = 30^\circ$, $AC = 8$, $BC = 10$, 则 $4PA + 2PB + 2\sqrt{3}PC$ 的最小值是 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/045222344003012033>