专题18 三角恒等变换

【考点预测】

知识点一．两角和与差的正余弦与正切

① $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；

② $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$；

③ $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$；

知识点二．二倍角公式

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$；

② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$；

③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；

知识点三：降次（幂）公式

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha; \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

知识点四：半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin a}.$$

知识点五．辅助角公式

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$（其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$）.

【方法技巧与总结】

1．两角和与差正切公式变形

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan\alpha\tan\beta)$；

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1 - \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)} - 1$.

2．降幂公式与升幂公式

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$；$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$；$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$；

$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$；$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$；$1+\sin 2\alpha = (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；$1-\sin 2\alpha = (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

3．其他常用变式

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；$\cos 2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3. 拆分角问题：①$\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$； $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$；②$\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$；③$\alpha=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$；

④$\beta=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$；⑤$\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

注意 特殊的角也看成已知角，如$\alpha=\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

【题型归纳目录】

【典例例题】

题型一：两角和与差公式的证明

例1.（2023·山西省长治市第二中学校高一期末）(1)试证明差角的余弦公式$C_{(\alpha-\beta)}$：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(2)利用公式$C_{(\alpha-\beta)}$推导：

①和角的余弦公式$C_{(\alpha+\beta)}$，正弦公式$S_{(\alpha+\beta)}$，正切公式$T_{(\alpha+\beta)}$；

②倍角公式$S_{(2\alpha)}$，$C_{(2\alpha)}$，$T_{(2\alpha)}$.

例2.（2023·云南·昭通市第一中学高三开学考试（文））已知以下四个式子的值都等于同一个常数

$\sin^2 26^\circ+\cos^2 34^\circ-\sqrt{3}\sin 26^\circ\cos 34^\circ$；

$\sin^2 39^\circ+\cos^2 21^\circ-\sqrt{3}\sin 39^\circ\cos 21^\circ$；

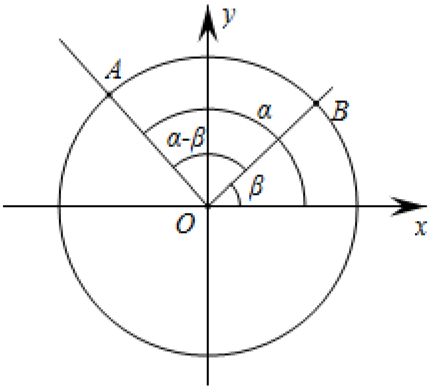
$\sin^2\left(-52^\circ\right)+\cos^2 112^\circ-\sqrt{3}\sin\left(-52^\circ\right)\cos 112^\circ$；

$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ-\sqrt{3}\sin 30^\circ\cos 30^\circ$.

（1）试从上述四个式子中选择一个，求出这个常数.

（2）根据（1）的计算结果，推广为三角恒等式，并证明你的结论.

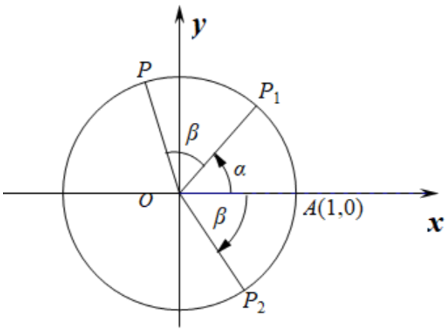
例3.（2023·陕西省商丹高新学校模拟预测（理））如图带有坐标系的单位圆O中，设$\angle AOx=\alpha$，$\angle BOx=\beta$，$\angle AOB=\alpha-\beta$，



（1）利用单位圆、向量知识证明：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（2）若$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$，求$\cos\beta$的值

例 4.（2023·全国·高三专题练习）如图，考虑点$A(1,0)$，$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，从这个图出发.



（1）推导公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

（2）利用（1）的结果证明：$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，并计算$\sin 37.5^{\circ}\cdot\cos 37.5^{\circ}$的值.

【方法技巧与总结】

推证两角和与差公式就是要用这两个单角的三角函数表示和差角的三角公式，通过余弦定理或向量数量积建立它们之间的关系，这就是证明的思路.

题型二：给式求值

例 5．（2023·全国·高三专题练习）已知$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{5}$，且$0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$0<\beta<\frac{3\pi}{4}$，则$\sin\beta=$（　　）

A．$\frac{9\sqrt{15}}{35}$　　B．$\frac{11\sqrt{10}}{35}$　　C．$\frac{\sqrt{15}}{35}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{35}$

例 6．（2023·四川·乐山外国语学校高三期中（文））已知$\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\tan 210^\circ$，则$\sin(60^\circ+\alpha)$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

例 7．（2023·全国·高三专题练习）若$\cos(\frac{\pi}{3}-2x)=-\frac{7}{8}$，则$\sin(x+\frac{\pi}{3})$的值为（　　）．

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．$\pm\frac{1}{4}$　　D．$\pm\frac{7}{8}$

（多选题）例 8．（2023·全国·高三专题练习）设$\sin(\beta+\frac{\pi}{6})+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，则$\sin(\beta-\frac{\pi}{3})=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 9．（2023·全国·模拟预测（文））已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos 2\beta=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，则$\cos\alpha=$____________.

例 10．（2023·上海静安·模拟预测）已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\sin 2\alpha$的值为____________.

例 11．（2023·江苏泰州·模拟预测）若$\theta=\theta_0$时，$f(\theta)=\sin 2\theta-\cos^2\theta$取得最大值，则$\sin\left(2\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)=$______.

【方法技巧与总结】

给式求值：给出某些式子的值，求其他式子的值.解此类问题，一般应先将所给式子变形，将其转化成所求函数式能使用的条件，或将所求函数式变形为可使用条件的形式.

题型三：给值求值

例 12．（2023·福建省福州第一中学三模）若$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则$\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．2　　D．-2

例 13．（2023·湖北武汉·模拟预测）已知$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{4}$，则$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$-\frac{7}{8}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．$-\frac{\sqrt{15}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{4}$

例 14．（2023·湖北·模拟预测）已知$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，则$\cos2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 15．（2023·全国·模拟预测）已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{5}$，则$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$\frac{23}{25}$　　B．$-\frac{23}{25}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

例 16．（2023·黑龙江·哈师大附中三模（文））已知$\sin\left(45°+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$45°<\alpha<135°$，则$\cos2\alpha=$（　　）

A．$\frac{24}{25}$　　B．$-\frac{24}{25}$　　C．$\frac{7}{25}$　　D．$-\frac{7}{25}$

例 17．（2023·广东茂名·模拟预测）已知$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，则$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（多选题）例 18．（2023·江苏·高三专题练习）已知$\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\pi$，$\pi\le\beta\le\frac{3\pi}{2}$，$\sin2\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，则（　　）

A．$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\beta-\alpha=\frac{3\pi}{4}$　　D．$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{5}$

【方法技巧与总结】

给值求值：给出某些角的三角函数式的值，求另外一些角的三角函数值，解题关键在于“变角”，使其角相同或具有某种关系，解题的基本方法是：①将待求式用已知三角函数表示；②将已知条件转化而推出结论，其中“凑角法”是解此类问题的常用技巧，解题时首先要分析已知条件和结论中各种角之间的相互关系，并根据这些关系来选择公式.

题型四：给值求角

例 19．（2023·全国·模拟预测）已知$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$，$4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{15}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\frac{\pi}{15}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\tan\frac{\pi}{15}=\sqrt{3}$

，则 $\alpha=$______.

例 20．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（文））已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5},\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right),\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，求 $\alpha-\beta$ 的值为_____.

例 21．（2023·河北石家庄·一模）已知角 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\alpha-\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{12}}$，则 $\alpha=$______.

例 22．（2023·上海市大同中学高三开学考试）若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，则 α 的值为

___________.

例 23．（2023·全国·高三专题练习）若 $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\beta\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$，则 $\alpha+\beta$ 的值是______.

例 24．（2023·吉林·延边州教育学院一模（理））若 $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$，$\beta\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$，则 $\alpha+\beta=$（　　）

A．$\frac{7\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{4\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{3}$

例 25．（2023·上海交大附中高三开学考试）已知 α、β 都是锐角，且 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$，那么 α、β 之间的关系是（　　）

A．$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$　　B．$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

C．$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$　　D．$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$

例 26．（2023·江苏省江阴高级中学高三开学考试）已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3},\tan\beta=-\frac{1}{7}$，且 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，则 $2\alpha-\beta=$（　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$-\frac{\pi}{4}$

C．$-\frac{3\pi}{4}$　　D．$-\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$

【方法技巧与总结】

给值求角：解此类问题的基本方法是：先求出“所求角”的某一三角函数值，再确定“所求角”的范围，最后借助三角函数图像、诱导公式求角.

题型五：正切恒等式及求非特殊角

例 27．（2023·湖北·襄阳四中模拟预测）若角α的终边经过点$P\left(\sin 70°,\cos 70°\right)$，且$\tan\alpha+\tan 2\alpha+m\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha=\sqrt{3}$，则实数$m$的值为（　　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

例 28．（2023·重庆八中高三阶段练习）$\sin 10°+\frac{\sqrt{3}}{4}\tan 10°=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 29．（2023·重庆一中高三阶段练习）求值：$\frac{1-\sqrt{3}\tan 10^{\circ}}{\sqrt{1-\cos 20^{\circ}}}=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{2}$

例 30．（2023·全国·高三专题练习）$\left(\tan 30°+\tan 70°\right)\sin 10°=$____________.

例 31．（2023·江苏南通·高三期末）若$1+\frac{\sqrt{3}}{\tan 80°}=\frac{1}{\sin\alpha}$，则$\alpha$的一个可能角度值为__________.

例 32．（2023·江苏扬州·模拟预测）$\frac{1-\tan 75°}{1+\tan 75°}=$____________.

例 33．（2023·贵州黔东南·一模（文））若$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{1}{3}$，$\tan\left(\alpha-\beta\right)=\frac{1}{6}$，则$\tan 2\alpha=$____________.

例 34．（2023·山东·青岛二中高三开学考试）$\tan 10°+\tan 35°+\tan 10°\tan 35°=$______.

【方法技巧与总结】

正切恒等式：当$A+B+C=k\pi$时，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$．

证明：因为$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，$\tan C=-\tan(A+B)$，所以$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$

故$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$．

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））已知角α与角β的顶点均与原点O重合，始边均与x轴的非负半轴重合，它们的终边关于x轴对称．若$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，则$\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)=$（　　）

A．$-\frac{7}{25}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$\frac{7}{25}$

2．（2023·全国·模拟预测（理））已知$\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=\sqrt{3}$，则$\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1

3．（2023·青海·大通回族土族自治县教学研究室三模（文））已知$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$，$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{1}{3}$，则$\tan\beta=$（　　）

A．$-\frac{1}{7}$　　B．$\frac{1}{7}$　　C．1　　D．2或6

4．（2023·湖北·黄冈中学模拟预测）公元前6世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派研究过正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割约为0.618，这一数值也可以表示为$m=2\sin18°$，若$m^2+n=4$，则$\frac{m\sqrt{n}}{2\sin^2 27°-1}=$（　　）

A．－4　　B．－2　　C．2　　D．4

5．（2023·山东烟台·三模）若$2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos2\alpha$，则$\tan2\alpha$的值为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

6．（2023·全国·模拟预测（文））设角α，β的终边均不在坐标轴上，且$\tan\left(\alpha-\beta\right)+\tan\beta=\tan\alpha$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\sin\left(\alpha+\beta\right)=0$　　B．$\cos\left(\alpha-\beta\right)=1$

C．$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$　　D．$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$

7．（2023·河南·通许县第一高级中学模拟预测（文））已知$\alpha+\beta=15°$，则$\frac{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

8．（2023·全国·高三专题练习）若$0<\alpha<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<\beta<0,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3},\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．$\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D．$-\frac{\sqrt{6}}{9}$

二、多选题

9．（2023·海南海口·二模）已知$\alpha\in\left(\pi,2\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{2}=\tan\frac{\beta}{2}$，则（　　）

A． $\tan\alpha=\sqrt{3}$　　B． $\cos\alpha=\frac{1}{2}$　　C． $\tan\beta=4\sqrt{3}$　　D． $\cos\beta=\frac{1}{7}$

10．（2023·河北邯郸·二模）下列各式的值为$\frac{1}{2}$的是（　　）．

A．$\sin\frac{17\pi}{6}$　　B．$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

C．$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$　　D．$\dfrac{\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

11．（2023·重庆·西南大学附中模拟预测）已知α，β，$\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，则（　　）

A．若$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，则$\tan\alpha=1$

B．若$\tan\alpha=2$，则$\sin(\beta+\gamma)=\frac{\sqrt{5}}{5}$

C． $\tan\alpha$， $\tan\beta$可能是方程$x^2-6x+7=0$的两根

D． $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\beta\tan\alpha=1$

12．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）已知$\cos\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5},\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$，其中$\alpha,\beta$为锐角，则以下命题正确的是（　　）

A． $\sin2\alpha=\frac{3}{5}$　　B． $\cos\left(\alpha-\beta\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C． $\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{10}$　　D． $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3}$

三、填空题

13．（2023·浙江·高考真题）若$3\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{10},\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则$\sin\alpha=$__________， $\cos2\beta=$__________．

14．（2023·山东师范大学附中模拟预测）已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$，则$\frac{\sin\alpha}{1+\tan\alpha}=$________．

15．（2023·湖北省仙桃中学模拟预测）已知$\sqrt{3}\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)=-1$ ，则$\cos(2\alpha-\frac{2\pi}{3})=$______________．

16．（2023·陕西·宝鸡中学模拟预测） $\sin\left(\theta+75^\circ\right)+\cos\left(\theta+45^\circ\right)-\sqrt{3}\cos\left(\theta+15^\circ\right)=$__________．

四、解答题

17．（2023·江苏南京·模拟预测）已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$．

(1)求$\sin\alpha$的值；

(2)若$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求$\alpha-\beta$的值．

18．（2023·江西·高一期中）已知角α为锐角，$\dfrac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\pi$，且满足$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$，$\sin\left(\beta-\alpha\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

(1)证明：$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$；

(2)求β.

19．（2023·河南·唐河县第一高级中学高一阶段练习）（1）已知$\tan\theta=-2$，求$\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$的值；

（2）已知$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=-\dfrac{1}{7}$，且$\alpha$，$\beta\in(0,\pi)$，求$2\alpha-\beta$.

20．（2023·江西·高一阶段练习）在①$\tan 2\alpha=\dfrac{4}{3}$，②$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$这两个条件中任选一个，补充到下面的问题中，并解答．已知角α是第一象限角，且__________．

(1)求$\tan\alpha$的值；

(2)求$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha+\pi\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)$的值．

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分．

21．（2023·北京市第九中学高一期中）已知$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求

(1)求$\sin\alpha$的值；

(2)求$\dfrac{1+2\sin\left(\pi-\alpha\right)\cos\left(-2\pi-\alpha\right)}{\sin^2\left(-\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)}$的值；

(3)若$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求$\cos\beta$的值.

22．（2023·黑龙江·哈尔滨三中高三阶段练习（文））(1)求$\dfrac{\sqrt{3}tan12^\circ-3}{sin12^\circ\left(1-2sin^2 12^\circ\right)}$的值；

(2)已知$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right),\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，$\tan\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{1}{2}$，$tan\beta=-\dfrac{1}{7}$，求$2\alpha-\beta$的值.

23．（2023·全国·高三专题练习）在ΔABC中，满足 $\sin^2 A-\cos^2 B+\sqrt{2}\sin A\sin B=-\cos^2 C$.

（1）求C；

（2）设$\cos A\cos B=\dfrac{3\sqrt{2}}{5},\dfrac{\cos\left(\alpha+A\right)\cos\left(\alpha+B\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$，求$\tan\alpha$的值.

专题18 三角恒等变换

【考点预测】

知识点一．两角和与差的正余弦与正切

① $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；

② $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$；

③ $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$；

知识点二．二倍角公式

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$；

② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$；

③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$；

知识点三：降次（幂）公式

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha; \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

知识点四：半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin a}.$$

知识点五．辅助角公式

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$（其中

$\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$）．

【方法技巧与总结】

1．两角和与差正切公式变形

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan\alpha\tan\beta)$；

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1 - \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)} - 1$．

2．降幂公式与升幂公式

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$；$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$；$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$；

$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$；$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$；$1+\sin 2\alpha = (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；$1-\sin 2\alpha = (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

．

3．其他常用变式

$\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；$\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

.

3. 拆 分 角 问 题 ： ① $\alpha=2\cdot\dfrac{\alpha}{2}$； $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$； ② $\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$； ③ $\alpha=\dfrac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$；

④ $\beta=\dfrac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$； ⑤ $\dfrac{\pi}{4}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$.

注意 特殊的角也看成已知角，如 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}-(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$.

【题型归纳目录】

【典例例题】

题型一：两角和与差公式的证明

例 1．（2023·山西省长治市第二中学校高一期末）(1)试证明差角的余弦公式 $C_{(\alpha-\beta)}$：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

(2)利用公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 推导：

①和角的余弦公式 $C_{(\alpha+\beta)}$， 正弦公式 $S_{(\alpha+\beta)}$， 正切公式 $T_{(\alpha+\beta)}$；

②倍角公式 $S_{(2\alpha)}$， $C_{(2\alpha)}$， $T_{(2\alpha)}$.

答案：（1）证明见解析；（2）①答案见解析；②答案见解析

【解析】

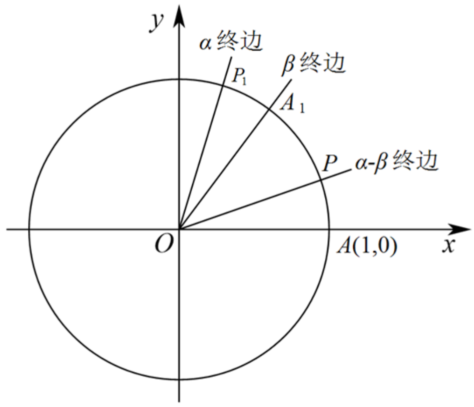
分析：

在单位圆里面证明 $C_{(\alpha-\beta)}$，然后根据诱导公式即可证明 $C_{(\alpha+\beta)}$ 和 $S_{(\alpha+\beta)}$，利用正弦余弦和正切的关系即可证明 $T_{(\alpha+\beta)}$；用正弦余弦正切的和角公式即可证明对应的二倍角公式.

【详解】

(1)不妨令 $\alpha\neq 2k\pi+\beta,k\in\mathbf{Z}$.

如图，



设单位圆与 x 轴的正半轴相交于点 $A(1,0)$，以 x 轴非负半轴为始边作角 $\alpha,\beta,\alpha-\beta$，它们的终边分别与单位圆相交于点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$A_1(\cos\beta,\sin\beta)$，$P(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$.

连接 A_1P_1, AP.若把扇形 OAP 绕着点 O 旋转 β 角，则点 A,P 分别与点 A_1,P_1 重合.根据圆的旋转对称性可知，$\overset{\frown}{AP}$ 与 $\overset{\frown}{A_1P_1}$ 重合，从而，$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{A_1P_1}$，$\therefore AP=A_1P_1$.

根据两点间的距离公式，得：

$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，

化简得：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

当 $\alpha=2k\pi+\beta(k\in\mathbf{Z})$ 时，上式仍然成立.

$\therefore$，对于任意角 α,β 有：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

(2)①公式 $C_{(\alpha+\beta)}$ 的推导：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

公式 $S_{(\alpha+\beta)}$ 的推导：

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\alpha+\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left[\alpha-\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\right]$

$=\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$

$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$

正切公式 $T_{(\alpha+\beta)}$ 的推导：

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

②公式$S_{(2\alpha)}$的推导：

由①知，$\sin2\alpha=\sin\left(\alpha+\alpha\right)=\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

公式$C_{(2\alpha)}$的推导：

由①知，$\cos2\alpha=\cos\left(\alpha+\alpha\right)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

公式$T_{(2\alpha)}$的推导：

由①知，$\tan2\alpha=\tan\left(\alpha+\alpha\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

例 2．（2023·云南·昭通市第一中学高三开学考试（文））已知以下四个式子的值都等于同一个常数

$\sin^2 26^\circ+\cos^2 34^\circ-\sqrt{3}\sin26^\circ\cos34^\circ$；

$\sin^2 39^\circ+\cos^2 21^\circ-\sqrt{3}\sin39^\circ\cos21^\circ$；

$\sin^2\left(-52^\circ\right)+\cos^2 112^\circ-\sqrt{3}\sin\left(-52^\circ\right)\cos112^\circ$；

$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ-\sqrt{3}\sin30^\circ\cos30^\circ$.

（1）试从上述四个式子中选择一个，求出这个常数.

（2）根据（1）的计算结果，推广为三角恒等式，并证明你的结论.

答案：（1）选第四个式子，$\dfrac{1}{4}$；（2）证明见解析.

【解析】

分析：

(1)选第四个式子，由$\sin30^\circ=\dfrac{1}{2},\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$即可求三角函数式的值；

(2)由题意，设一个角为α，另一个角为$60^\circ-\alpha$，应用两角差的余弦公式展开三角函数，由同角正余弦的平方和关系化简求值

【详解】

（1）由第四个式子：$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ-\sqrt{3}\sin30^\circ\cos30^\circ=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

（2）证明：$\sin^2\alpha+\cos^2\left(60^\circ-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha\cos\left(60^\circ-\alpha\right)$

$=\sin^2\alpha+\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2-\sqrt{3}\sin\alpha\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

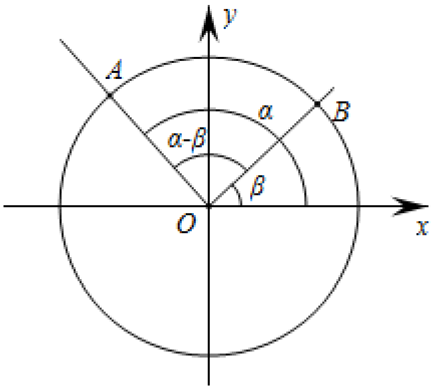
$=\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{4}$

【点睛】

本题考查了三角函数，利用特殊角的函数值求三角函数式的值，应用两角差余弦公式展开三角函数式及同角的正余弦平方和关系化简求值，属于简单题

例 3．（2023·陕西省商丹高新学校模拟预测（理））如图带有坐标系的单位圆 O 中，设 $\angle AOx=\alpha$，$\angle BOx=\beta$，$\angle AOB=\alpha-\beta$，



（1）利用单位圆、向量知识证明：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（2）若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$，求 $\cos\beta$ 的值

答案：（1）证明见解析；（2）$\frac{63}{65}$．

【解析】

（1）根据向量的数量积公式即可证明；

（2）根据角的范围分别求出正弦和余弦值，利用两角和的余弦公式计算得出答案．

【详解】

（1）由题意知：$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，且 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\alpha-\beta$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$，

又 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$．

（2）$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 且 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$，则 $\sin\alpha=\frac{5}{13},\cos\alpha=-\frac{12}{13}$；

$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\alpha-\beta\in(0,\pi)$，

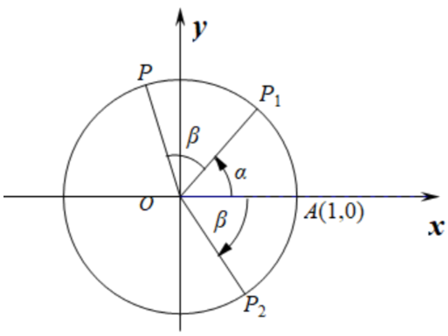
$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5},\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,

$\cos\beta=\cos\left[\alpha-(\alpha-\beta)\right]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{63}{65}$

【点睛】

本题主要考查平面向量的数量积的定义，考查平面向量数量积的坐标运算，考查两角和与差的余弦公式，属于中档题.

例 4．（2023·全国·高三专题练习）如图，考虑点 $A(1,0)$， $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$， $P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$， $P(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，从这个图出发.



（1）推导公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

（2）利用（1）的结果证明：$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，并计算 $\sin37.5^{\circ}\cdot\cos37.5^{\circ}$ 的值.

答案：（1）推导见解析；（2）证明见解析，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$

【解析】

分析：

（1）根据图象可知 $\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$，再展开化简，得到两角和的余弦公式；（2）首先令 $\beta=-\beta$，求 $\cos(\alpha-\beta)$，再代入所证明的公式；首先根据二倍角公式和诱导公式化简为 $\sin37.5°\cdot\cos37.5°=\frac{1}{2}\sin75°=\frac{1}{2}\cos15°$，再根据两角差的余弦公式化简.

【详解】

（1）因为 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha),P_2(\cos\beta,-\sin\beta),P(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，

根据图象，可得 $\overrightarrow{AP}^2=\overrightarrow{P_1P_2}^2$，即 $|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$，

即 $(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$.

即 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$.

（2）由（1）可得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$， ①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$ ②

由①+②可得：$2\cos\beta\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

所以 $\cos\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，

所以 $\sin 37.5^{\circ}\cos 37.5^{\circ}=\frac{1}{2}\sin 75^{\circ}=\frac{1}{2}\cos 15^{\circ}=\frac{1}{2}\cos\left(45^{\circ}-30^{\circ}\right)$.

$=\frac{1}{2}\left(\cos 45^{\circ}\cos 30^{\circ}+\sin 45^{\circ}\sin 30^{\circ}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$

【点睛】

本题考查两角和差余弦公式的证明，以及利用三角恒等变换求值，重点考查逻辑推理证明，公式的灵活应用，属于基础题型.

【方法技巧与总结】

推证两角和与差公式就是要用这两个单角的三角函数表示和差角的三角公式，通过余弦定理或向量数量积建立它们之间的关系，这就是证明的思路.

题型二：给式求值

例 5.（2023·全国·高三专题练习）已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{5}$，且 $0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$0<\beta<\frac{3\pi}{4}$，则 $\sin\beta=$（　　）

A. $\frac{9\sqrt{15}}{35}$　　B. $\frac{11\sqrt{10}}{35}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{35}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{35}$

答案：A

【解析】

易知 $\sin\beta=\sin(\alpha-(\alpha-\beta))$，利用角的范围和同角三角函数关系可求得 $\cos\alpha$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$，分别在 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 和 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$ 两种情况下，利用两角和差正弦公式求得 $\sin\beta$，结合 β 的范围可确定最终结果.

【详解】

$\because\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{5}{7}$.

又 $0<\beta<\frac{3\pi}{4}$，$\therefore -\frac{3\pi}{4}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 时，

$\sin\beta=\sin\left(\alpha-(\alpha-\beta)\right)=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{6}}{7}\times\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{5}{7}\times\frac{\sqrt{15}}{5}=-\frac{\sqrt{15}}{35}$，

Q $0<\beta<\frac{3\pi}{4}$， $\therefore\sin\beta>0$， $\therefore\sin\beta=-\frac{\sqrt{15}}{35}$不合题意，舍去；

当$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{15}}{5}$，同理可求得$\sin\beta=\frac{9\sqrt{15}}{35}$，符合题意.

综上所述： $\sin\beta=\frac{9\sqrt{15}}{35}$.

故选： A .

【点睛】

易错点睛：本题中求解$\cos\alpha$时，易忽略$\sin\alpha$的值所确定的α的更小的范围，从而误认为$\cos\alpha$的取值也有两种不同的可能性，造成求解错误.

例 6．（2023·四川·乐山外国语学校高三期中（文））已知$\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\tan 210^\circ$，则$\sin(60^\circ+\alpha)$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　　　B．$-\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$-\frac{2}{3}$

答案：A

【解析】

根据题意得到$\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$进而得到$\cos^2\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{6}{9}$， $\cos(30^\circ-\alpha)=\frac{1}{3}$，从而有$\sin(60^\circ+\alpha)=\sin\left[90^\circ-(30^\circ-\alpha)\right]=\cos(30^\circ-\alpha)$.

【详解】

$\because\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\tan 210^\circ$，

$\therefore\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\tan 210^\circ=\tan(180^\circ+30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则$\cos^2\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin^2\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{6}{9}$，

$\cos(30^\circ-\alpha)=\cos^2\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{3}$，

$\therefore\sin(60^\circ+\alpha)=\sin\left[90^\circ-(30^\circ-\alpha)\right]$

$=\cos(30^\circ-\alpha)=\frac{1}{3}$，

故选 A.

【点睛】

本题主要考查二倍角公式，同角三角函数的基本关系，诱导公式，属于基础题.

例 7.（2023·全国·高三专题练习）若 $\cos(\frac{\pi}{3}-2x)=-\frac{7}{8}$，则 $\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的值为（　　）.

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．$\pm\frac{1}{4}$　　D．$\pm\frac{7}{8}$

答案：C

【解析】

分析：

利用倍角公式以及诱导公式，结合已知条件，即可求得结果.

【详解】

$\because \cos(\frac{\pi}{3}-2x)=\cos[2(\frac{\pi}{6}-x)]=2\cos^2(\frac{\pi}{6}-x)-1=-\frac{7}{8}$,

$\therefore \cos(\frac{\pi}{6}-x)=\pm\frac{1}{4}$,

$\because \sin(x+\frac{\pi}{3})=\cos[\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{3})]=\cos(\frac{\pi}{6}-x)=\pm\frac{1}{4}$,

故选：*C.*

【点睛】

本题考查利用三角恒等变换解决给值求值问题，属基础题.

（多选题）例 8.（2023·全国·高三专题练习）设 $\sin(\beta+\frac{\pi}{6})+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，则 $\sin(\beta-\frac{\pi}{3})=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：AC

【解析】

分析：

利用三角恒等变换化简已知条件，结合同角三角函数的基本关系式，求得 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)$.

【详解】

依题意 $\sin(\beta+\frac{\pi}{6})+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\sin(\beta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\cos(\beta-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\beta-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\frac{1}{2}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}+2}{2}\cos(\beta-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，

$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sqrt{3}+2\right)\cos(\beta-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}+1$，

$\cos(\beta-\frac{\pi}{3})=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}+2}$，代入$\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=1$，

$\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\left[\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}+2}\right]^2=1$，

化简得$\left(8+4\sqrt{3}\right)\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)-\left(2\sqrt{3}+2\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)-\left(3+2\sqrt{3}\right)=0$，

两边除以$\sqrt{3}+2$， $4\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\left(2-2\sqrt{3}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$，

$\left[2\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)+1\right]\left[2\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\right]=0$，

解得$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$或$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：AC

例9．（2023·全国·模拟预测（文））已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\cos2\beta=\frac{3}{5}$， $\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{4}{5}$，则$\cos\alpha=$ ____________.

答案：$\frac{11\sqrt{5}}{25}$

【解析】

分析：

由$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{4}{5}$，即可求得$\sin\left(\alpha+\beta\right)$，用二倍角公式即可求得$\sin\beta$ 和 $\cos\beta$ ，用拼凑角思想可表示出$\alpha=\left(\alpha+\beta\right)-\beta$，用三角恒等变换公式求解即可.

【详解】

因为$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{4}{5}$， 且$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， 所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\frac{3}{5}$.又因为$\cos2\beta=1-2\sin^2\beta=\frac{3}{5}$，

解得$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$， 则$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\beta\right)-\beta\right]=\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\beta+\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

故答案为：$\frac{11\sqrt{5}}{25}$

例 10．（2023·上海静安·模拟预测）已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\sin 2\alpha$的值为

______________．

答案：$\frac{1}{2}$##0.5

【解析】

分析：

由倍角公式以及诱导公式求解即可．

【详解】

$$\text{Q}\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-2\times\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=-\sin 2\alpha$$

$$\therefore \sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

故答案为：$\frac{1}{2}$

例 11．（2023·江苏泰州·模拟预测）若$\theta=\theta_0$时，$f(\theta)=\sin 2\theta-\cos^2\theta$取得最大值，则$\sin\left(2\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)=$______．

答案：$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

分析：

首先利用二倍角公式和辅助角公式，化简，再代入求值．

【详解】

$$f(\theta)=\sin 2\theta-\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}$$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\theta\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\varphi)-\frac{1}{2}$（其中$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$），

当$f(\theta)$取最大值时，$2\theta_0-\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore 2\theta_0=\varphi+\frac{\pi}{2}$

$\sin 2\theta_0=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos 2\theta_0=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\left(2\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【方法技巧与总结】

给式求值：给出某些式子的值，求其他式子的值.解此类问题，一般应先将所给式子变形，将其转化成所求函数式能使用的条件，或将所求函数式变形为可使用条件的形式.

题型三：给值求值

例 12.（2023·福建省福州第一中学三模）若 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．2　　D．-2

答案：D

【解析】

分析：

由 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$，可解得 $\tan\frac{\alpha}{2}$，即可求解

【详解】

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}$，故 $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}=-\frac{3}{5}$，

可解得 $\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$ 或 $\tan\frac{\alpha}{2}=-3$，又 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，故 $\tan\frac{\alpha}{2}=-3$，故 $\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=-2$，

故选：D

例 13.（2023·湖北武汉·模拟预测）已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$-\frac{7}{8}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．$-\frac{\sqrt{15}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{4}$

答案：B

【解析】

分析：

根据题意得$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的值，再根据$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$求解即可.

【详解】

因为$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$，

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

故选：B.

例 14．（2023·湖北·模拟预测）已知$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，则$\cos2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

【解析】

分析：

由已知α的取值范围，求出$\alpha-\frac{\pi}{4}$的取值范围，再结合$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$即可解得$\alpha$的值，

$\cos2\alpha$即可求解

【详解】

因为$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{3\pi}{4}<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$

又$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}$，所以$\alpha=-\frac{\pi}{12}$

所以$\cos2\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选：D

例 15．（2023·全国·模拟预测）已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{5}$，则$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$\frac{23}{25}$　　B．$-\frac{23}{25}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

答案：B

【解析】

分析：

利用诱导公式化简，然后利用二倍角公式即得.

【详解】