

江西省景德镇一中 2024 年 3 月高三模拟考试数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

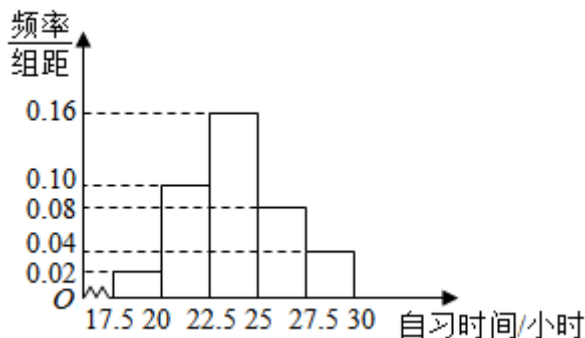
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 数列 $\{a_n\}$ ，满足对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$ ，均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值.若 $a_7=2$ ， $a_9=3$ ， $a_{98}=4$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和

$S_{100}=(\quad)$

- A. 132 B. 299 C. 68 D. 99

2. 某学校调查了 200 名学生每周的自习时间（单位：小时），制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$ ，样本数据分组为 $[17.5, 20)$ ， $[20, 22.5)$ ， $[22.5, 25)$ ， $[25, 27.5)$ ， $[27.5, 30]$.根据直方图，这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 $(\quad)$



- A. 56 B. 60 C. 140 D. 120

3. $\frac{(1-2x)^7}{x}$ 的展开式中 x^2 的系数为 $(\quad)$

- A. -84 B. 84 C. -280 D. 280

4. 已知点 $A(2\sqrt{5}, 3\sqrt{10})$ 在双曲线 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上，则该双曲线的离心率为 $(\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{10}$

5. 已知复数 $(1 + \square i)(\square + \square i)$ 为纯虚数 ($\square$ 为虚数单位)，则实数 $\square = (\quad)$

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

6. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq x \\ x + y \leq 2 \\ x \geq a \end{cases}$, 且 $z = 2x + y$ 的最大值是最小值的 4 倍, 则 a 的值是 ()

- A. 4 B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{11}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 设集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | -2x^2 + 5x + 3 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1\}$
C. $\{1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

8. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 黑、白两蚂蚁从点 A 出发沿棱向前爬行, 每走完一条棱称为“走完一段”. 白蚂蚁爬行的路线是 $AA_1 \rightarrow A_1D_1 \rightarrow \dots$, 黑蚂蚁爬行的路线是 $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow \dots$, 它们都遵循如下规则: 所爬行的第 $i+2$ 段与第 i 段所在直线必须是异面直线 ($i \in \mathbb{N}^*$). 设白、黑蚂蚁都走完 2020 段后各自停止在正方体的某个顶点处, 这时黑、白两蚂蚁的距离是 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 0

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$, 要得到函数 $g(x) = \cos x$ 的图象, 只需将 $y = f(x)$ 的图象 ()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

10. 曲线 $x^2 = 4y$ 在点 $(2, t)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = x - 1$ B. $y = 2x - 3$ C. $y = -x + 3$ D. $y = -2x + 5$

11. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 是其一条渐近线上一点, 且以 F_1F_2 为直径的圆经过

点 P , 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}b^2$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3

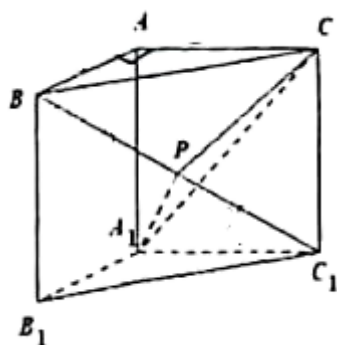
12. 正三棱锥底面边长为 3, 侧棱与底面成 60° 角, 则正三棱锥的外接球的体积为 ()

- A. 4π B. 16π C. $\frac{16\pi}{3}$ D. $\frac{32\pi}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知点 P 是抛物线 $x^2 = 4y$ 上动点, F 是抛物线的焦点, 点 A 的坐标为 $(0, -1)$, 则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为_____.

14. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AC = AB = 2$, $CC_1 = 2$, P 是 BC_1 的中点, 则三棱锥 $C - A_1C_1P$ 的体积为_____.

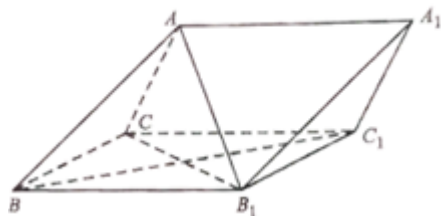


15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且对任意正整数 n , 都有 $\begin{vmatrix} a_n & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2n & S_n \end{vmatrix} = 0$, 则 $a_1 =$ _____

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线经过点 $(1, 2)$, 则该双曲线的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AC \perp AB_1$, $AB = BC$.



(1) 求证: $BC_1 \perp$ 平面 AB_1C ;

(2) 若 $AB \perp B_1C$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, 求二面角 $B_1 - AA_1 - C_1$ 的余弦值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 边上一点, $\angle BAM = 45^\circ$, $\cos \angle AMC = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin B$;

(2) 若 $MC = \frac{1}{2}BM$, $AC = 4$, 求 MC .

19. (12 分) 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 8 + t \cos \frac{3\pi}{4} \\ y = t \sin \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ (t 为

参数).

(1) 求 C_1 和 C_2 的普通方程;

(2) 过坐标原点 O 作直线交曲线 C_1 于点 M (M 异于 O), 交曲线 C_2 于点 N , 求 $\frac{|ON|}{|OM|}$ 的最小值.

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a^2 > b^2$, 且

$$\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B.$$

(I) 求角 C 的大小;

(II) 若 $c = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sqrt{3}a \sin C = c \cos A$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 若 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $b + c = 2 + 2\sqrt{3}$, 求 a 的值.

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A, B , 焦距为 2, 点 P 为椭圆上异于 A, B 的点, 且直线 PA 和 PB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 AP 与 y 轴的交点为 Q , 过坐标原点 O 作 $OM \parallel AP$ 交椭圆于点 M , 试探究 $\frac{|AP| \cdot |AQ|}{|OM|^2}$ 是否为定值, 若

是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

由 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值, 可得 $a_{n+3} = a_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列, 求出 a_1, a_2, a_3 , 即求 S_{100} .

【详解】

对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值,

$$\therefore (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = 0,$$

$$\text{故 } a_{n+3} = a_n,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列,

$$\text{故 } a_1 = a_7 = 2, a_2 = a_8 = 4, a_3 = a_9 = 3,$$

$$\therefore S_{100} = (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{97} + a_{98} + a_{99}) + a_{100} = 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1$$

$$= 33(2 + 4 + 3) + 2 = 299.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查周期数列求和, 属于中档题.

2、C

【解析】

试题分析: 由题意得, 自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $(0.16 + 0.08 + 0.04) \times 2.5 = 0.7$, 故自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $0.7 \times 200 = 140$, 故选 C.

考点: 频率分布直方图及其应用.

3、C

【解析】

由题意, 根据二项式定理展开式的通项公式 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, 得 $(1-2x)^7$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = (-2)^k C_7^k x^k$, 则

$\frac{(1-2x)^7}{x}$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = (-2)^k C_7^k x^{k-1}$, 由 $k-1=2$, 得 $k=3$, 所以所求 x^2 的系数为 $(-2)^3 C_7^3 = -280$. 故选

C.

点睛: 此题主要考查二项式定理的通项公式的应用, 以及组合数、整数幂的运算等有关方面的知识, 属于中低档题, 也是常考知识点. 在二项式定理的应用中, 注意区分二项式系数与系数, 先求出通项公式 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$, 再根据所求问题, 通过确定未知的次数, 求出 r , 将 r 的值代入通项公式进行计算, 从而问题可得解.

4、C

【解析】

将点 A 坐标代入双曲线方程即可求出双曲线的实轴长和虚轴长，进而求得离心率.

【详解】

将 $x = 2\sqrt{5}, y = 3\sqrt{10}$ 代入方程 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 得 $b = 3\sqrt{10}$ ，而双曲线的半实轴 $a = \sqrt{10}$ ，所以

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$ ，得离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}$ ，故选 C.

【点睛】

此题考查双曲线的标准方程和离心率的概念，属于基础题.

5、B

【解析】

化简得到 $\square = \square - 1 + (\square + 1)\square$ ，根据纯虚数概念计算得到答案.

【详解】

$\square = (1 + \square)(\square + \square) = \square - 1 + (\square + 1)\square$ 为纯虚数，故 $\square - 1 = 0$ 且 $\square + 1 \neq 0$ ，即 $\square = 1$.

故选：□.

【点睛】

本题考查了根据复数类型求参数，意在考查学生的计算能力.

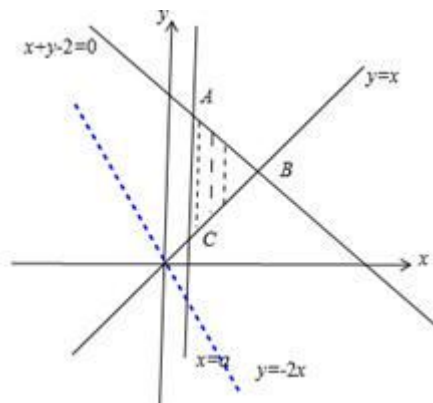
6、D

【解析】

试题分析：先画出可行域如图：由 $\begin{cases} y = x \\ x + y = 2 \end{cases}$ ，得 $B(1,1)$ ，由 $\begin{cases} x = a \\ y = x \end{cases}$ ，得 $C(a,a)$ ，当直线 $z = 2x + y$ 过点 $B(1,1)$ 时，

目标函数 $z = 2x + y$ 取得最大值，最大值为 3；当直线 $z = 2x + y$ 过点 $C(a,a)$ 时，目标函数 $z = 2x + y$ 取得最小值，

最小值为 $3a$ ；由条件得 $3 = 4 \times 3a$ ，所以 $a = \frac{1}{4}$ ，故选 D.



考点：线性规划.

7、A

【解析】

解出集合 B ，利用交集的定义可求得集合 $A \cap B$.

【详解】

因为 $B = \left\{x \mid -2x^2 + 5x + 3 > 0\right\} = \left\{x \mid 2x^2 - 5x - 3 < 0\right\} = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$ ，又 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查交集的计算，同时也考查了一元二次不等式的求解，考查计算能力，属于基础题.

8、B

【解析】

根据规则，观察黑蚂蚁与白蚂蚁经过几段后又回到起点，得到每爬 1 步回到起点，周期为 1. 计算黑蚂蚁爬完 2020 段后实质是到达哪个点以及计算白蚂蚁爬完 2020 段后实质是到达哪个点，即可计算出它们的距离.

【详解】

由题意，白蚂蚁爬行路线为 $AA_1 \rightarrow A_1D_1 \rightarrow D_1C_1 \rightarrow C_1C \rightarrow CB \rightarrow BA$ ，

即过 1 段后又回到起点，

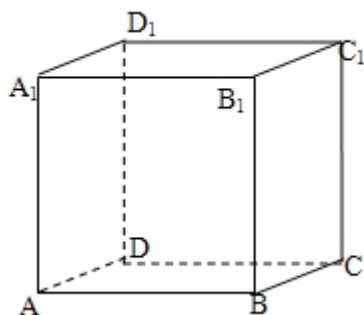
可以看作以 1 为周期，

由 $2020 \div 6 = 336 \text{L} 4$ ，

白蚂蚁爬完 2020 段后到回到 C 点；

同理，黑蚂蚁爬行路线为 $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow B_1C_1 \rightarrow C_1D_1 \rightarrow D_1D \rightarrow DA$ ，

黑蚂蚁爬完 2020 段后回到 D_1 点，



所以它们此时的距离为 $\sqrt{2}$.

故选 B.

【点睛】

本题考查多面体和旋转体表面上的最短距离问题，考查空间想象与推理能力，属于中等题.

9、A

【解析】

根据函数图像平移原则，即可容易求得结果.

【详解】

$$\text{因为 } f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

故要得到 $g(x)$ ，只需将 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度.

故选：A.

【点睛】

本题考查函数图像平移前后解析式的变化，属基础题.

10、A

【解析】

将点代入解析式确定参数值，结合导数的几何意义求得切线斜率，即可由点斜式求的切线方程.

【详解】

$$\text{曲线 } x^2 = 4y, \text{ 即 } y = \frac{1}{4}x^2,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, 代入可得 } t = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1, \text{ 所以切点坐标为 } (2, 1),$$

$$\text{求得导函数可得 } y' = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{由导数几何意义可知 } k = y' = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\text{由点斜式可得切线方程为 } y - 1 = x - 2, \text{ 即 } y = x - 1,$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了导数的几何意义，在曲线上一点的切线方程求法，属于基础题.

11、B

【解析】

根据题意，设点 $P(x_0, y_0)$ 在第一象限，求出此坐标，再利用三角形的面积即可得到结论.

【详解】

$$\text{由题意, 设点 } P(x_0, y_0) \text{ 在第一象限, 双曲线的一条渐近线方程为 } y = \frac{b}{a}x,$$

所以, $y_0 = \frac{b}{a}x_0$,

又以 F_1F_2 为直径的圆经过点 P , 则 $|OP| = c$, 即 $x_0^2 + y_0^2 = c^2$, 解得 $x_0 = a$, $y_0 = b$,

所以, $S_{\Delta PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot y_0 = c \cdot b = \frac{2\sqrt{3}}{3}b^2$, 即 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$, 即 $c^2 = \frac{4}{3}(c^2 - a^2)$,

所以, 双曲线的离心率为 $e = 2$.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查双曲线的离心率, 解决本题的关键在于求出 a 与 c 的关系, 属于基础题.

12、D

【解析】

由侧棱与底面所成角及底面边长求得正棱锥的高, 再利用勾股定理求得球半径后可得球体积.

【详解】

如图, 正三棱锥 $A-BCD$ 中, M 是底面 $\triangle BCD$ 的中心, 则 AM 是正棱锥的高, $\angle ABM$ 是侧棱与底面所成的角, 即

$\angle ABM = 60^\circ$, 由底面边长为 3 得 $BM = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

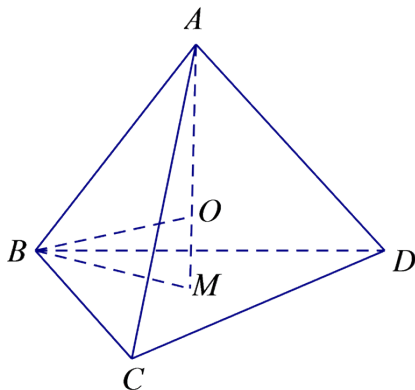
$\therefore AM = BM \tan 60^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$.

正三棱锥 $A-BCD$ 外接球球心 O 必在 AM 上, 设球半径为 R ,

则由 $BO^2 = OM^2 + BM^2$ 得 $R^2 = (3-R)^2 + (\sqrt{3})^2$, 解得 $R = 2$,

$\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}$.

故选: D.



【点睛】

本题考查球体积, 考查正三棱锥与外接球的关系. 掌握正棱锥性质是解题关键.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

过点 P 作 PM 垂直于准线， M 为垂足，则由抛物线的定义可得 $PM = PF$ ，

则 $\frac{PF}{PA} = \frac{PM}{PA} = \sin \angle PAM$ ， $\angle PAM$ 为锐角. 故当 PA 和抛物线相切时， $\frac{PF}{PA}$ 的值最小.

再利用直线的斜率公式、导数的几何意义求得切点的坐标，从而求得 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值.

【详解】

解：由题意可得，抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点 $F(0,1)$ ，准线方程为 $y = -1$ ，

过点 P 作 PM 垂直于准线， M 为垂足，则由抛物线的定义可得 $PM = PF$ ，

则 $\frac{PF}{PA} = \frac{PM}{PA} = \sin \angle PAM$ ， $\angle PAM$ 为锐角.

故当 $\angle PAM$ 最小时， $\frac{PF}{PA}$ 的值最小.

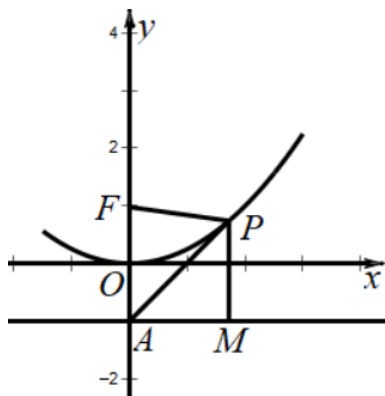
设切点 $P(2\sqrt{a}, a)$ ，由 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的导数为 $y' = \frac{1}{2}x$ ，

则 PA 的斜率为 $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} = \sqrt{a} = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$ ，

求得 $a = 1$ ，可得 $P(2,1)$ ，

$\therefore PM = 2$ ， $PA = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \sin \angle PAM = \frac{PM}{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



故答案为： $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046043241222011000>