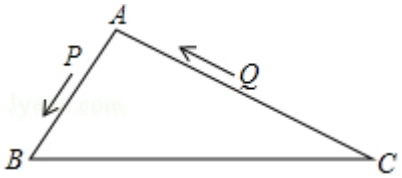
专题 4.2 相似三角形中的动点问题

【例题精讲】

【例1】如图，ΔABC 中，$AB=8$ 厘米，$AC=16$ 厘米，点 P 从 A 出发，以每秒 2 厘米的速度向 B 运动，点 Q 从 C 同时出发，以每秒 3 厘米的速度向 A 运动，其中一个动点到端点时，另一个动点也相应停止运动，设运动的时间为 t .

（1）用含 t 的代数式表示：$AP=$ __$2t$__，$AQ=$____.

（2）当以 A，P，Q 为顶点的三角形与 ΔABC 相似时，求运动时间是多少？



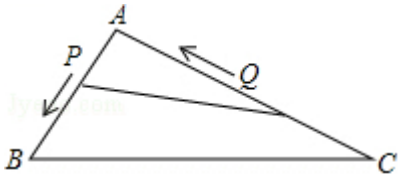
【解答】解：（1）$AP=2t$，$AQ=16-3t$.

（2）$\because \angle PAQ=\angle BAC$，

$\therefore$ 当 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AC}$ 时，$\Delta APQ\backsim\Delta ABC$，即 $\dfrac{2t}{8}=\dfrac{16-3t}{16}$，解得 $t=\dfrac{16}{7}$；

当 $\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{AQ}{AB}$ 时，$\Delta APQ\backsim\Delta ACB$，即 $\dfrac{2t}{16}=\dfrac{16-3t}{8}$，解得 $t=4$.

$\therefore$ 运动时间为 $\dfrac{16}{7}$ 秒或 4 秒.

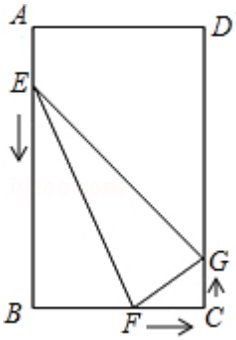


【例2】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=12cm$，$BC=8cm$. 点 E、F、G 分别从点 A、B、C 三点同时出发，沿矩形的边按逆时针方向移动. 点 E、G 的速度均为 $2cm/s$，点 F 的速度为 $4cm/s$，当点 F 追上点 G（即点 F 与点 G 重合）时，三个点随之停止移动. 设移动开始后第 t 秒时，ΔEFG 的面积为 $S(cm^2)$

（1）当 $t=1$ 秒时，S 的值是多少？

（2）写出 S 和 t 之间的函数解析式，并指出自变量 t 的取值范围；

（3）若点 F 在矩形的边 BC 上移动，当 t 为何值时，以点 E 、 B 、 F 为顶点的三角形与以点 F 、 C 、 G 为顶点的三角形相似？请说明理由．



【解答】解：（1）如图 1，当 $t=1$ 秒时， $AE=2$ ， $EB=10$ ， $BF=4$ ， $FC=4$ ， $CG=2$ ，

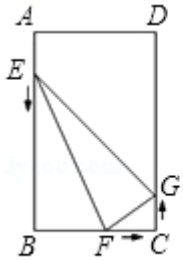


图1

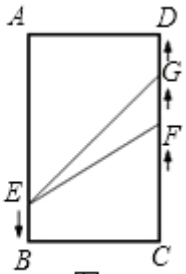


图 2

由 $S=S_{梯形GCBE}-S_{\Delta EBF}-S_{\Delta FCG}$ ，

$$=\frac{1}{2}\times(EB+CG)\bullet BC-\frac{1}{2}EB\bullet BF-\frac{1}{2}FC\bullet CG$$

$$=\frac{1}{2}\times(10+2)\times8-\frac{1}{2}\times10\times4-\frac{1}{2}\times4\times2$$

$$=24(cm^2)$$ ；

（2）①如图 1，当 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时，点 E 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 CD 上移动，

此时 $AE=2t$ ， $EB=12-2t$ ， $BF=4t$ ， $FC=8-4t$ ， $CG=2t$ ，

$$S=S_{梯形GCBE}-S_{\Delta EBF}-S_{\Delta FCG}$$

$$=\frac{1}{2}\times(EB+CG)\bullet BC-\frac{1}{2}EB\bullet BF-\frac{1}{2}FC\bullet CG$$

$$=\frac{1}{2}\times8\times(12-2t+2t)-\frac{1}{2}\times4t(12-2t)-\frac{1}{2}\times2t(8-4t)$$

$$=8t^2-32t+48(0\leqslant t\leqslant 2)$$.

②如图 2，当点 F 追上点 G 时， $4t=2t+8$ ，解得 $t=4$ ，

当$2<t<4$时，点E在边AB上移动，点F、G都在边CD上移动，此时$CF=4t-8$，$CG=2t$，

$FG=CG-CF=2t-(4t-8)=8-2t$，

$S=\frac{1}{2}FG\bullet BC=\frac{1}{2}(8-2t)\bullet 8=-8t+32$．

即$S=-8t+32(2<t<4)$．

（3）如图1，当点F在矩形的边BC上的边移动时，在ΔEBF和ΔFCG中，

$\angle B=\angle C=90°$，

①若$\frac{EB}{FC}=\frac{BF}{CG}$，即$\frac{12-2t}{8-4t}=\frac{4t}{2t}$，

解得$t=\frac{2}{3}$．

所以当$t=\frac{2}{3}$时，$\Delta EBF\backsim\Delta FCG$，

②若$\frac{EB}{GC}=\frac{BF}{CF}$即$\frac{12-2t}{2t}=\frac{4t}{8-4t}$，解得$t=\frac{3}{2}$．

所以当$t=\frac{3}{2}$时，$\Delta EBF\backsim\Delta GCF$．

综上所述，当$t=\frac{2}{3}$或$t=\frac{3}{2}$时，以点E、B、F为顶点的三角形与以F、C、G为顶点的三角形相似．

【题组训练】

2．如图，在RtΔABC中，$\angle C=90°$，$AC=8cm$，$BC=6cm$．现在有动点P从点B出发，沿线段BA向终点A运动，动点Q从点A出发，沿折线$AC—CB$向终点运动．如果点P的速度是$1cm/s$，点Q的速度是$1cm/s$．它们同时出发，当有一点到达终点时，另一点也停止运动．设运动的时间为t秒．

（1）如图1，Q在AC上，当t为多少秒时，以点A、P、Q为顶点的三角形与ΔABC相似？

（2）如图2，Q在CB上，是否存着某时刻，使得以点B、P、Q为顶点的三角形与ΔABC相似？若存在，求出t的值；若不存在，请说明理由．

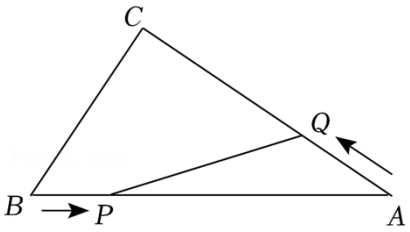


图1

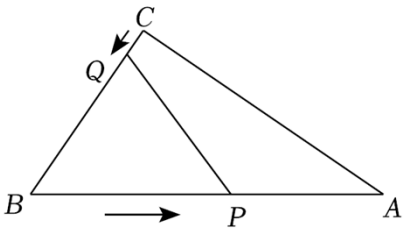


图2

【解答】解：（1）如图 1，当 $\angle AQP=90°$ 时， $\Delta AQP\backsim\Delta ACB$ ，

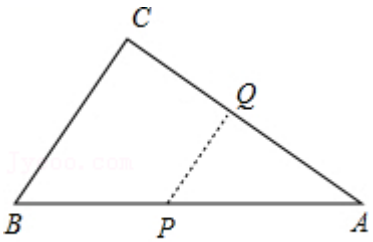


图1

$\therefore \dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{AP}{AB}$.

在 RtΔABC 中，由勾股定理，得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10(cm)$.

$\because BP=t$ ， $AQ=t$ ，

$\therefore PA=10-t$ ，

$\therefore \dfrac{t}{8}=\dfrac{10-t}{10}$ ，

$\therefore t=\dfrac{40}{9}$ ，

如图 2，当 $\angle APQ=90°$ 时， $\Delta APQ\backsim\Delta ACB$ ，

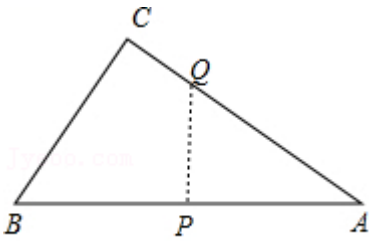


图2

$\therefore \dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AP}{AC}$ ，

$\therefore \dfrac{t}{10}=\dfrac{10-t}{8}$ ，

$t=\dfrac{50}{9}$.

综上所述，$t=\frac{40}{9}$ 或 $\frac{50}{9}$ 时，以点 A 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 ΔABC 相似；

（2）如图 3，当 $\Delta BPQ\backsim\Delta BAC$ 时，

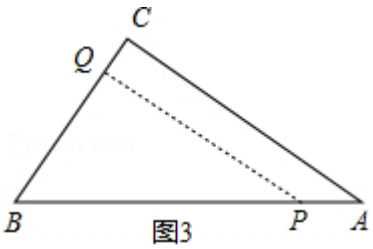


图3

$\frac{BP}{AB}=\frac{BQ}{BC}$.

$\because BQ=14-t$ ， $BP=t$ ，

$\therefore \frac{t}{10}=\frac{14-t}{6}$ ，

$\therefore t=\frac{35}{4}$ ，

当 $\Delta BQP\backsim\Delta BAC$ 时，

$\therefore \frac{BQ}{BA}=\frac{BP}{BC}$ ，

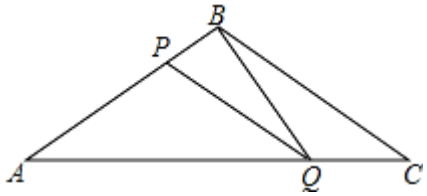
$\therefore t=\frac{21}{4}$ （舍去），

$\therefore t=\frac{35}{4}$ 时， Q 在 CB 上，以点 B 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 ΔABC 相似.

3．如图，在 ΔABC 中， $BA=BC=20cm$ ， $AC=30cm$ ，点 P 从点 A 出发，沿 AB 以 $4cm/s$ 的速度向点 B 运动，同时点 Q 从点 C 出发，沿 CA 以 $3cm/s$ 的速度向点 A 运动，当其中一点到达终点时，另一点也停止运动，设运动时间为 x s .

（1）当 $PQ//BC$ 时，求 x 的值.

（2） ΔAPQ 与 ΔCQB 能否相似？若能，求出 AP 的长；若不能，请说明理由.



【解答】解：（1）当 $PQ//BC$ 时， $AP:AB=AQ:AC$ ，

$\because AP=4x$ ， $AQ=30-3x$ ，

$\therefore \frac{4x}{20}=\frac{30-3x}{30}$，

解得：$x=\frac{10}{3}$；

即当$x=\frac{10}{3}$，$PQ//BC$；

（2）能，

①当$\Delta APQ\backsim\Delta CQB$时，有$\frac{AP}{CQ}=\frac{AQ}{BC}$，

即：$\frac{4x}{3x}=\frac{30-3x}{20}$，

解得：$x=\frac{10}{9}$，

$\therefore AP=4x=\frac{40}{9}(cm)$，

②当$\Delta APQ\backsim\Delta CBQ$时，有$\frac{AP}{BC}=\frac{QA}{CQ}$，

即：$\frac{4x}{20}=\frac{30-3x}{3x}$，

解得：$x=5$或$x=-10$（舍去），

$\therefore PA=4x=20(cm)$，

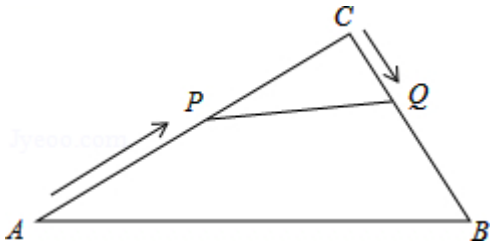
综上所述，当$AP=\frac{40}{9}cm$或$20cm$时，ΔAPQ与ΔCQB相似．

4．在$\mathrm{Rt}\Delta ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=20cm$，$BC=15cm$，现有动点P从点A出发，沿AC向点C方向运动，动点Q从点C出发，沿线段CB也向点B方向运动，如果点P的速度是$4cm/s$，点Q的速度是$2cm/s$，它们同时出发，当有一点到达所在线段的端点时，就停止运动．设运动时间为t秒．求：

（1）当$t=3$时，这时，P，Q两点之间的距离是多少？

（2）若ΔCPQ的面积为S，求S关于t的函数关系式．

（3）当t为多少时，以点C，P，Q为顶点的三角形与ΔABC相似？



【解答】解：由题意得 $AP=4t$，$CQ=2t$，则 $CP=20-4t$，

（1）当 $t=3$ 时，$CP=20-4t=8cm$，$CQ=2t=6cm$，

由勾股定理得 $PQ=\sqrt{CP^2+CQ^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10cm$；

（2）由题意得 $AP=4t$，$CQ=2t$，则 $CP=20-4t$，

因此 RtΔCPQ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times(20-4t)\times 2t=(20t-4t^2)cm^2$；

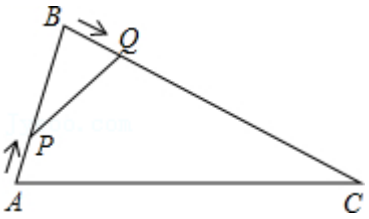
（3）分两种情况：

①当 RtΔCPQ∽RtΔCAB 时，$\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}$，即 $\frac{20-4t}{20}=\frac{2t}{15}$，解得 $t=3$；

②当 RtΔCPQ∽RtΔCBA 时，$\frac{CP}{CB}=\frac{CQ}{CA}$，即 $\frac{20-4t}{15}=\frac{2t}{20}$，解得 $t=\frac{40}{11}$.

因此 $t=3$ 或 $t=\frac{40}{11}$ 时，以点 C、P、Q 为顶点的三角形与 ΔABC 相似.

5．如图，在 ΔABC 中，$AB=8cm$，$BC=16cm$，动点 P 从点 A 开始沿 AB 边运动，速度为 $2cm/s$；动点 Q 从点 B 开始沿 BC 边运动，速度为 $4cm/s$；如果 P、Q 两动点同时运动，那么何时 ΔQBP 与 ΔABC 相似？



【解答】解：设经过 t 秒时，以 ΔQBP 与 ΔABC 相似，则 $AP=2t$ 厘米，$BP=(8-2t)$ 厘米，$BQ=4t$ 厘米，

$\because \angle PBQ=\angle ABC$，

$\therefore$ 当 $\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$ 时，$\Delta BPQ\backsim\Delta BAC$，即 $\frac{8-2t}{8}=\frac{4t}{16}$，解得 $t=2(s)$；

当 $\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$ 时，$\Delta BPQ\backsim\Delta BCA$，即 $\frac{8-2t}{16}=\frac{4t}{8}$，解得 $t=0.8(s)$；

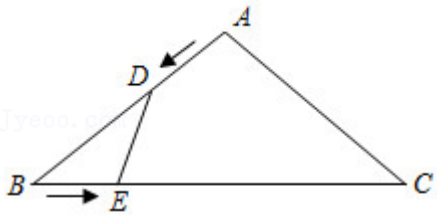
即经过 2 秒或 0.8 秒时，ΔQBP 与 ΔABC 相似.

6．如图，在等腰 ΔABC 中，$AB=AC=10cm$，$BC=16cm$．点 D 由点 A 出发沿 AB 方向向

点 B 匀速运动，同时点 E 由点 B 出发沿 BC 方向向点 C 匀速运动，它们的速度均为 $1cm/s$．连接 DE，设运动时间为 $t(s)(0<t<10)$，解答下列问题：

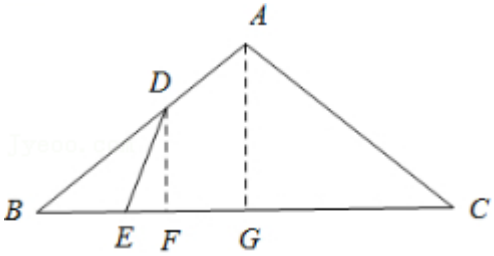
（1）当 t 为何值时，ΔBDE 的面积为 $7.5cm^2$；

（2）在点 D，E 的运动中，是否存在时间 t，使得 ΔBDE 与 ΔABC 相似？若存在，请求出对应的时间 t；若不存在，请说明理由．



【解答】解：（1）分别过点 D、A 作 $DF\perp BC$、$AG\perp BC$，垂足为 F、G

如图



$\therefore DF//AG$，$\dfrac{DF}{AG}=\dfrac{BD}{AB}$

$\because AB=AC=10$，$BC=16\therefore BG=8$，$\therefore AG=6$．

$\because AD=BE=t$，$\therefore BD=10-t$，

$\therefore \dfrac{DF}{6}=\dfrac{10-t}{10}$

解得 $DF=\dfrac{3}{5}(10-t)$

$\because S_{\Delta BDE}=\dfrac{1}{2}BE\cdot DF=7.5$

$\therefore \dfrac{3}{5}(10-t)\cdot t=15$

解得 $t=5$．

答：t 为 5 秒时，ΔBDE 的面积为 $7.5cm^2$．

（2）存在．理由如下：

①当 $BE=DE$ 时，$\Delta BDE\backsim\Delta BCA$，

$\therefore \frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}$ 即 $\frac{t}{10}=\frac{10-t}{16}$，

解得 $t=\frac{50}{13}$，

②当 $BD=DE$ 时，$\Delta BDE\backsim\Delta BAC$，

$\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{AB}$ 即 $\frac{t}{16}=\frac{10-t}{10}$，

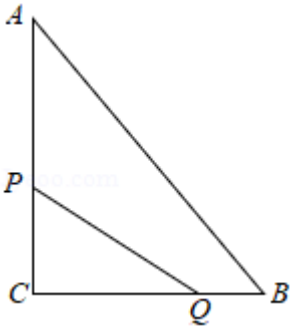
解得 $t=\frac{80}{13}$.

答：存在时间 t 为 $\frac{50}{13}$ 或 $\frac{80}{13}$ 秒时，使得 ΔBDE 与 ΔABC 相似.

7．如图，RtΔABC，$\angle C=90°$，$AC=10cm$，$BC=8cm$．点 P 从点 C 出发，以 $2cm/s$ 的速度沿 CA 向点 A 匀速运动，同时点 Q 从点 B 出发，以 $1cm/s$ 的速度沿 BC 向点 C 匀速运动，当一个点到达终点时，另一个点随之停止.

（1）求经过几秒后，ΔPCQ 的面积等于 ΔABC 面积的 $\frac{2}{5}$？

（2）经过几秒，ΔPCQ 与 ΔABC 相似？



【解答】解：（1）设经过 x 秒，ΔPCQ 的面积等于 ΔABC 面积的 $\frac{2}{5}$，

$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(8-x)=\frac{1}{2}\times 10\times 8\times\frac{2}{5}$，

解得：$x_1=x_2=4$，

答：经过 4 秒后，ΔPCQ 的面积等于 ΔABC 面积的 $\frac{2}{5}$；

（2）设经过 t 秒，ΔPCQ 与 ΔABC 相似，

因为 $\angle C=\angle C$，

所以分为两种情况：① $\frac{PC}{BC}=\frac{CQ}{AC}$，

$\frac{2t}{8}=\frac{8-t}{10}$，

解得：$t=\frac{16}{7}$；

②$\frac{PC}{AC}=\frac{CQ}{BC}$，

$\frac{2t}{10}=\frac{8-t}{8}$，

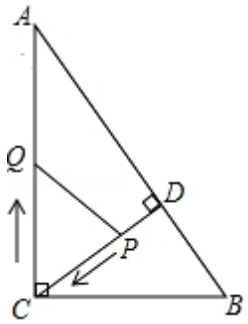
解得：$t=\frac{40}{13}$；

答：经过$\frac{16}{7}$秒或$\frac{40}{13}$秒时，ΔPCQ与ΔABC相似.

8．如图，在RtΔABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，$CD\perp AB$于点D．点P从点D出发，沿线段DC向点C运动，点Q从点C出发，沿线段CA向点A运动．两点同时出发．速度都为每秒1个单位长度，当点P运动到C时，两点都停止．设运动时间为t秒．

（1）求线段CD的长；

（2）设ΔCPQ的面积为S，求S与t之间的函数关系式，并确定在运动过程中是否存在某一时刻t，使得$S_{\Delta CPQ}:S_{\Delta ABC}=9:100$？若存在，求出$t$的值；若不存在，说明理由．



【解答】解：（1）$\because\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

$\because\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

$\therefore\frac{1}{2}\times8\times6=\frac{1}{2}\times10CD$，

解得：$CD=4.8$；

（2）$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{8^2-4\cdot8^2}=6.4$，

过点Q作$QH\perp CD$于H，如图所示：

$\because CD\perp AB$，

$\therefore QH//AD$，

$\therefore \Delta CHQ\backsim\Delta CDA$，

$\therefore \dfrac{QH}{AD}=\dfrac{CQ}{AC}$，即 $\dfrac{QH}{6.4}=\dfrac{t}{8}$，

$\therefore QH=0.8t$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}QH\bullet CP=\dfrac{1}{2}\times 0.8t\times(4.8-t)=-0.4t^2+1.92t$；

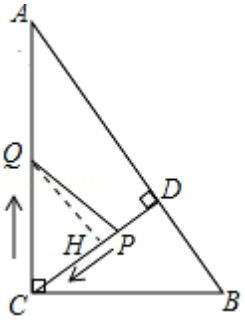
$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC\bullet BC=\dfrac{1}{2}\times 8\times 6=24$，

$S_{\Delta CPQ}:S_{\Delta ABC}=9:100$，即：$\dfrac{-0.4t^2+1.92t}{24}=\dfrac{9}{100}$，

整理得：$5t^2-24t+27=0$，

解得：$t_1=3$，$t_2=1.8$，

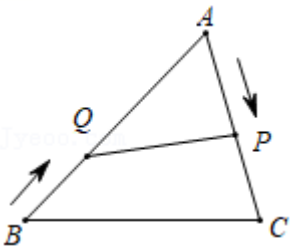
$\therefore$ 在运动过程中存在某一时刻 t，使得 $S_{\Delta CPQ}:S_{\Delta ABC}=9:100$，$t$ 的值为：3 或 1.8.



9．如图，$AB=16cm$，$AC=12cm$，动点 P、Q 分别以每秒 $2cm$ 和 $1cm$ 的速度同时开始运动，其中点 P 从点 A 出发，沿 AC 边一直移到点 C 为止，点 Q 从点 B 出发沿 BA 边一直移到点 A 为止，（点 P 到达点 C 后，点 Q 继续运动）

（1）请直接用含 t 的代数式表示 AP 的长和 AQ 的长，并写出自变量的取值范围．

（2）当 t 等于何值时，ΔAPQ 与 ΔABC 相似？



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/046053215031010232