

2024 届高三下学期开学摸底考

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

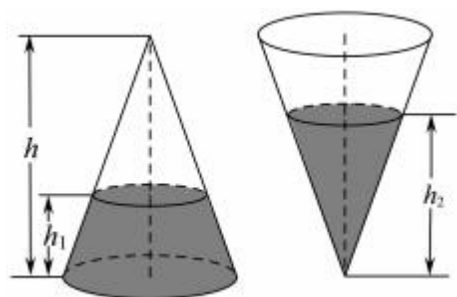
注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分。答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的。

1. 过点 $P(-1, 2)$ 且与直线 $x + 2y + 3 = 0$ 垂直的直线方程是 ()
A. $x - 2y + 5 = 0$ B. $x + 2y - 3 = 0$
C. $2x - y + 4 = 0$ D. $2x + y = 0$
2. 一组数据按从小到大排列为 $1, 4, 4, 4, x, 7, 8$, 若该组数据的第 60 百分位数是众数的 $\frac{7}{4}$ 倍, 则这组数据的平均数是 ()
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_5}{S_{10}} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{S_{10}}{S_{20}} =$ ()
A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{11}$ D. $\frac{3}{14}$
4. 如图, 圆锥形容器的高为 3 厘米, 圆锥内水面的高 h_1 为 1 厘米, 若将圆锥容器倒置, 水面高为 h_2 , 下列选项描述正确的是 ()



- A. h_2 的值等于 1 B. $h_2 \in (1, 2)$
C. h_2 的值等于 2 D. $h_2 \in (2, 3)$
5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C: (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 (a > 0)$, $A(-3, 0)$, 若圆 C 上存在点 P , 使得

$|PA| = 2|PO|$, 则正数 a 的取值范围为()

- A. $(0,1]$
- B. $[1,2]$
- C. $[\sqrt{3},2]$
- D. $[1,3+2\sqrt{3}]$

6. 《红海行动》是一部现代海军题材影片，该片讲述了中国海军“蛟龙突击队”奉命执行撤侨任务的故事。撤侨过程中，海军舰长要求队员们依次完成六项任务，并对任务的顺序提出了如下要求：重点任务A 必须排在前三位，且任务E、F 必须排在一起，则这六项任务的不同安排方案共有

- A. 240 种 B. 188 种 C. 156 种 D. 120 种

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) (\omega > 0)$ 在 $\left(\omega\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right)$ 上存在最值, 且在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 上单调, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\begin{bmatrix} 02 \\ 3 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 5, 8 \\ 2, 3 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 11, 17 \\ 4, 3 \end{bmatrix}$

8. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , P 是椭圆上一点, $|PF_1| = \lambda |PF_2| \left(\frac{1}{3} < \lambda < 3 \right)$,

经 $F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$ ，则椭圆离心率的取值范围为()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$
- B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right]$
- C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right]$
- D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设 z, z_1, z_2 是复数, 则下列命题中正确的是()

- A. 若 $|z| = 1$, 则 $z \cdot z = 1$
- B. 若 $|z| = 2$, 则 $z \cdot z = 4$
- C. 若 $\frac{z_1}{z_2} = 2i$, 则 $|z_1| = 2|z_2|$
- D. 若 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 \cdot z_2 = 0$

10. 已知 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 则 ()

- A. $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $\alpha = 2\beta$
- B. 若 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$, 则 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$
- C. 若 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{7}{25}$
- D. 若 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{2+x}{2-x}$, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 值域为 $\mathbf{R}$

B. 函数 $f(x)$ 是增函数

C. 不等式 $f(3x-1) + f(3x) < 0$ 的解集为 $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$

D. $f(-\frac{1}{2023}) + f(-\frac{1}{2022}) + \dots + f(-\frac{1}{2}) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(\frac{1}{2}) + \dots + f(\frac{1}{2023}) = 0$

12. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD = CD = 2$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球为球 O , 则 ()

A. $AB \perp BC$

B. $V_{P-ABCD} > 2V_{P-ACD}$

C. $V_{P-ABCD} = 2V_{O-ABCD}$

D. 点 O 不可能在平面 PBC 内

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知集合 $U = \{x | x^2 - 8x - 9 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, $A = \left\{ \frac{a}{y} \mid y = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}, y \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

14. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} =$ _____, $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

15. 已知 $a_n = 2^n$, 数列 $\{c_n\}$ 为 $a_1, b_1, a_2, b_2, b_3, a_3, b_4, b_5, b_6, a_4, b_7, b_8, b_9, b_{10}, a_5, \dots$, 规律是在 a_k 和 a_{k+1} 中间插入 k 项, 所有插入的项构成以 3 为首项, 2 为公差的等差数列 $\{b_n\}$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 30 项和为 _____.

16. 若存在正实数 x, y 满足 $x \ln \frac{y}{x} - y e^x + x(x+1) > 0$, 则 y 的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $A = 2B$, $2c = 3b$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 边 AC 的垂直平分线交边 BC 于点 D , 若 $AD = 4\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

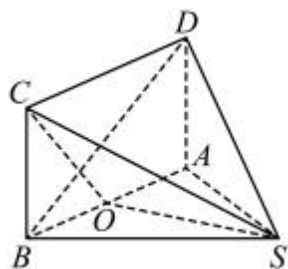
设函数 $f(x) = \ln x + ax + b$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 6x - 3$.

(1)求 a, b ;

(2)证明: $f(x) > -\frac{3}{5x}$.

19. (12 分)

如图, 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABS , 四边形 $ABCD$ 为矩形, $\triangle ABS$ 为正三角形, $SA = \sqrt{2}BC$, O 为 AB 的中点.



(1)证明: 平面 $SOC \perp$ 平面 BDS ;

(2)已知四棱锥 $S-AOCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求点 D 到平面 SOC 的距离.

20. (12 分)

已知甲、乙两支登山队均有 n 名队员, 现有新增的 4 名登山爱好者 a, b, c, d 将依次通过摸出小球的颜色来决定其加入哪支登山队, 规则如下: 在一个不透明的箱中放有红球和黑球各 2 个, 小球除颜色不同之外,

其余完全相同先由第一名新增登山爱好者从箱中不放回地摸出 1 个小球, 再另取完全相同的红球和黑球各 1 个放入箱中; 接着由下一名新增登山爱好者摸出 1 个小球后, 再放入完全相同的红球和黑球各 1 个, 如此重复, 直至所有新增登山爱好者均摸球和放球完毕. 新增登山爱好者若摸出红球, 则被分至甲队, 否则被分至乙队.

(1)求 a, b, c 三人均被分至同一队的概率;

(2)记甲、乙两队的最终人数分别为 n_1, n_2 , 设随机变量 $X = |n_1 - n_2|$, 求 $E(X)$.

21. (12 分)

在平面直角坐标系中，已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的渐近线方程为 $x \pm 2y = 0$, A, B 分别是双曲线 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的标准方程;

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2}$$

(2) 设 P 是直线 $x = 1$ 上的动点，直线 PA, PB 分别与双曲线 C 交于不同于 A, B 的点 M, N ，过点 B 作直线 MN 的垂线，垂足为 D ，求当 AD 最大时点 P 的纵坐标.

22. (12 分)

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} - \min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ ，其中 $\max\{x, y\}$ 表示 x, y 中最大的数， $\min\{x, y\}$ 表示 x, y 中最小的数.

(1) 当 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

(3) 若 $a_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ ，是否存在正实数 M ，使得对任意的正整数 n ，都有 $a_n < M$ ？如果存在，写出一个满足条件的 M ；如果不存在，说明理由.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046055202025010104>