

# 2023-2024 学年广东省汕头市金中南区学校高三 5 月质量调研（一模）数学试题试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

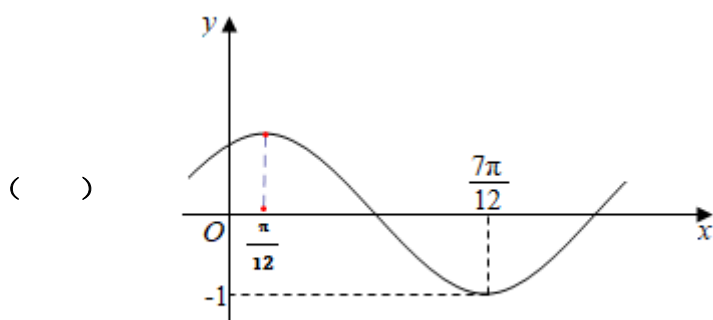
1. 已知复数  $(1 + i)(i + i)$  为纯虚数 ( $i$  为虚数单位)，则实数  $i = ( \quad )$

- A. -1                      B. 1                      C. 0                      D. 2

2. 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点，过点  $F_1$  作圆  $x^2 + y^2 = a^2$  的切线，与双曲线的左、右两支分别交于点  $P, Q$ ，若  $|QF_2| = |PQ|$ ，则双曲线渐近线的斜率为  $( \quad )$

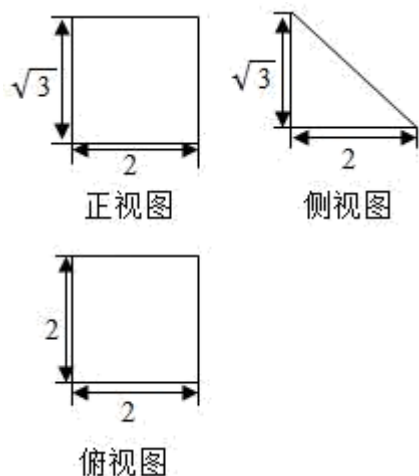
- A.  $\pm 1$                       B.  $\pm(\sqrt{3} - 1)$                       C.  $\pm(\sqrt{3} + 1)$                       D.  $\pm\sqrt{5}$

3. 函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$  的图象如图所示，为了得到  $g(x) = \cos \omega x$  的图象，可将  $f(x)$  的图象



- A. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位                      B. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位                      D. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位

4. 如图是一个几何体的三视图,则该几何体的体积为( )



- A.  $2\sqrt{3}$       B.  $4\sqrt{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

5. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，若  $a \cos B - b \cos A = \frac{c}{4}$ ，则  $\frac{a^2 - b^2}{2c^2} =$  ( )

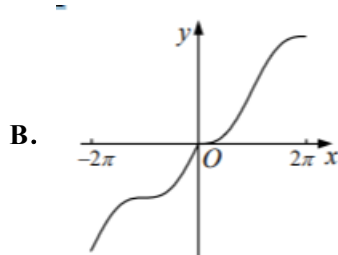
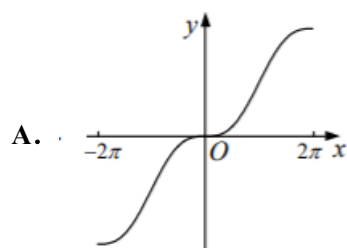
- A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{8}$

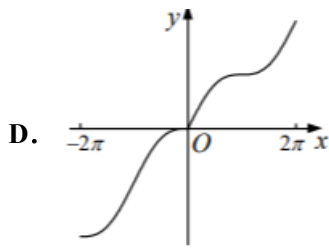
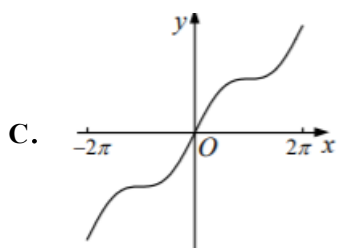
6. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化。如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“——”表示一个阳爻，“- - -”表示一个阴爻）若从八卦中任取两卦，这两卦的六个爻中恰有两个阳爻的概率为 ( )



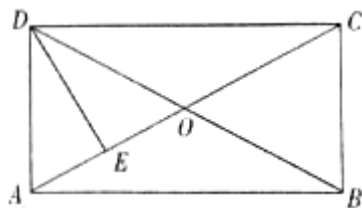
- A.  $\frac{3}{56}$       B.  $\frac{3}{28}$       C.  $\frac{3}{14}$       D.  $\frac{1}{4}$

7. 函数  $y = \sin|x| + x$  在  $x \in [-2\pi, 2\pi]$  上的大致图象是 ( )



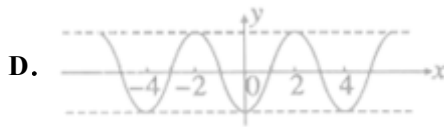
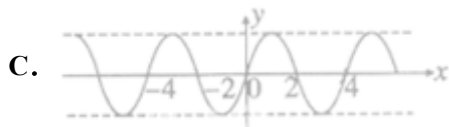
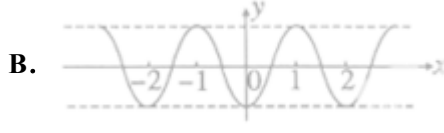
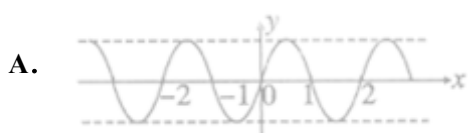


8. 如图所示, 矩形  $ABCD$  的对角线相交于点  $O$ ,  $E$  为  $AO$  的中点, 若  $\vec{DE} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD} (\lambda, \mu \in R)$ , 则  $\lambda + \mu$  等于 ( ).



- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C. 1      D. -1

9. 设函数  $f(x) (x \in R)$  满足  $f(-x) = f(x), f(x+2) = f(x)$ , 则  $y = f(x)$  的图像可能是

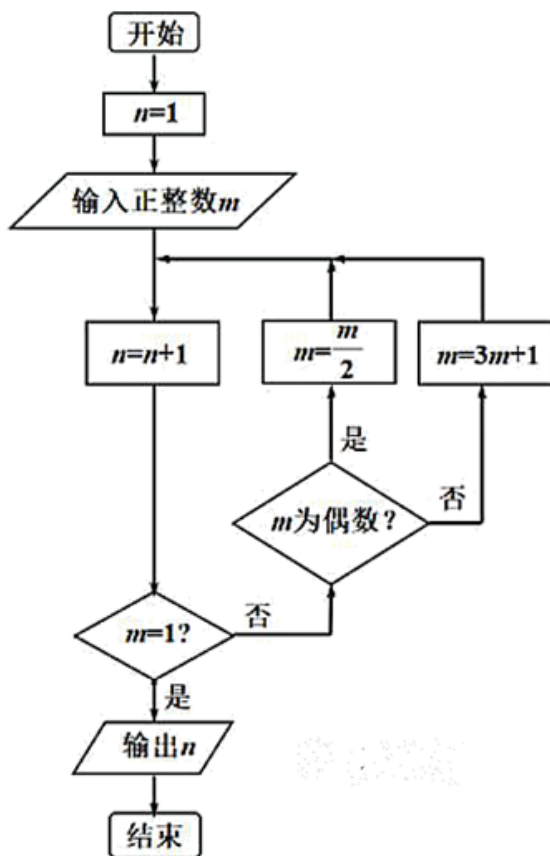


10. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  满足以下条件: ①双曲线  $E$  的右焦点与抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点  $F$  重合; ②

双曲线  $E$  与过点  $P(4, 2)$  的幂函数  $f(x) = x^\alpha$  的图象交于点  $Q$ , 且该幂函数在点  $Q$  处的切线过点  $F$  关于原点的对称点. 则双曲线的离心率是 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$       C.  $\frac{3}{2}$       D.  $\sqrt{5}+1$

11. 20 世纪产生了著名的“ $3x+1$ ”猜想: 任给一个正整数  $x$ , 如果  $x$  是偶数, 就将它减半; 如果  $x$  是奇数, 则将它乘 3 加 1, 不断重复这样的运算, 经过有限步后, 一定可以得到 1. 如图是验证“ $3x+1$ ”猜想的一个程序框图, 若输入正整数  $m$  的值为 40, 则输出的  $n$  的值是 ( )



- A. 8                      B. 9                      C. 10                      D. 11

12. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的实轴长为 2，离心率为 2， $F_1$ 、 $F_2$  分别为双曲线  $C$  的左、右焦点，点

$P$  在双曲线  $C$  上运动，若  $\triangle F_1PF_2$  为锐角三角形，则  $|PF_1| + |PF_2|$  的取值范围是 ( )

- A.  $(2\sqrt{7}, 8)$               B.  $(2\sqrt{5}, 7)$               C.  $(2\sqrt{5}, 8)$               D.  $(2\sqrt{7}, 7)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ y \leq 1 \end{cases}$ ，则  $z = 3x + y$  的最小值是\_\_\_\_\_。

14. 设  $f(x)$ ， $g(x)$  分别是定义在  $R$  上的奇函数和偶函数，且  $f(x) + g(x) = (x+1)^2 - 2^{x+1}$ ，则  $f(1) - g(1) =$ \_\_\_\_\_

15. 函数  $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + x - 1$  的值域为\_\_\_\_\_。

16.  $(x+1)^4$  的展开式中  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某景点上山共有 999 级台阶，寓意长长久久。甲上台阶时，可以一步走一个台阶，也可以一步走两个台阶，

若甲每步上一个台阶的概率为  $\frac{1}{3}$ ，每步上两个台阶的概率为  $\frac{2}{3}$ 。为了简便描述问题，我们约定，甲从 0 级台阶开始向

上走，一步走一个台阶记 1 分，一步走两个台阶记 2 分，记甲登上第  $n$  个台阶的概率为  $P_n$ ，其中  $n \in N^*$ ，且

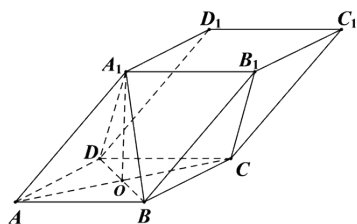
$$n \leq 998.$$

(1) 若甲走3步时所得分数为 $X$ ，求 $X$ 的分布列和数学期望；

(2) 证明：数列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是等比数列；

(3) 求甲在登山过程中，恰好登上第99级台阶的概率.

18. (12分) 在底面为菱形的四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AA_1 = 2, A_1B = A_1D, \angle BAD = 60^\circ, AC \cap BD = O, AO \perp$ 平面 $A_1BD$ .



(1) 证明： $B_1C \perp$ 平面 $A_1BD$ ；

(2) 求二面角 $B - AA_1 - D$ 的正弦值.

19. (12分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为整数，它们的前 $n$ 项和分别为 $S_n, T_n$ ，且 $b_1 = 2a_1 = 2$ ， $b_2S_3 = 54, a_2 + T_2 = 11$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $M_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n$ ；

(3) 是否存在正整数 $m$ ，使得 $\frac{S_m + T_{m+1}}{S_m + T_m}$ 恰好是数列 $\{a_n\}$ 或 $\{b_n\}$ 中的项？若存在，求出所有满足条件的 $m$ 的值；若不存在，说明理由.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3x+6}$ ， $g(x) = \sqrt{14-x}$ ，若存在实数 $x$ 使 $f(x) + g(x) > a$ 成立，求实数 $a$ 的取值范围.

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{3}{2})$ 且椭圆的左、右焦点与短轴的端点构成的四边形的面积为 $2\sqrt{3}$ .

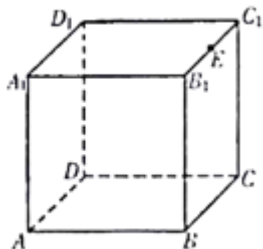
(1) 求椭圆 $C$ 的标准方程；

(2) 设 $A$ 是椭圆的左顶点，过右焦点 $F$ 的直线 $l_1$ ，与椭圆交于 $P, Q$ ，直线 $AP, AQ$ 与直线 $l_2: x = 4$ 交于 $M, N$ ，线段 $MN$ 的中点为 $E$ .

①求证： $EF \perp PQ$ ；

②记  $VPQE$ ， $\triangle PME$ ， $VONE$  的面积分别为  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ ，求证： $\frac{S_1}{S_2 + S_3}$  为定值.

22. (10 分) 如图，正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2， $E$  为棱  $B_1C_1$  的中点.



(1) 面出过点  $E$  且与直线  $A_1C$  垂直的平面，标出该平面与正方体各个面的交线（不必说明画法及理由）；

(2) 求  $BD_1$  与该平面所成角的正弦值.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

化简得到  $\square = \square - 1 + (\square + 1)\square$ ，根据纯虚数概念计算得到答案.

【详解】

$\square = (1 + \square)(\square + \square) = \square - 1 + (\square + 1)\square$  为纯虚数，故  $\square - 1 = 0$  且  $\square + 1 \neq 0$ ，即  $\square = 1$ .

故选： $\square$ .

【点睛】

本题考查了根据复数类型求参数，意在考查学生的计算能力.

2、C

【解析】

如图所示：切点为  $M$ ，连接  $OM$ ，作  $PN \perp x$  轴于  $N$ ，计算  $|PF_1| = 2a$ ， $|PF_2| = 4a$ ， $|PN| = \frac{2a^2}{c}$ ， $|F_1N| = \frac{2ab}{c}$ ，

根据勾股定理计算得到答案.

【详解】

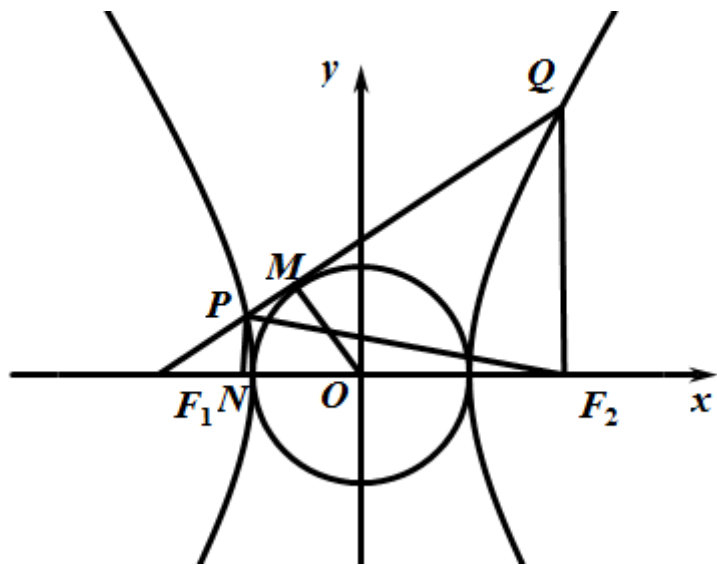
如图所示：切点为  $M$ ，连接  $OM$ ，作  $PN \perp x$  轴于  $N$ ，

$$|QF_1| - |QF_2| = |QP| + |PF_1| - |QF_2| = |PF_1| = 2a, \text{ 故 } |PF_2| = 4a,$$

$$\text{在 } Rt\triangle MOF_1 \text{ 中, } \sin \angle MF_1O = \frac{a}{c}, \text{ 故 } \cos \angle MF_1O = \frac{b}{c}, \text{ 故 } |PN| = \frac{2a^2}{c}, \quad |F_1N| = \frac{2ab}{c},$$

$$\text{根据勾股定理: } 16a^2 = \frac{4a^4}{c^2} + \left(2c - \frac{2ab}{c}\right)^2, \text{ 解得 } \frac{b}{a} = \sqrt{3} + 1.$$

故选：C.



【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线斜率，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

3、C

【解析】

根据正弦型函数的图象得到  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，结合图像变换知识得到答案.

【详解】

$$\text{由图象知: } \frac{T}{2} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi, \therefore \omega = 2.$$

$$\text{又 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时函数值最大,}$$

$$\text{所以 } 2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi. \text{ 又 } \varphi \in (0, \pi),$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, \text{ 从而 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \quad g(x) = \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right],$$

只需将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位即可得到  $g(x)$  的图象，

故选 C.

【点睛】

已知函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$  的图象求解析式

(1)  $|A| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}, B = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$ . (2) 由函数的周期  $T$  求  $\omega, T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

(3) 利用“五点法”中相对应的特殊点求  $\varphi$ ，一般用最高点或最低点求.

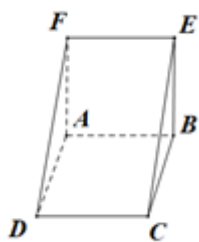
4、A

【解析】

根据三视图可得几何体为直三棱柱，根据三视图中的数据直接利用公式可求体积.

【详解】

由三视图可知几何体为直三棱柱，直观图如图所示：



其中，底面为直角三角形， $AD = 2$ ， $AE = \sqrt{3}$ ，高为  $AB = 2$ 。

$\therefore$  该几何体的体积为  $V = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

故选：A.

【点睛】

本题考查三视图及棱柱的体积，属于基础题.

5、D

【解析】

利用余弦定理角化边整理可得结果.

【详解】

由余弦定理得： $a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c}{4}$ ,

整理可得： $a^2 - b^2 = \frac{c^2}{4}$ ， $\therefore \frac{a^2 - b^2}{2c^2} = \frac{1}{8}$ .

故选：D.

**【点睛】**

本题考查余弦定理边角互化的应用，属于基础题.

6、C

**【解析】**

分类讨论，仅有一个阳爻的有坎、艮、震三卦，从中取两卦；从仅有两个阳爻的有巽、离、兑三卦中取一个，再取没有阳爻的坤卦，计算满足条件的种数，利用古典概型即得解.

**【详解】**

由图可知，仅有一个阳爻的有坎、艮、震三卦，从中取两卦满足条件，其种数是  $C_3^2 = 3$ ；

仅有两个阳爻的有巽、离、兑三卦，没有阳爻的是坤卦，此时取两卦满足条件的种数是  $C_3^1 = 3$ ，于是所求的概率

$$P = \frac{3+3}{C_8^2} = \frac{3}{14}.$$

故选：C

**【点睛】**

本题考查了古典概型的应用，考查了学生综合分析，分类讨论，数学运算的能力，属于基础题.

7、D

**【解析】**

讨论  $x$  的取值范围，然后对函数进行求导，利用导数的几何意义即可判断.

**【详解】**

当  $x \geq 0$  时， $y = \sin x + x$ ，则  $y' = \cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在  $[0, 2\pi]$  上单调递增，

令  $g(x) = \cos x + 1$ ，则  $g'(x) = -\sin x$ ，

根据三角函数的性质，

当  $x \in [0, \pi]$  时， $g'(x) = -\sin x < 0$ ，故切线的斜率变小，

当  $x \in [\pi, 2\pi]$  时， $g'(x) = -\sin x > 0$ ，故切线的斜率变大，可排除 A、B；

当  $x < 0$  时， $y = -\sin x + x$ ，则  $y' = -\cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在  $[-2\pi, 0]$  上单调递增，

令  $h(x) = -\cos x + 1$ ， $h'(x) = \sin x$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046112023040010232>