

深圳市高级中学 2024 届高三第三次诊断测试

数学试题

(满分 150 分, 考试时间 120 分钟) 2024 年 1 月

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集为 U , 集合 M, N 满足 $M \subseteq N \subseteq U$, 则下列运算结果一定为 U 的是 ()

- A. $M \cup N$ B. $(\complement_U N) \cup (\complement_U M)$ C. $M \cup (\complement_U N)$ D. $N \cup (\complement_U M)$

2. 若复数 $z = 2 - i$, 其中 i 是虚数单位, 则下列结论正确的是 ()

- A. z 的虚部为 i B. $|z| = 5$ C. $\bar{z} = -2 - i$ D. $z^2 = 3 - 4i$

3. 设 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是两个不共线的向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 - k\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, 若三点 A, B, D 共线, 则 k 的值为 ()

- A. -8 B. 8 C. 6 D. -6

4. 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{5}{8}$ C. 1 D. $\frac{9}{8}$

5. 甲、乙、丙等 5 名同学参加政史地三科知识竞赛, 每人随机选择一科参加竞赛, 则甲和乙不参加同一科, 甲和丙参加同一科竞赛, 且这三科竞赛都有人参加的概率为 ()

- A. $\frac{4}{81}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{10}{81}$ D. $\frac{4}{27}$

6. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 恒有 $f(x) \leq f(\pi)$, 且 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 则 ω 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$

7. 设 $a = 2\sqrt{e}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{e^2}{4 - \ln 4}, d = \frac{1}{2\ln 2}$ 则 ()

c. $|MN|=9$

D. $\triangle MON$ (点 O 为坐标原点) 的面积

为 6

11. 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 满足 $(a_n - 1)^2 = 4(100 - S_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$ 且

$a_1 > 0, a_n + a_{n-1} \neq 0 (n \geq 2)$, 则下列选项正确的是 ()

A. $a_n = -2n + 21$

B. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列

C. 当 $n = 11$ 时 S_n 有最大值

D. 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 则当 $n = 8$ 或 $n = 10$ 时数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和取最大值

12. 函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{ax}$ 有相同的最大值 b , 直线 $y = m$ 与两曲线 $y = f(x)$ 和

$y = g(x)$ 恰好有三个交点, 从左到右三个交点横坐标依次为 x_1, x_2, x_3 , 则下列说法正确的

是 ()

A. $a = 1$ B. $b = \frac{1}{e}$ C. $x_1 + x_3 = 2x_2$ D.

$x_1 x_3 = x_2^2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\left(\frac{1}{x} + my\right)(2x - y)^5$ 的展开式中. $x^2 y^4$ 的系数为 80, 则 m 的值为_____.

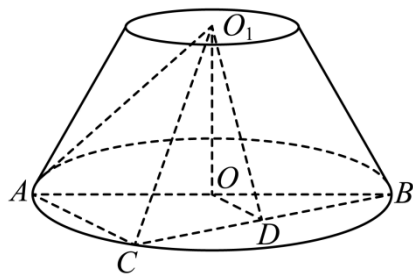
14. 过原点的直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左、右两支分别交于 M, N 两点,

$F(2, 0)$ 为 C 的右焦点, 若 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 且 $|\overrightarrow{FM}| + |\overrightarrow{FN}| = 2\sqrt{5}$, 则双曲线 C 的方程为

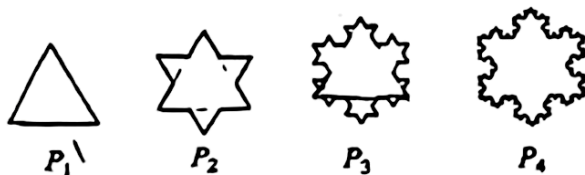
_____.

15. 如图, 在圆台 OO_1 中, $OO_1 = \sqrt{3}$, 点 C 是底面圆周上异于 A, B 的一点, $AC = 2$,

点 D 是 BC 的中点, l 为平面 O_1AC 与平面 O_1OD 的交线, 则交线 l 与平面 O_1BC 所成角的大小为_____.



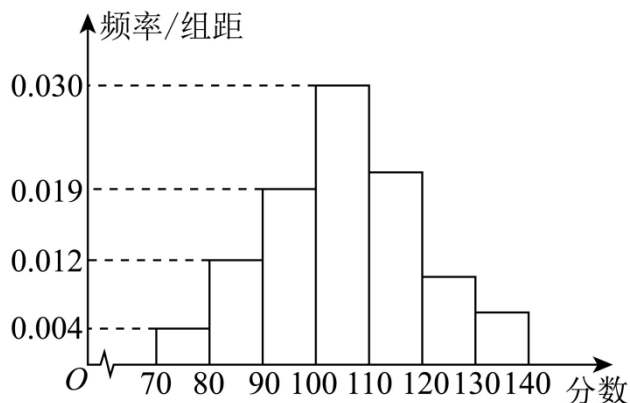
16. 第二十四届北京冬奥会开幕式上由 96 片小雪花组成的大雪花惊艳了全世界，数学中也有一朵英丽的雪花——“科赫雪花”。它的绘制规则是：任意画一个正三角形 P_1 ，并把每一条边三等分，以三等分后的每边的中间一段为边向外作正三角形，并把这“中间一段”擦掉，形成雪花曲线 P_2 ，重复上述两步，画出更小的三角形，一直重复，直到无穷，形成雪花曲线 $P_3, P_4, \dots, P_n \dots$



设雪花曲线 P_n 周长为 l_n ，面积为 S_n ，若 P_1 的边长为 1，则 $l_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 为了响应教育部门疫情期间“停课不停学”的号召，某校实施网络授课，为了检验学生上网课的效果，在高三年级进行了一次网络模拟考试，从中抽取了 100 人的数学成绩，绘制成频率分布直方图（如下图所示），其中数学成绩落在区间 $[110, 120)$ ， $[120, 130)$ ， $[130, 140]$ 的频率之比为 4: 2: 1.



(1) 根据频率分布直方图求学生成绩在区间 $[110, 120)$ 的频率，并求抽取的这 100 名同学数学成绩的中位数

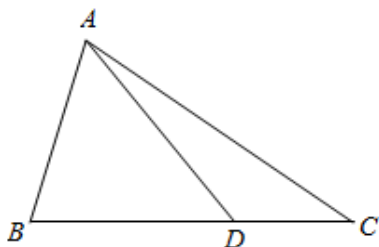
(2) 若将频率视为概率, 从全校高三年级学生中随机抽取 3 个人, 记抽取的 3 人成绩在 [100, 130) 内的学生人数为 X , 求 X 的分布列与数学期望.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+2} - n^2 + 2n + 1$.

(1) 求证: $\left\{\frac{a_n - n^2}{2^n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_n = \left[\frac{a_n}{2^n}\right]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 求使得 $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq 100$ 成立的最大整数 n 的值.

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $3a \cos B - b \cos C = c \cos B$, 点 D 在线段 BC 上.



(1) 若 $\angle ADC = \frac{3\pi}{4}$, 求 AD 的长;

(2) 若 $BD = 2DC$, $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 求 $\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD}$ 的值.

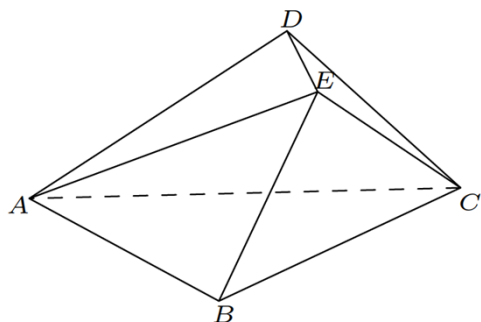
20. 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 长轴长为短轴长的 2 倍,

点 P 在 C 上运动, 且 $\triangle ABP$ 面积的最大值为 8.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 l 经过点 $Q(1, 0)$, 交 C 于 M, N 两点, 直线 AM, BN 分别交直线 $x = 4$ 于 D, E 两点, 试问 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 说明理由.

21. 如图, 在几何体 $ABCDE$ 中, 底面 ABC 为以 AC 为斜边的等腰直角三角形. 已知平面 $ABC \perp$ 平面 ACD , 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCE, DE \parallel$ 平面 $ABC, AD \perp DE$.



(1) 证明: $DE \perp$ 平面 ACD ;

(2) 若 $AC = 2CD = 2$, 设 M 为棱 BE 的中点, 求当几何体 $ABCDE$ 的体积取最大值时 AM 与 CD 所成角的正切值.

22. 已知函数 $f(x) = ax \ln x - x^2 + (3-a)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

①求 a 的取值范围;

②当 $\frac{x_2}{x_1}$ 取得最小时, 求 a 的值.

深圳市高级中学 2024 届高三第三次诊断测试

数学试题

(满分 150 分, 考试时间 120 分钟) 2024 年 1 月

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集为 U , 集合 M, N 满足 $M \subseteq N \subseteq U$, 则下列运算结果一定为 U 的是 ()

- A. $M \cup N$ B. $(\complement_U N) \cup (\complement_U M)$ C. $M \cup (\complement_U N)$ D. $N \cup (\complement_U M)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据集合间的基本关系及集合的基本运算, 借助 Venn 图即可求解.

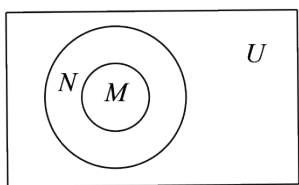
【详解】 由 $M \subseteq N \subseteq U$ 得当 $N \cap U$ 时, $M \cup N = N \cap U$, 故选项 A 不正确;

$(\complement_U N) \cup (\complement_U M) = \complement_U (M \cap N) = \complement_U M$, 当 $M \neq \emptyset$ 时, $\complement_U M \neq U$, 故选项 B 不正确;

当 $M \cap N$ 时, $M \cup (\complement_U N) \neq U$, 故选项 C 不正确;

因为 $M \subseteq N \subseteq U$, 所以 $N \cup (\complement_U M) = U$, 故选项 D 正确.

故选: D.



2. 若复数 $z = 2 - i$, 其中 i 是虚数单位, 则下列结论正确的是 ()

- A. z 的虚部为 i B. $|z| = 5$ C. $\bar{z} = -2 - i$ D. $z^2 = 3 - 4i$

【答案】 D

【解析】

【分析】 $z = 2 - i$

$$\text{所以 } \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \frac{1}{8} = \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) - 1 = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{7}{8},$$

$$\text{故 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 1.$$

故选：C

5. 甲、乙、丙等 5 名同学参加政史地三科知识竞赛，每人随机选择一科参加竞赛，则甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，且这三科竞赛都有人参加的概率为（ ）

- A. $\frac{4}{81}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{10}{81}$ D. $\frac{4}{27}$

【答案】C

【解析】

【分析】由排列组合知识结合概率公式即可得解.

【详解】因为甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，若每个同学可以自由选择，所以 3 科的选择数有 2, 2, 1 和 3, 1, 1 两种分配方案，

当分配方案为 2, 2, 1 时，共有 $C_3^2 A_3^3 = 18$ 种不同的选择方案；

当分配方案为 3, 1, 1 时，共有 $C_2^1 A_3^3 = 12$ 种不同的选择方案；

所以满足要求的不同选择种数为 $18 + 12 = 30$ ；

所以甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，且这三科竞赛都有人参加的概率为

$$\frac{30}{3^5} = \frac{10}{81}.$$

故选：C.

6. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 恒有 $f(x) \leq f(\pi)$ ，且 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 ω 的

值为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正弦函数的图象性质，利用周期性和单调性以及最值求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 恒有 $f(x) \leq f(\pi)$,

所以 $\omega\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\omega = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$,

又因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 所以 $\omega > 0$,

且 $\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$, 所以 $0 < \omega \leq 3$,

结合 $\omega = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ 可得 ω 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$,

经检验, 当 ω 的值为 $\frac{1}{3}$ 时,

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $-2\pi + 6k\pi \leq x \leq \pi + 6k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2\pi, \pi]$ 上单调递增, 满足题意,

当 ω 的值为 $\frac{7}{3}$ 时,

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{7}{3}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $-\frac{2\pi}{7} + \frac{6}{7}k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{7} + \frac{6}{7}k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right]$ 上单调递增, 不满足题意,

故选:A.

7. 设 $a = 2\sqrt{e}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{e^2}{4 - \ln 4}, d = \frac{1}{2\ln 2}$ 则 ()

A. $c < d < a < b$

B. $d < b < a < c$

C. $d < b < c < a$

D. $d < c < b < a$

【答案】D

【解析】

【分析】构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 利用导数研究其单调性判定大小即可.

【详解】令 $f(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 0, x \neq 1)$,

$$\text{则 } a = \frac{\sqrt{e}}{\frac{1}{2}} = f(\sqrt{e}), b = \frac{2}{\ln 2} = f(2), c = \frac{e^2}{4 - \ln 4} = \frac{\frac{e^2}{2}}{\ln \frac{e^2}{2}} = f\left(\frac{e^2}{2}\right),$$

易知 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 显然 $x \in (0, 1)$ 和 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, e)$

上单调递减, $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{易知 } 1 < \sqrt{e} < \sqrt{4} = 2 < e < \frac{e^2}{2} < 4, \text{ 且 } f(2) = \frac{2}{\ln 2} = f(4) = \frac{4}{\ln 4},$$

$$\text{所以 } f(\sqrt{e}) > f(2) = f(4) > f\left(\frac{e^2}{2}\right) \Rightarrow a > b > c,$$

$$\text{又 } e^2 - 4 > 0 > -\ln 4 \Rightarrow e^2 > 4 - \ln 4 > 0 \Rightarrow c > 1,$$

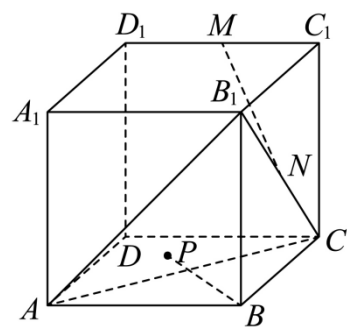
$$\sqrt{e} < 2 \Rightarrow 1 > \ln 2 > \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2 \ln 2} < 1, \text{ 所以 } c > d.$$

故选: D

8. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3, 点 P 是平面 ACB_1 内的动点, M, N 分别为

C_1D_1, B_1C 的中点, 若直线 BP 与 MN 所成的角为 θ , 且 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则动点 P 的轨迹所

围成的图形的面积为 ()



A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】连接 BD_1, BC_1 , 得到 $MN \parallel BD_1$, 把 BP 与 MN 所成的角就是直线 BP 与 BD_1 所成的角, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 证得 $BD_1 \perp$ 平面 ACB_1 , 得到 $\angle PBD_1 = \theta$, 设 BD_1

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{20}$ ，下列说法正确的是（ ）

- A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_{16}
- B. 去掉样本的一个数据，样本数据的极差可能不变
- C. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称，且在左边“拖尾”，则样本数据的平均数小于中位数
- D. 样本数据的方差 $s^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 16$ ，则这组样本数据的总和等于 80

【答案】BCD

【解析】

【分析】由百分位数的定义即可判断 A；由极差的定义即可判断 B，由频率分布直方图中中位数、平均数的求法画出图形即可判断；由方程计算公式即可判断 D.

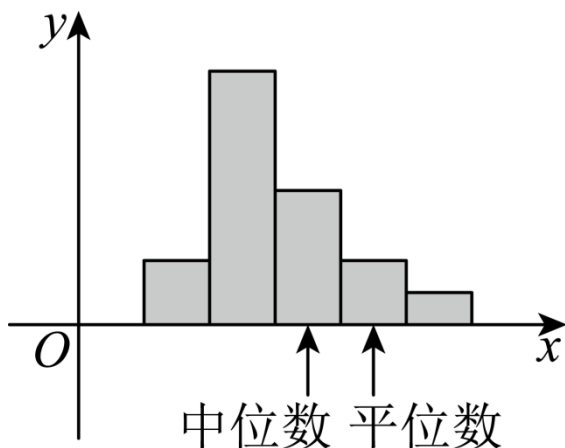
【详解】对于 A，由 $20 \times 80\% = 16$ ，所以样本数据的第 80 百分位数为 $\frac{x_{16} + x_{17}}{2}$ ，故 A 错误；

对于 B，由题意存在这样一种可能，若 $x_1 = x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{20}$ ，则极差为

$$\frac{x_{20} - x_1}{2} = \frac{x_{20} - x_2}{2}$$

，此时样本数据的极差不变，故 B 正确；

对于 C，数据的频率分布直方图为单峰不对称，向右边“拖尾”，大致如下图，



由于“右拖”时最高峰偏左，中位数靠近高峰处，平均数靠近中点处，此时平均数大于中位数，同理，向“左拖”时最高峰偏右，那么平均数小于中位数，故 C 正确；

对于 D，由 $s^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 16 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2$ ，

$$\text{则 } \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 320 = \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{20} x_i + 20\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20\bar{x}^2,$$

所以 $\bar{x} = 4$ ，故这组样本数据的总和为 $20\bar{x} = 80$ ，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，直线 l 过点 F 且与抛物线 C 交于 $M(x_1, y_1)$ ，

$N(x_2, y_2)$ 两点，其中 $y_1 > 0$ ，且 $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{1}{2}$ ，则 ()

A. 直线 l 的斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $x_1 x_2 = 4$

C. $|MN| = 9$

D. $\triangle MON$ (点 O 为坐标原点) 的面积

为 6

【答案】BC

【解析】

【分析】设 l 方程为 $x = my + 2 (m \neq 0)$ ，与抛物线方程联立结合韦达定理可得

$$y_1 + y_2 = 8m, \quad y_1 y_2 = -16, \quad \text{又如图可得 } \frac{y_1}{-y_2} = \frac{1}{2}, \quad \text{据此可得则 } y_1 = 2\sqrt{2}, \quad y_2 = -4\sqrt{2}.$$

据此可判断 AB 选项正误；

C 选项，由抛物线定义可得 $|MN| = x_1 + x_2 + p$ ；

D 选项，由图可得 $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |OF| (|MA| + |NB|) = \frac{1}{2} \times 2 \times (y_1 - y_2)$.

【详解】因为 $y_1 > 0$ ，所以点 M 在第一象限，显然直线 l 不与 x 轴垂直，设直线：

$$x = my + 2 (m \neq 0), \quad \text{联立 } \begin{cases} y^2 = 8x \\ x = my + 2 \end{cases}, \quad \text{可得 } y^2 - 8my - 16 = 0, \quad \text{由韦达定理可得：}$$

$y_1 + y_2 = 8m, \quad y_1 y_2 = -16$. 做 MA, NB 垂直于 x 轴，则 $\triangle MAF \sim \triangle NBF$ ，

$$\text{得 } \frac{|MF|}{|NF|} = \frac{|MA|}{|NB|} = \frac{y_1}{-y_2} = \frac{1}{2} \frac{y_1}{-y_2} = \frac{1}{2}, \quad \text{则 } y_1 = 2\sqrt{2}, \quad y_2 = -4\sqrt{2}.$$

A 选项， $y_1 + y_2 = 8m = -2\sqrt{2} \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，则直线斜率为 $\frac{1}{m} = -2\sqrt{2}$ ，故 A 错误；

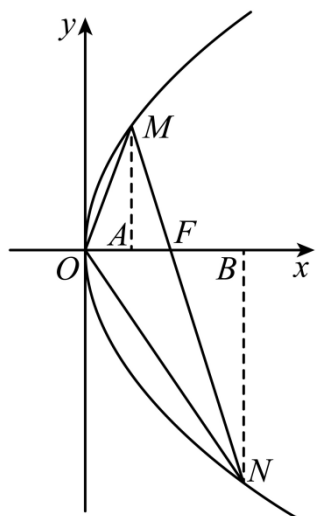
B 选项, 因 $y_1^2 = 8x_1$, $y_2^2 = 8x_2$, 则 $x_1x_2 = \frac{y_1^2}{8} \cdot \frac{y_2^2}{8} = 4$, 故 B 正确;

C 选项, 由抛物线定义, $|MN| = |MF| + |NF| = x_1 + x_2 + 4$,

又 $x = my + 2$, 则 $x_1 + x_2 + 4 = m(y_1 + y_2) + 8 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (-2\sqrt{2}) + 8 = 9$, 故 C 正确;

D 选项, 由图有 $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2}|OF|(|MA| + |NB|) = \frac{1}{2} \times 2 \times (y_1 - y_2) = 6\sqrt{2}$, 故 D 错误.

故选: BC.



11. 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 满足 $(a_n - 1)^2 = 4(100 - S_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ 且

$a_1 > 0, a_n + a_{n-1} \neq 0 (n \geq 2)$, 则下列选项正确的是 ()

A. $a_n = -2n + 21$

B. 数列 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 为等差数列

C. 当 $n = 11$ 时 S_n 有最大值

D. 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 则当 $n = 8$ 或 $n = 10$ 时数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和取最大值

【答案】 ABD

【解析】

【分析】 A 选项, 根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 求出 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 -2 , 首项为

$a_1 = 19$ ，得到通项公式；B 选项，计算出 $S_n = -n^2 + 20n$ ，得到 $\frac{S_n}{n} = -n + 20$ ，从而得到 $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = -1$ ，得到 B 正确；C 选项，根据 $S_n = -n^2 + 20n$ 及二次函数的最值得到 C 错误；

D 选项，先得到 $n \in [1, 8]$ 时， $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2} > 0$ ， $b_9 < 0$ ， $b_{10} > 0$ ，当 $n \geq 11$ 时，

$b_n < 0$ ，且 $b_9 = -3, b_{10} = 3$ ，得到结论.

【详解】A 选项，当 $n = 1$ 时， $(a_1 - 1)^2 = 4(100 - a_1)$ ，

又 $a_1 > 0$ ，解得 $a_1 = 19$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $(a_n - 1)^2 = 4(100 - S_n)$ ①，

$(a_{n-1} - 1)^2 = 4(100 - S_{n-1})$ ②，①-②得，

$(a_n - 1)^2 - (a_{n-1} - 1)^2 = 4(100 - S_n) - 4(100 - S_{n-1})$ ，

即 $a_n^2 + 2a_n - a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} = 0$ ，故 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} + 2) = 0$ ，

因为 $a_n + a_{n-1} \neq 0$ ，

故 $a_n - a_{n-1} + 2 = 0$ ，

所以 $a_n - a_{n-1} = -2$ ，

故 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 -2 ，首项为 $a_1 = 19$ ，

所以通项公式为 $a_n = 19 - 2(n-1) = -2n + 21$ ，A 正确；

B 选项， $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(19 + 21 - 2n)}{2} = -n^2 + 20n$ ，

故 $\frac{S_n}{n} = -n + 20$ ，则当 $n \geq 2$ 时， $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = -n + 20 - (-n + 21) = -1$ ，

故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，B 正确；

C 选项， $S_n = -n^2 + 20n = -(n-10)^2 + 100$ ，

故当 $n = 10$ 时， S_n 取得最大值，C 错误；

D 选项，令 $a_n > 0$ 得 $1 \leq n \leq 10$ ，令 $a_n < 0$ 得 $n \geq 11$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046213004141010100>