

林芝 2024 年高三（最后冲刺）数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$ ，当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < 0$ 。若 $f(4) = 2$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为（ ）

- A. 4 B. 6 C. 3 D. 8

2. 2019 年 10 月 1 日，中华人民共和国成立 70 周年，举国同庆。将 2,0,1,9,10 这 5 个数字按照任意次序排成一行，拼成一个 6 位数，则产生的不同的 6 位数的个数为

- A. 96 B. 84 C. 120 D. 360

3. 若复数 z 满足 $(1+i)z = |3+4i|$ ，则 z 对应的点位于复平面的（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x, & x \geq 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, & x < 2 \end{cases}$ ，满足对任意的实数 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立，则实数 a 的取值范围

围为（ ）

- A. $(1, +\infty)$ B. $\left(-\infty, \frac{13}{8}\right]$ C. $\left(-\infty, \frac{13}{8}\right)$ D. $\left(\frac{13}{8}, +\infty\right)$

5. 已知函数 $f(x) = (2a+2)\ln x + 2ax^2 + 5$ 。设 $a < -1$ ，若对任意不相等的正数 x_1, x_2 ，恒有 $\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \geq 8$ ，

则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-3, -1)$ B. $(-2, -1)$
C. $(-\infty, -3]$ D. $(-\infty, -2]$

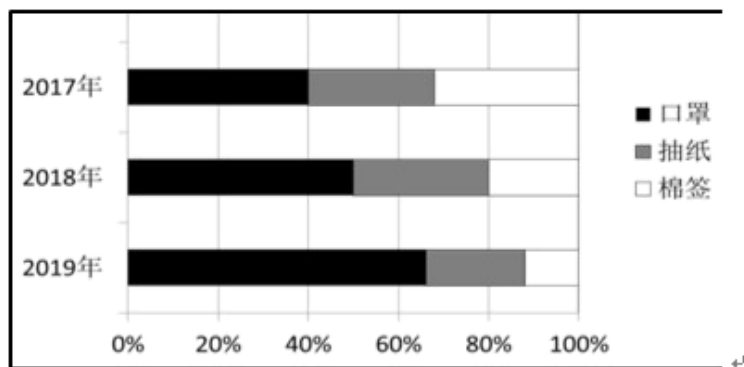
6. “ $\tan \theta = 2$ ”是“ $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

7. 若各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 3a_1 + 2a_2$ ，则公比 $q =$ （ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 某工厂只生产口罩、抽纸和棉签，如图是该工厂 2017 年至 2019 年各产量的百分比堆积图（例如：2017 年该工厂口罩、抽纸、棉签产量分别占 40%、27%、33%），根据该图，以下结论一定正确的是（ ）



- A. 2019 年该工厂的棉签产量最少
- B. 这三年中每年抽纸的产量相差不明显
- C. 三年累计下来产量最多的是口罩
- D. 口罩的产量逐年增加

9. 已知 $p: |x+1| > 2$ ， $q: x > a$ ，且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $a \leq 1$
- B. $a \leq -3$
- C. $a \geq -1$
- D. $a \geq 1$

10. 集合 $A = \{-2, -1, 1\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $M = \{x | x = a + b, b \in B, x \in A\}$, 则集合 M 的真子集的个数是

- A. 1 个
- B. 3 个
- C. 4 个
- D. 7 个

11. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 的直线与抛物线交于 A 、 B 两点，且 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ ，抛物线的准线 l 与 x 轴交于 C ， $\triangle ACF$ 的面积为 $8\sqrt{2}$ ，则 $|AB| =$ （ ）

- A. 6
- B. 9
- C. $9\sqrt{2}$
- D. $6\sqrt{2}$

12. 将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官，每个乡镇至少一名，则不同的分配方案种数是（ ）

- A. 18 种
- B. 36 种
- C. 54 种
- D. 72 种

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

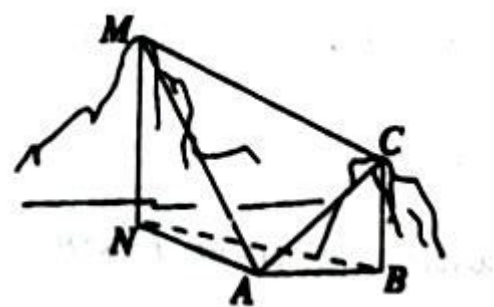
13. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \leq 4 \\ ax + by + c \leq 0 \end{cases}$ 且目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为 7，最小值为 1，则 $\frac{a+b+c}{a} =$ _____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $m =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{(e^x - ax)(e^x - \ln x)}{\ln x - ax}$ ，若在定义域内恒有 $f(x) < 0$ ，则实数 a 的取值范围是_____.

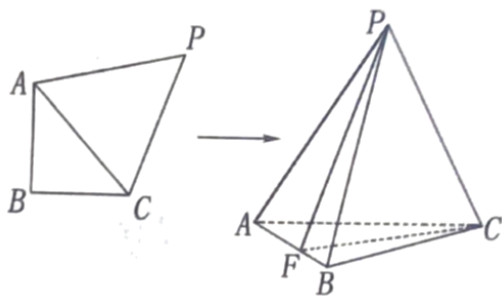
16. 如图，为测量山高 MN ，选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点，从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 60^\circ$ ， C

点的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$ 以及 $\angle MAC = 75^\circ$ ；从 C 点测得 $\angle MCA = 60^\circ$ ．已知山高 $BC = 100m$ ，则山高 $MN = \underline{\hspace{2cm}} m$ ．



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在四边形 $ABCP$ 中， $AB = BC = \sqrt{2}$ ， $\angle P = \frac{\pi}{3}$ ， $PA = PC = 2$ ；如图，将 $\triangle PAC$ 沿 AC 边折起，连结 PB ，使 $PB = PA$ ，求证：



- (1) 平面 $ABC \perp$ 平面 PAC ；
- (2) 若 F 为棱 AB 上一点，且 AP 与平面 PCF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，求二面角 $F - PC - A$ 的大小.

18. (12 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\cos 2C = -\frac{3}{4}$.

- (1) 求 $\sin C$ 的值；
- (2) 当 $c = 2a$ ，且 $b = 3\sqrt{7}$ 时，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，向量 $\vec{m} = (1, 2)$ ， $\vec{n} = \left(\cos 2A, \cos^2 \frac{A}{2}\right)$ ，且 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 1$.

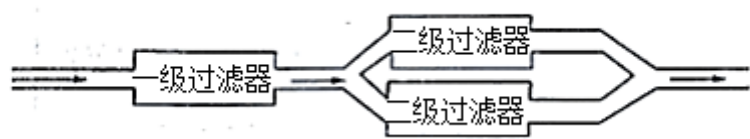
- (1) 求角 A 的大小；
- (2) 若 $b + c = 2a = 2\sqrt{3}$ ，求 $\sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha$

为参数). 以平面直角坐标系的原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = \sqrt{3}$.

- (1) 求曲线 C_1 的极坐标方程;
- (2) 设 C_1 和 C_2 交点的交点为 A, B , 求 $\triangle AOB$ 的面积.

21. (12 分) 某客户准备在家中安装一套净水系统, 该系统为二级过滤, 使用寿命为十年如图所示两个二级过滤器采用并联安装, 再与一级过滤器串联安装.

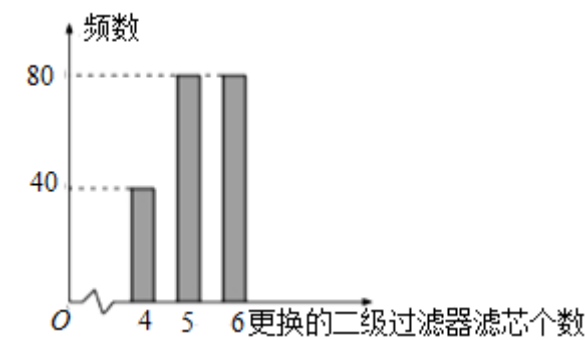


其中每一级过滤都由核心部件滤芯来实现在使用过程中, 一级滤芯和二级滤芯都需要不定期更换 (每个滤芯是否需要更换相互独立). 若客户在安装净水系统的同时购买滤芯, 则一级滤芯每个 160 元, 二级滤芯每个 80 元. 若客户在使用过程中单独购买滤芯则一级滤芯每个 400 元, 二级滤芯每个 200 元. 现需决策安装净水系统的同时购买滤芯的数量, 为此参考了根据 100 套该款净水系统在十年使用期内更换滤芯的相关数据制成的图表, 其中表 1 是根据 100 个一级过滤器更换的滤芯个数制成的频数分布表, 图 2 是根据 200 个二级过滤器更换的滤芯个数制成的条形图.

表 1: 一级滤芯更换频数分布表

一级滤芯更换的个数	8	9
频数	60	40

图 2: 二级滤芯更换频数条形图



以 100 个一级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个一级过滤器更换滤芯发生的概率, 以 200 个二级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个二级过滤器更换滤芯发生的概率.

- (1) 求一套净水系统在使用期内需要更换的各级滤芯总个数恰好为 16 的概率;
- (2) 记 X 表示该客户的净水系统在使用期内需要更换的二级滤芯总数, 求 X 的分布列及数学期望;

(3) 记 m, n 分别表示该客户在安装净水系统的同时购买的一级滤芯和二级滤芯的个数. 若 $m + n = 19$, 且 $m \in \{8, 9\}$

，以该客户的净水系统在使用期内购买各级滤芯所需总费用的期望值为决策依据，试确定 m, n 的值.

22. (10 分) 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，点 P 在 x 轴上， O 为坐标原点，且满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OF}$ ，经

过点 P 且垂直于 x 轴的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点，且 $|AB| = 8$.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点，若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -64$ ，求点 F 到直线 l 的最大距离.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据所给函数解析式满足的等量关系及指数幂运算，可得 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$ ；利用定义可证明函数 $f(x)$ 的单调

性，由赋值法即可求得函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值.

【详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $2^{f\left(\frac{m}{n}\right)} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$ ，

则 $f\left(\frac{m}{n}\right) + f(n) = f(m)$ ；

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ ，

故 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$ ，

令 $m = x_1$ ， $n = x_2$ ，则 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + f(x_2) = f(x_1)$ ，

即 $f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) < 0$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } f(x)_{\max} = f(16),$$

$$\text{令 } m = 16, \quad n = 4,$$

$$\text{故 } f(4) + f(4) = f(16) = 4,$$

故函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 4.

故选: A.

【点睛】

本题考查了指数幂的运算及化简, 利用定义证明抽象函数的单调性, 赋值法在抽象函数求值中的应用, 属于中档题.

2、B

【解析】

2,0,1,9,10 按照任意次序排成一行, 得所有不以 0 开头的排列数共 $4A_4^4 = 96$ 个, 其中含有 2 个 10 的排列数共 $A_4^2 = 12$ 个,

所以产生的不同的 6 位数的个数为 $96 - 12 = 84$. 故选 B.

3、D

【解析】

利用复数模的计算、复数的除法化简复数 z , 再根据复数的几何意义, 即可得答案;

【详解】

$$\text{Q } (1+i)z = |3+4i| = 5 \Rightarrow z = \frac{5}{1+i} = \frac{5(1-i)}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i,$$

$$\therefore z \text{ 对应的点 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right),$$

$\therefore z$ 对应的点位于复平面的第四象限.

故选: D.

【点睛】

本题考查复数模的计算、复数的除法、复数的几何意义, 考查运算求解能力, 属于基础题.

4、B

【解析】

由题意可知函数 $y = f(x)$ 为 R 上为减函数, 可知函数 $y = (a-2)x$ 为减函数, 且 $2(a-2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$, 由此可解得实

数 a 的取值范围.

【详解】

由题意知函数 $y=f(x)$ 是 R 上的减函数, 于是有
$$\begin{cases} a-2 < 0 \\ 2(a-2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a \leq \frac{13}{8},$$

因此, 实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{13}{8}\right]$.

故选: B.

【点睛】

本题考查利用分段函数的单调性求参数, 一般要分析每支函数的单调性, 同时还要考虑分段点处函数值的大小关系, 考查运算求解能力, 属于中等题.

5、D

【解析】

求解 $f(x)$ 的导函数, 研究其单调性, 对任意不相等的正数 x_1, x_2 , 构造新函数, 讨论其单调性即可求解.

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2a+2}{x} + 4ax = \frac{2(2ax^2 + a+1)}{x}$,

当 $a < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减;

不妨设 $x_1 < x_2$, 而 $a < -1$, 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

从而对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 恒有 $\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \geq 8$,

即 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 8|x_1 - x_2|$,

$f(x_1) - f(x_2) \geq 8(x_2 - x_1)$, $f(x_1) + 8x_1 \geq f(x_2) + 8x_2$,

令 $g(x) = f(x) + 8x$, 则 $g'(x) = \frac{2a+2}{x} + 4ax + 8$, 原不等式等价于 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 即

$\frac{a+1}{x} + 2ax + 4 \leq 0$,

从而 $a \leq \frac{-4x-1}{2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{2x^2+1} - 2$, 因为 $\frac{(2x-1)^2}{2x^2+1} - 2 \geq -2$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$

故选: D.

【点睛】

此题考查含参函数研究单调性问题，根据参数范围化简后构造新函数转换为含参恒成立问题，属于一般性题目.

6、A

【解析】

首先利用二倍角正切公式由 $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ，求出 $\tan \theta$ ，再根据充分条件、必要条件的定义判断即可；

【详解】

解：∵ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}$ ，∴ 可解得 $\tan \theta = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$ ，

∴ “ $\tan \theta = 2$ ”是“ $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ”的充分不必要条件.

故选：A

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，二倍角正切公式的应用是解决本题的关键，属于基础题.

7、C

【解析】

由正项等比数列满足 $a_3 = 3a_1 + 2a_2$ ，即 $a_1 q^2 = 3a_1 + 2a_1 q$ ，又 $a_1 \neq 0$ ，即 $q^2 - 2q - 3 = 0$ ，运算即可得解.

【详解】

解：因为 $a_3 = 3a_1 + 2a_2$ ，所以 $a_1 q^2 = 3a_1 + 2a_1 q$ ，又 $a_1 \neq 0$ ，所以 $q^2 - 2q - 3 = 0$ ，

又 $q > 0$ ，解得 $q = 3$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了等比数列基本量的求法，属基础题.

8、C

【解析】

根据该厂每年产量未知可判断 A、B、D 选项的正误，根据每年口罩在该厂的产量中所占的比重最大可判断 C 选项的正误.综合可得出结论.

【详解】

由于该工厂 2017 年至 2019 年的产量未知，所以，从 2017 年至 2019 年棉签产量、抽纸产量以及口罩产量的变化无法比较，故 A、B、D 选项错误；

由堆积图可知，从 2017 年至 2019 年，该工厂生产的口罩占该工厂的总产量的比重是最大的，则三年累计下来产量最多的是口罩，C 选项正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查堆积图的应用，考查数据处理能力，属于基础题.

9、D

【解析】

“ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件”等价于“ q 是 p 的充分不必要条件”，即 q 中变量取值的集合是 p 中变量取值集合的真子集.

【详解】

由题意知： $p:|x+1|>2$ 可化简为 $\{x|x<-3 \text{ 或 } x>1\}$ ， $q:x>a$ ，

所以 q 中变量取值的集合是 p 中变量取值集合的真子集，所以 $a \geq 1$.

【点睛】

利用原命题与其逆否命题的等价性，对 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件进行命题转换，使问题易于求解.

10、B

【解析】

由题意，结合集合 A, B ，求得集合 M ，得到集合 M 中元素的个数，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，集合 $A = \{-2, -1, 1\}, B = \{4, 6, 8\}$ ， $x \in A$ ，

则 $M = \{x|x = a + b, x \in A, b \in B, x \in B\} = \{4, 6\}$ ，

所以集合 M 的真子集的个数为 $2^2 - 1 = 3$ 个，故选 B.

【点睛】

本题主要考查了集合的运算和集合中真子集的个数个数的求解，其中作出集合的运算，得到集合 M ，再由真子集个数的公式 $2^n - 1$ 作出计算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力.

11、B

【解析】

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，并设直线 AB 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$ ，由 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ 得 $y_1 = -2y_2$ ，将直线 AB 的方程代

入韦达定理，求得 $|y_1|$ ，结合 $\triangle ACF$ 的面积求得 p 的值，结合焦点弦长公式可求得 $|AB|$ 。

【详解】

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，并设直线 AB 的方程为 $x = my + p$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046214142005010142>