

# 湖北省襄州区四校 2023 年高三下学期期末教学质量检测试题（一模）数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线  $l: y = 2x + 10$  过双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一个焦点且与其中一条渐近线平行，则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$       B.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$       C.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$       D.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2. 已知  $a > b > 0$ ，椭圆  $C_1$  的方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，双曲线  $C_2$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， $C_1$  和  $C_2$  的离心率之积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则

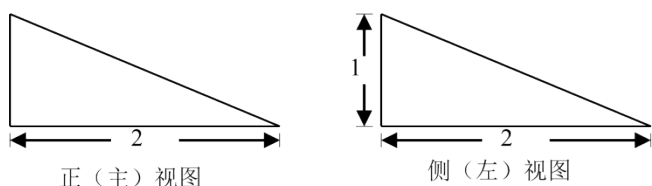
$C_2$  的渐近线方程为 ( )

- A.  $x \pm \sqrt{2}y = 0$       B.  $\sqrt{2}x \pm y = 0$       C.  $x \pm 2y = 0$       D.  $2x \pm y = 0$

3. 若函数  $f(x) = \sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到函数  $g(x)$  的图象，若函数  $g(x)$  在区间  $[0, a]$  上单调递增，则  $a$  的最大值为 ( )。

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{5\pi}{12}$       D.  $\frac{7\pi}{12}$

4. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为 ( )



- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$       C. 2      D. 4

5. 函数  $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$  与  $g(x) = kx - k$  在  $[-6, 8]$  上最多有  $n$  个交点, 交点分别为  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 则

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = ( \quad )$$

- A. 7                      B. 8                      C. 9                      D. 10

6. 已知点  $(m, 8)$  在幂函数  $f(x) = (m-1)x^n$  的图象上, 设  $a = f\left(\frac{m}{n}\right)$ ,  $b = f(\ln \pi)$ ,  $c = f(n)$ , 则 ( )

- A.  $b < a < c$               B.  $a < b < c$               C.  $b < c < a$               D.  $a < c < b$

7. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x) & x \leq 0 \\ f(x-5) & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(2019) = ( )$

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2

8. 已知向量  $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$ ,  $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

9. 已知偶函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0]$  内单调递减,  $a = f(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3})$ ,  $b = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ ,  $c = f\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ , 则  $a, b, c$  满足 ( )

$c$  满足 ( )

- A.  $a < b < c$               B.  $c < a < b$               C.  $b < c < a$               D.  $c < b < a$

10.  $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6$  的展开式中, 含  $x^3$  项的系数为 ( )

- A. -60                      B. -12                      C. 12                      D. 60

11. 已知集合  $M = \{x | x = 3^n, n \in N^*\}$ ,  $N = \{x | x = 2n, n \in N^*\}$ , 将集合  $M \cup N$  的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列  $\{c_n\}$ , 则  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = ( )$

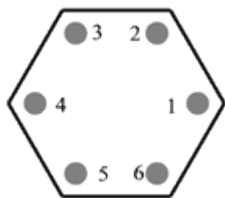
- A. 1194                      B. 1695                      C. 311                      D. 1095

12. 已知幂函数  $f(x) = x^a$  的图象过点  $(3, 5)$ , 且  $a = \left(\frac{1}{e}\right)^a$ ,  $b = \sqrt[3]{a}$ ,  $c = \log_a \frac{1}{4}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $c < a < b$               B.  $a < c < b$               C.  $a < b < c$               D.  $c < b < a$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 工人在安装一个正六边形零件时, 需要固定如图所示的六个位置的螺栓. 若按一定顺序将每个螺栓固定紧, 但不能连续固定相邻的 2 个螺栓. 则不同的固定螺栓方式的种数是\_\_\_\_\_.



14. 在平行四边形  $ABCD$  中, 已知  $AB=1$ ,  $AD=2$ ,  $\angle BAD=60^\circ$ , 若  $\vec{CE}=\vec{ED}$ ,  $\vec{DF}=2\vec{FB}$ , 则  $\vec{AE}\cdot\vec{AF}=\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 已知函数  $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega\in\mathbb{N}$ ) 在  $[0,\pi]$  上仅有 2 个零点, 设  $g(x)=\sqrt{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ , 则  $g(x)$  在区间  $[0,\pi]$  上的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$  ( $a>0$ ,  $b>0$ ) 与抛物线  $y^2=8x$  有一个共同的焦点  $F$ , 两曲线的一个交点为  $P$ , 若  $|FP|=5$ , 则点  $F$  到双曲线的渐近线的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n=a_{n+2}-2$ ,  $n\in\mathbb{N}^*$ .

(1) 若数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 求数列  $\{a_n\}$  的公比  $q$  的值;

(2) 设正项数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 若  $b_1=1$ , 且  $2T_n=b_{n+1}^2-n-1$ .

①求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

②求证:  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^{b_i}} < \frac{a_1+a_2+a_3}{2}$ .

18. (12 分) 一种游戏的规则为抛掷一枚硬币, 每次正面向上得 2 分, 反面向上得 1 分.

(1) 设抛掷 4 次的得分为  $X$ , 求变量  $X$  的分布列和数学期望.

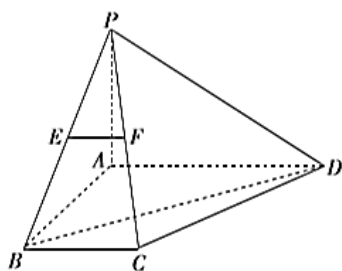
(2) 当游戏得分为  $n$  ( $n\in\mathbb{N}^*$ ) 时, 游戏停止, 记得  $n$  分的概率和为  $Q_n$ ,  $Q_1=\frac{1}{2}$ .

①求  $Q_2$ ;

②当  $n\in\mathbb{N}^*$  时, 记  $A_n=Q_{n+1}+\frac{1}{2}Q_n$ ,  $B_n=Q_{n+1}-Q_n$ , 证明: 数列  $\{A_n\}$  为常数列, 数列  $\{B_n\}$  为等比数列.

19. (12 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA\perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD\parallel BC$ ,  $\angle ABC=90^\circ$ ,

$AB=BC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}PB=2$ ,  $E$  为  $PB$  的中点,  $F$  是  $PC$  上的点.



(1) 若  $EF \parallel$  平面  $PAD$ ，证明： $EF \perp$  平面  $PAB$ 。

(2) 求二面角  $B-PD-C$  的余弦值。

20. (12 分) 已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - a$ ， $g(x) = \frac{a-1}{x} + \frac{a+|a|}{2} \cdot \frac{x}{e^{x-1}}$ ， $(a \in R)$

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性；

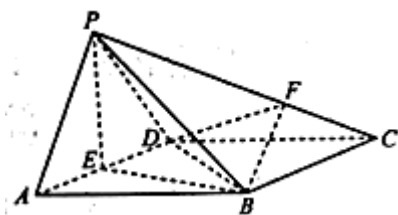
(2) 若  $f(x)$  在定义域内有且仅有一个零点，且此时  $f(x) \geq g(x) + m$  恒成立，求实数  $m$  的取值范围。

21. (12 分) 我们称  $n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 元有序实数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $n$  维向量， $\sum_{i=1}^n |x_i|$  为该向量的范数. 已知  $n$  维向量  $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其中  $x_i \in \{-1, 0, 1\}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ . 记范数为奇数的  $n$  维向量  $a$  的个数为  $A_n$ ，这  $A_n$  个向量的范数之和为  $B_n$ 。

(1) 求  $A_2$  和  $B_2$  的值；

(2) 当  $n$  为偶数时，求  $A_n$ ， $B_n$  (用  $n$  表示)。

22. (10 分) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\triangle PAD$  是边长为 2 的正三角形， $PC = \sqrt{10}$ ， $E$  为线段  $AD$  的中点。



(1) 求证：平面  $PBC \perp$  平面  $PBE$ ；

(2) 若  $F$  为线段  $PC$  上一点，当二面角  $P-DB-F$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  时，求三棱锥  $B-PDF$  的体积。

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

根据直线  $l: y = 2x + 10$  过双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一个焦点，得  $c = 5$ ，又和其中一条渐近线平行，得到

$b = 2a$ ，再求双曲线方程.

【详解】

因为直线  $l: y = 2x + 10$  过双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一个焦点，

所以  $F(-5, 0)$ ，所以  $c = 5$ ，

又和其中一条渐近线平行，

所以  $b = 2a$ ，

所以  $a^2 = 5$ ， $b^2 = 20$ ，

所以双曲线方程为  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ .

故选：A.

【点睛】

本题主要考查双曲线的几何性质，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

2. A

【解析】

根据椭圆与双曲线离心率的表示形式，结合  $C_1$  和  $C_2$  的离心率之积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即可得  $a, b$  的关系，进而得双曲线的离心率

方程.

【详解】

椭圆  $C_1$  的方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，双曲线  $C_2$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

则椭圆离心率  $e_1 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ，双曲线的离心率  $e_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ ，



由  $C_1$  和  $C_2$  的离心率之积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\text{即 } e_1 e_2 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \times \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以渐近线方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$

$$\text{化简可得 } x \pm \sqrt{2}y = 0,$$

故选: A.

【点睛】

本题考查了椭圆与双曲线简单几何性质应用, 椭圆与双曲线离心率表示形式, 双曲线渐近线方程求法, 属于基础题.

3. C

【解析】

由题意利用函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图象变换规律, 正弦函数的单调性, 求出  $a$  的最大值.

【详解】

解: 把函数  $f(x) = \sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到函数  $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  的图象,

若函数  $g(x)$  在区间  $[0, a]$  上单调递增,

$$\text{在区间 } [0, a] \text{ 上, } 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, 2a - \frac{\pi}{3}],$$

$$\text{则当 } a \text{ 最大时, } 2a - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 求得 } a = \frac{5\pi}{12},$$

故选: C.

【点睛】

本题主要考查函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图象变换规律, 正弦函数的单调性, 属于基础题.

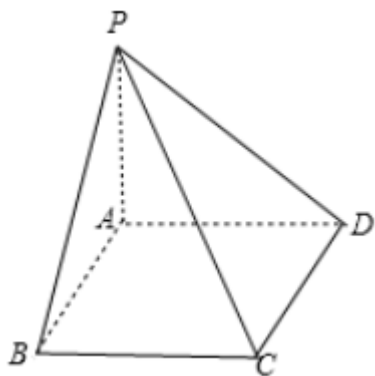
4. B

【解析】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形, 且一侧棱垂直于底面, 由此求出四棱锥的体积.

【详解】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形, 且一侧棱垂直于底面, 画出四棱锥的直观图, 如图所示:



则该四棱锥的体积为  $V = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 1 = \frac{4}{3}$ .

故选：B.

【点睛】

本题考查了利用三视图求几何体体积的问题，是基础题.

5. C

【解析】

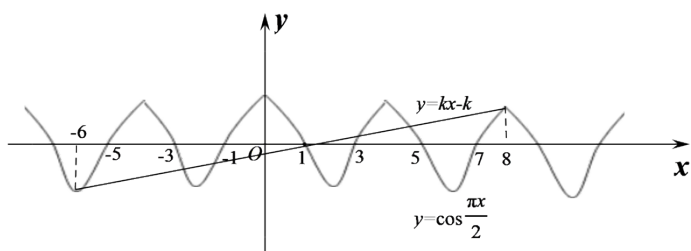
根据直线  $g(x)$  过定点  $(1,0)$ ，采用数形结合，可得最多交点个数，然后利用对称性，可得结果.

【详解】

由题可知：直线  $g(x) = kx - k$  过定点  $(1,0)$

且  $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$  在  $[-6,8]$  是关于  $(1,0)$  对称

如图



通过图像可知：直线  $g(x)$  与  $f(x)$  最多有 9 个交点

同时点  $(1,0)$  左、右边各四个交点关于  $(1,0)$  对称

所以  $\sum_{i=1}^9 (x_i + y_i) = 2 \times 4 + 1 = 9$

故选：C

【点睛】

本题考查函数对称性的应用，数形结合，难点在于正确画出图像，同时掌握基础函数  $y = \cos x$  的性质，属难题.

6. B

【解析】

先利用幂函数的定义求出  $m$  的值, 得到幂函数解析式为  $f(x) = x^3$ , 在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 再利用幂函数  $f(x)$  的单调性, 即可得到  $a, b, c$  的大小关系.

【详解】

由幂函数的定义可知,  $m^{-1} = 1$ ,  $\therefore m = 2$ ,

$\therefore$  点  $(2, 8)$  在幂函数  $f(x) = x^n$  上,

$\therefore 2^n = 8$ ,  $\therefore n = 3$ ,

$\therefore$  幂函数解析式为  $f(x) = x^3$ , 在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

$\because \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ ,  $1 < \ln \pi < 3$ ,  $n = 3$ ,

$\therefore \frac{m}{n} < \ln \pi < n$ ,

$\therefore a < b < c$ ,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了幂函数的性质, 以及利用函数的单调性比较函数值大小, 属于中档题.

7. C

【解析】

推导出  $f(2019) = f(403 \times 5 + 4) = f(4) = f(-1) = \log_2 2$ , 由此能求出  $f(2019)$  的值.

【详解】

$\because$  定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x) & x \leq 0 \\ f(x-5) & x > 0 \end{cases}$ ,

$\therefore f(2019) = f(403 \times 5 + 4) = f(4) = f(-1) = \log_2 2 = 1$ , 故选 C.

【点睛】

本题主要考查函数值的求法, 解题时要认真审题, 注意函数性质的合理运用, 属于中档题.

8. B

【解析】

由已知向量的坐标, 利用平面向量的夹角公式, 直接可求出结果.

【详解】

解: 由题意得, 设  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\theta$ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3-1}{2 \times 2} = \frac{1}{2},$$

由于向量夹角范围为:  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查利用平面向量的数量积求两向量的夹角, 注意向量夹角的范围.

9. D

【解析】

首先由函数为偶函数, 可得函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内单调递增, 再由  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > \left| \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \right| > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ , 即可判定大小

【详解】

因为偶函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  减, 所以  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上增,

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > 1, \quad \left| \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \right| \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \therefore c < b < a.$$

故选: D

【点睛】

本题考查函数的奇偶性和单调性, 不同类型的数比较大小, 应找一个中间数, 通过它实现大小关系的传递, 属于中档题.

10. B

【解析】

在二项展开式的通项公式中, 令  $x$  的幂指数等于 3, 求出  $r$  的值, 即可求得含  $x^3$  项的系数.

【详解】

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^6 \text{ 的展开式通项为 } T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = C_6^r \cdot (-2)^r \cdot x^{6-3r},$$

令  $6-3r=3$ , 得  $r=1$ , 可得含  $x^3$  项的系数为  $C_6^1 \times (-2) = -12$ .

故选: B.

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用, 二项展开式的通项公式, 二项式系数的性质, 属于基础题.

11. D

**【解析】**

确定  $\{c_n\}$  中前 35 项里两个数列中的项数, 数列  $\{2n\}$  中第 35 项为 70, 这时可通过比较确定  $\{3^n\}$  中有多少项可以插入这 35 项里面即可得, 然后可求和.

**【详解】**

$n = 35$  时,  $2 \times 35 = 70, 3^n < 70, n \leq 3$ , 所以数列  $\{c_n\}$  的前 35 项和中,  $\{3^n\}$  有三项 3, 9, 27,  $\{2n\}$  有 32 项, 所以  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = 3 + 9 + 27 + 32 \times 2 + \frac{32 \times 31}{2} \times 2 = 1095$ .

故选: D.

**【点睛】**

本题考查数列分组求和, 掌握等差数列和等比数列前  $n$  项和公式是解题基础. 解题关键是确定数列  $\{c_n\}$  的前 35 项中有多少项是  $\{2n\}$  中的, 又有多少项是  $\{3^n\}$  中的.

12. A

**【解析】**

根据题意求得参数  $\alpha$ , 根据对数的运算性质, 以及对数函数的单调性即可判断.

**【详解】**

依题意, 得  $3^\alpha = 5$ , 故  $\alpha = \log_3 5 \in (1, 2)$ ,

故  $0 < a = \left(\frac{1}{e}\right)^{\log_3 5} < 1$ ,  $b = \sqrt[3]{\log_3 5} > 1$ ,  $c = \log_{\log_3 5} \frac{1}{4} < 0$ ,

则  $c < a < b$ .

故选: A.

**【点睛】**

本题考查利用指数函数和对数函数的单调性比较大小, 考查推理论证能力, 属基础题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 60

**【解析】**

分析: 首先将选定第一个钉, 总共有 6 种方法, 假设选定 1 号, 之后分析第二步, 第三步等, 按照分类加法计数原理, 可以求得共有 10 种方法, 利用分步乘法计数原理, 求得总共有  $6 \times 10 = 60$  种方法.

详解: 根据题意, 第一个可以从 6 个钉里任意选一个, 共有 6 种选择方法, 并且是机会相等的, 若第一个选 1 号钉的时候, 第二个可以选 3, 4, 5 号钉, 依次选下去, 可以得到共有 10 种方法, 所以总共有  $10 \times 6 = 60$  种方法, 故答案是

60.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046232014105010235>