

# 海淀区高一年级练习

## 数学

2024.07

学校\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

考生须知 1. 本试卷共 6 页, 共三道大题, 19 道小题. 满分 100 分. 考试时间 90 分钟.

2. 在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名.

3. 答案一律填涂或书写在试卷上, 用黑色字迹签字笔作答.

4. 考试结束, 请将本试卷交回.

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

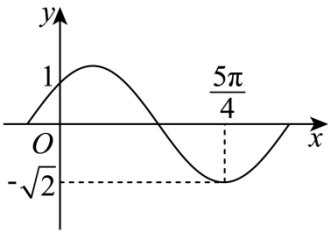
1. 若复数  $z$  满足  $z \cdot i = 2$ , 则  $z$  的虚部为 ( )

- A. -2                          B. 2                          C. -i                          D. i

2. 已知向量  $\vec{a} = (0, 1)$ ,  $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$  ( )

- A. 0                          B.  $\frac{1}{2}$                           C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                           D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则其解析式为 ( )



- A.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$                           B.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$
- C.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$                           D.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

4. 若  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 且  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 则  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$  ( )

- A.  $-\frac{3}{4}$                           B.  $\frac{1}{7}$                           C.  $\frac{3}{4}$                           D. 7

5. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  满足  $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC}$ , 若  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$ , 则  $\lambda =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C. 3                      D. -4

6. 已知  $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x}$ , 则下列直线中, 是函数  $f(x)$  对称轴的为 ( )

- A.  $x = 0$                       B.  $x = \frac{\pi}{16}$                       C.  $x = \frac{\pi}{4}$                       D.  $x = \frac{\pi}{2}$

7. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A(-1, \sqrt{3})$ , 点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ , 其中  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . 若  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}| = \sqrt{5}$ ,

则  $\theta =$  ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

8. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 2, A = \frac{\pi}{3}$ . 则下列说法正确的是 ( )

A. 当  $b = 1$  时,  $\triangle ABC$  是锐角三角形                      B. 当  $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  时,  $\triangle ABC$  是直角三角形

C. 当  $b = \frac{3}{2}$  时,  $\triangle ABC$  是钝角三角形                      D. 当  $b = \frac{5}{3}$  时,  $\triangle ABC$  是等腰三角形

9. 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  是非零向量, 则“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”是“对于任意的  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 都有  $|\vec{a} + \lambda \vec{b}| = |\vec{a} - \lambda \vec{b}|$  成立”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件                      C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

10. 定义域为  $[a, b]$  的函数  $y = f(x)$  的图象的两个端点分别为  $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ . 点  $M(x, y)$  是

$y = f(x)$  的图象上的任意一点, 其中  $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), 点  $N$  满足向量  $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB}$ ,

点  $O$  为坐标原点. 若不等式  $|\overrightarrow{MN}| \leq k$  恒成立, 则称函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上为  $k$  函数. 已知函数

$f(x) = -x^2 + 2x$  在  $[0, 1]$  上为  $k$  函数, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, +\infty)$                       B.  $[\frac{1}{4}, +\infty)$                       C.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$                       D.  $[1, +\infty)$

## 二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

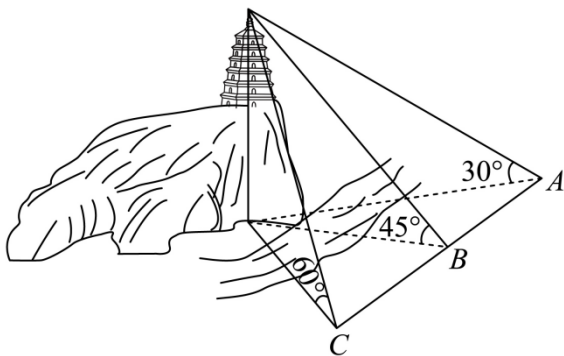
11. 知复数  $z$  满足  $z + 1 - i = 0$ , 则  $z =$  \_\_\_\_\_,  $\bar{z} =$  \_\_\_\_\_.

12. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = \frac{\pi}{3}, CA = CB = 2$ ,  $P$  满足  $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ , 则  $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} =$  \_\_\_\_\_.

13. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a \sin B = kb$ , 则  $k$  的一个取值为 \_\_\_\_\_; 当  $A = \frac{\pi}{2}$  时,  $k =$  \_\_\_\_\_.

14. 一名学生想测算某风景区山顶上古塔的塔尖距离地面的高度, 由于山崖下河流的阻碍, 他只能在河岸边制定如下测算方案: 他在河岸边设置了共线的三个观测点  $A, B, C$  (如图), 相邻两观测点之间的距离为 200m

，并用测角仪器测得各观测点与塔尖的仰角分别为  $30^\circ$ ， $45^\circ$ ， $60^\circ$ ，根据以上数据，该学生得到塔尖距离地面的高度为\_\_\_\_\_m.



15. 已知函数  $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ,  $g(x) = |\cos x|$ ，给出下列四个结论：

- ①对任意的  $\varphi \in \mathbf{R}$ ，函数  $y = f(x) + g(x)$  是周期函数；
- ②存在  $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ ，使得函数  $y = f(x) + g(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递减；
- ③存在  $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ ，使得函数  $y = f(x)g(x)$  的图象既是轴对称图形，又是中心对称图形；
- ④对任意的  $\varphi \in \mathbf{R}$ ，记函数  $F(x) = f(x)g(x)$  的最大值为  $M(\varphi)$ ，则  $M(\varphi) > \frac{1}{2}$ 。

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

- (1) 求  $f(0)$  的值和  $f(x)$  的零点；
- (2) 求  $f(x)$  的单调递增区间。

17. 已知  $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, |a| = \sqrt{2}, |b| = 1, \langle a, b \rangle = \frac{\pi}{4}$ 。

- (1) 求  $|a - 2b|$ ；
- (2) 若  $\vec{OQ} = t\vec{OA}$ ，求  $AQ \cdot (\vec{OQ} - \vec{OB})$  的最小值。

18. 在  $\triangle ABC$  中， $\cos 2A + \cos A = 0$ 。

- (1) 求  $A$  的大小；
- (2) 若  $a = 7$ ，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得  $\triangle ABC$  存在，求  $\triangle ABC$  最长边上高线的长。

条件①:  $\sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ;

条件②:  $\triangle ABC$  的面积为  $10\sqrt{3}$ ;

条件③:  $b=10$ .

注: 如果选择的条件不符合要求, 第(2)问得0分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. 已知  $n$  维向量  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 给定  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , 定义变换  $\varphi_k$ ; 选取  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , 再选取一个实数  $x$ , 对  $\vec{a}$  的坐标进行如下改变: 若此时  $i+k \leq n$ , 则将  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+k}$  同时加上  $x$ . 其余坐标不变; 若此时  $i+k > n$ , 则将  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$  及  $a_1, a_2, \dots, a_{i+k-n}$  同时加上  $x$ , 其余坐标不变. 若  $\vec{a}$  经过有限次变换  $\varphi_k$  (每次变换所取的  $i, x$  的值可能不同) 后, 最终得到的向量  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  满足  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$ , 则称  $\vec{a}$  为  $k$  阶可等向量. 例如, 向量  $(1, 3, 2)$  经过两次变换  $\varphi_2$  可得:  $(1, 3, 2) \xrightarrow{i=2, x=1} (2, 3, 3) \xrightarrow{i=1, x=-1} (2, 2, 2)$ , 所以  $(1, 3, 2)$  是 2 阶可等向量.

(1) 判断  $(1, 2, 3)$  是否是 2 阶可等向量? 说明理由;

(2) 若取 1, 2, 3, 4 的一个排序得到的向量  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  是 2 阶可等向量, 求  $a_1 + a_3$ ;

(3) 若任取  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的一个排序得到的  $n$  维向量均为  $k$  阶可等向量. 则称  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  为  $k$  阶强可等向量. 求证: 向量  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  是 5 阶强可等向量.

# 海淀区高一年级练习

## 数学

2024.07

学校\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

考生须知 1. 本试卷共 6 页，共三道大题，19 道小题。满分 100 分。考试时间 90 分钟。

2. 在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。

3. 答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答。

4. 考试结束，请将本试卷交回。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若复数  $z$  满足  $z \cdot i = 2$ ，则  $z$  的虚部为 ( )

A. -2

B. 2

C.  $-i$

D.  $i$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数代数形式的除法运算化简，再判断其虚部。

【详解】因为  $z \cdot i = 2$ ，所以  $z = \frac{2}{i} = \frac{2i}{i^2} = -2i$ ，

所以  $z$  的虚部为  $-2$ 。

故选：A

2. 已知向量  $\vec{a} = (0, 1)$ ,  $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ，则  $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$  ( )

A. 0

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

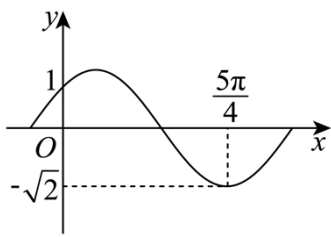
【解析】

【分析】根据向量的数量积的坐标表示计算。

【详解】由题意  $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{1 \times 1} = \frac{1}{2}$ ，

故选：B。

3. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则其解析式为 ( )



A.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

B.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

C.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

D.  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】由最小值求得  $A$ , 由  $f(0) = 1$  求得  $\varphi$ , 再结合最小值点和周期求得  $\omega$ .

【详解】由图象知  $A = \sqrt{2}$ ,  $f(0) = 1$

所以  $\sqrt{2} \sin \varphi = 1$ ,

则  $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  或  $\varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ ,

又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,

$\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ ,  $\frac{5\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ,  $\omega = \frac{8k}{5} + 1, k \in \mathbb{Z}$ ,

又  $T > \frac{5\pi}{4}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} < \frac{8}{5}$ , 已知  $\omega > 0$ , 所以  $\omega = 1$ , 所以  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,

故选: D.

4. 若  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 且  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 则  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$  ( )

A.  $-\frac{3}{4}$

B.  $\frac{1}{7}$

C.  $\frac{3}{4}$

D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】根据正弦得到正切值, 利用正切差角公式计算出答案.

【详解】因为  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 所以  $\cos \alpha < 0$ ,

又  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 所以  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ ,

故  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$ ,

所以  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7$ .

故选: D

5. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  满足  $\vec{BD} = \lambda \vec{BC}$ , 若  $\vec{AD} = \frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$ , 则  $\lambda =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C. 3                      D. -4

【答案】B

【解析】

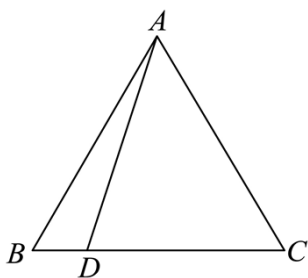
【分析】根据平面向量的三角形法则即可得解

【详解】如图, 因为在  $\triangle ABC$  中,  $\vec{BD} = \lambda \vec{BC}$ ,

所以  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC} = \vec{AB} + \lambda(\vec{AC} - \vec{AB}) = (1 - \lambda)\vec{AB} + \lambda \vec{AC}$ ,

又  $\vec{AD} = \frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$ , 所以  $(1 - \lambda)\vec{AB} + \lambda \vec{AC} = \frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$ ,

所以  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,



故选: B.

6. 已知  $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x}$ , 则下列直线中, 是函数  $f(x)$  对称轴的为 ( )

- A.  $x = 0$                       B.  $x = \frac{\pi}{16}$                       C.  $x = \frac{\pi}{4}$                       D.  $x = \frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】举例说明判断 ABD; 利用轴对称的意义判断 C.

【详解】依题意， $\sin x + \cos x \neq 0$ ，解得  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ ，

对于 A， $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ， $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ，则函数  $f(x)$  的图象关于  $x = 0$  不对称，A 不是；

对于 B， $f(0) = 1$ ， $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}} \neq 1$ ，则函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{16}$  不对称，B 不是；

对于 C， $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{3\pi}{4} - k\pi$ ，即  $\frac{\pi}{2} - x \neq -\frac{\pi}{4} + (1-k)\pi, k \in Z$ ，

$f(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1 + \sin 2(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos x + \sin x} = f(x)$ ，则函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{4}$  对称，C 是；

对于 D， $f(0) = 1$ ， $f(\pi) = -1$ ，则函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{2}$  不对称，D 不是。

故选：C

7. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $A(-1, \sqrt{3})$ ，点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ，其中  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 。若  $|\vec{OA} + \vec{OP}| = \sqrt{5}$ ，

则  $\theta =$  ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先  $\vec{OA} + \vec{OP}$  的坐标，然后求出模长，然后结合辅助角公式化简，建立关于  $\theta$  的方程，解方程即可得解。

【详解】因为平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $A(-1, \sqrt{3})$ ，点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$

所以  $\vec{OA} + \vec{OP} = (-1 + \cos \theta, \sqrt{3} + \sin \theta)$

所以  $|\vec{OA} + \vec{OP}| = \sqrt{(-1 + \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} + \sin \theta)^2} = \sqrt{2\sqrt{3} \sin \theta - 2 \cos \theta + 5}$

又  $|\vec{OA} + \vec{OP}| = \sqrt{5}$

所以  $\sqrt{2\sqrt{3} \sin \theta - 2 \cos \theta + 5} = \sqrt{5}$ ，即  $2\sqrt{3} \sin \theta - 2 \cos \theta = 0$

所以  $4 \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = 0$ ，又因为  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

所以  $\theta - \frac{\pi}{6} = 0$ ，即  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，



故选：A.

8. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a=2, A=\frac{\pi}{3}$ . 则下列说法正确的是 ( )

- A. 当  $b=1$  时,  $\triangle ABC$  是锐角三角形  
B. 当  $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$  时,  $\triangle ABC$  是直角三角形  
C. 当  $b=\frac{3}{2}$  时,  $\triangle ABC$  是钝角三角形  
D. 当  $b=\frac{5}{3}$  时,  $\triangle ABC$  是等腰三角形

【答案】B

【解析】

【分析】根据边长应用正弦定理计算分别判断各个选项.

【详解】对于 A: 因为  $b=1$  由正弦定理  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sin B}$ ,  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}$ ,

当  $\pi > B > \frac{5\pi}{6}$  时,  $\triangle ABC$  是钝角三角形,

当  $B < \frac{\pi}{6}, A = \pi - A - B > \frac{\pi}{2}$  时,  $\triangle ABC$  是钝角三角形, A 选项错误;

对于 B: 因为  $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 由  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\sin B}$ ,  $\sin B = 1, B = \frac{\pi}{2}$ ,

所以  $\triangle ABC$  是直角三角形, B 选项正确;

对于 C: 因为  $b = \frac{3}{2}$ , 由  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sin B}$ ,  $\sin B = \frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{1}{2}$

当  $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$  时,  $C = \pi - A - B < \frac{\pi}{2}$ ,  $\triangle ABC$  是锐角三角形, C 选项错误;

对于 D: 因为  $b = \frac{5}{3}$ , 由  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\sin B}$ ,  $\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{12} < \frac{\sqrt{3}}{2}, b < a, B < A < \frac{\pi}{3}$ ,

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{75}{144}} = \frac{\sqrt{69}}{12}$$

$$\sin C = \sin(B + A) = \sin B \cos A + \cos B \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{12} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{23}}{24}$$

因为  $B \neq C, A \neq C$ , 所以  $\triangle ABC$  不是等腰三角形, D 选项错误;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/046242155114010205>