信号与系统

§2.2 微分方程的式的建立与求解

退出 开始

主要内容

复习求解系统微分方程的经典法

物理系统的模型

微分方程的列写

n 阶线性时不变系统的描述

求解系统微分方程的经典法

一. 物理系统的模型

•许多实际系统可以用线性系统来模拟。

•若系统的参数不随时间而改变，则该系统可以用**线性常系数微分方程**来描述。

线性时不变系统 $\xrightarrow{\text{数学模型建立}}$ 线性的常系数微分方程

也即：

具体系统物理模型 $\xrightarrow[\text{系统结构的约束特性}]{\text{按照元件的约束特性及}}$ 常系数微分方程建立

二. 微分方程的列写

•根据实际系统的物理特性列写系统的微分方程。

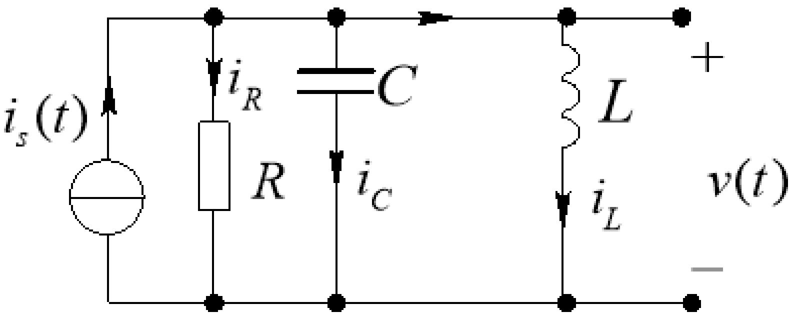
•对于电路系统，主要是根据元件特性约束和网络拓扑约束列写系统的微分方程。

元件特性约束：表征元件特性的关系式。例如二端元件电阻、电容、电感各自的电压与电流的关系以及四端元件互感的初、次级电压与电流的关系等等。

网络拓扑约束：由网络结构决定的电压电流约束关系，KCL，KVL。

微分方程的列写

例： 求并联电路的端电压 $v(t)$ 与激励 $i_s(t)$ 间的关系。



解： 电阻 $$i_R(t)=\frac{1}{R}v(t)$$

电感 $$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

电容 $$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}\,v(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

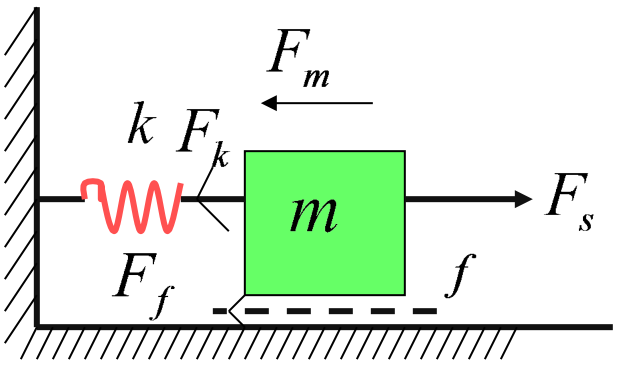
根据KCL $$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$$

代入上面元件伏安关系，并化简有

$$C\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\,v(t)}{\mathrm{d}\,t}+\frac{1}{L}v(t)=\frac{\mathrm{d}\,i_S(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

这是一个代表RCL并联电路系统的二阶微分方程。

例2-2　机械位移系统



机械位移系统

质量为m的刚体一端由弹簧牵引，弹簧的另一端固定在壁上。刚体与地面间的摩擦力为f，外加牵引力为$F_S(t)$，其外加牵引力$F_S(t)$与刚体运动速度$v(t)$间的关系可以推导出为

$$m\frac{d^2v(t)}{dt^2}+f\frac{dv(t)}{dt}+kv(t)=\frac{dF_S(t)}{dt}$$

这是一个代表机械位移系统的二阶微分方程。

两个不同性质的系统具有相同的数学模型，都是线性常系数微分方程，只是系数不同。对于复杂系统，则可以用高阶微分方程表示。

三．n 阶线性时不变系统的描述

一个线性系统，其激励信号$e(t)$与响应信号$r(t)$之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)$$

$$=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

若系统为时不变的，则C，E均为常数，此方程为常系数的n阶线性常微分方程。

阶次：方程的阶次由独立的动态元件的个数决定。

四. 求解系统微分方程的经典法

分析系统的方法：列写方程，求解方程。

求解方程时域经典法就是：齐次解+特解。

经典法

齐次解：由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式 $\sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^{\alpha_k t}$

注意：重根情况处理方法

特 解：根据微分方程右端函数式形式，设含待定系 数的特解函数式，→ 代入原方程，比较系数 定出特解。

全 解：齐次解+特解，由初始条件定出齐次解系数 A_k

一般将激励信号加入的时刻定义为t=0 ，响应为 $t \geq 0_+$ 时的方程的解，

初始条件:

$$r(0^+),\ \frac{\mathrm{d}\,r(0^+)}{\mathrm{d}\,t},\ \frac{\mathrm{d}^2\,r(0^+)}{\mathrm{d}\,t^2},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0^+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}$$

初始条件的确定是此课程要解决的问题。

线性时不变系统经典求解

齐次解

齐次微分方程 $$a_n \frac{d^{\mathrm{n}}}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{\mathrm{n-1}}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0$$

特征方程 $$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

特征根 $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

齐次解形式：（和特征根有关） $$\sum_{k=1}^{n} A_k \, \mathrm{e}^{\alpha_k t}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/047012132125006140