第四章 数列 章末测试（提升）

一、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，8 题共 40 分)

1．（2022·安徽）中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题:“今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里”，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了 700 里路，则该马第六天走的里程数为（　）

A．$\frac{350}{127}$　　B．$\frac{700}{127}$　　C．$\frac{1400}{127}$　　D．$\frac{2800}{127}$

2．（2022·广东）在递增的等差数列$\{a_n\}$中，已知a_4与a_6是方程$x^2-10x+24=0$的两个根，则$a_{20}=$（　）

A．19　　B．20　　C．21　　D．22

3．（2022 山东省）若数列-9，m，x，n，-16是等比数列，则x的值是（　）

A．12　　B．± 12　　C．-12　　D．**-12.5**

4．（2022·浙江·嘉兴一中高二期中）已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}(3-a)n-8, n\le 6\\ a^{n-6}, n>6\end{cases}$（$n\in \mathbf{N}^*$），且数列$\{a_n\}$是递增数列，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$(2,3)$　　B．$(1,\frac{10}{7})$　　C．$(\frac{10}{7},3)$　　D．$(1,3)$

5．（2022·浙江绍兴·一模）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n，则“$2S_{n+1}<S_n+S_{n+2}$”是“数列$\{S_n\}$为单增数列”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．（2022·江西赣州）设公比为q的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项积为T_n，且$a_1>1$，$a_{2021}a_{2022}>1$，$\frac{a_{2021}-1}{a_{2022}-1}<0$，则下列结论正确的是（　）

A．$q>1$　　B．$S_{2021}S_{2022}-1>0$

C．T_{2022}是数列$\{T_n\}$中的最大值　　D．数列$\{T_n\}$无最大值

7．（2022·湖北黄冈）已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{2022}=a_{2021}+2a_{2020}$，若$5+\log_2 a_1$是$\log_2 a_m$和$\log_2 a_n$的等差中项，则$\dfrac{n+9m}{mn}$的最小值为（　）

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{13}{8}$　　C．$\dfrac{8}{5}$　　D．$\dfrac{34}{21}$

8．（2022·陕西延安·高二期中（理））设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_n=\dfrac{3}{2}a_n-3^{n+1}$，若不等式$a_n\geq\dfrac{2n^2+n}{\sqrt{k}}$对任意$n\in\mathrm{N}_+$恒成立，则$k$的最小值为（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{6}$　　C．$\dfrac{1}{9}$　　D．$\dfrac{1}{36}$

二、多选题（每题至少有两个选项为正确答案，少选且正确得2分，每题5分。4题共20分）

9．（2022·广东·深圳中学高二期中）已知公差大于0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_9=S_{17}$，下列说法正确的是（　）

A．$a_8=0$　　B．$a_9=0$　　C．$a_1=S_{16}$　　D．$S_8>S_{10}$

10．（2022·河南）各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，若$a_1>1$，公比$q\neq1$，则下列命题错误的是（　）

A．若$T_6=T_{10}$，则必有$T_{16}=1$　　B．若$T_6=T_{10}$，则必有T_8是T_n中最大的项

C．若$T_7>T_8$，则必有$T_6>T_7$　　D．若$T_7>T_8$，则必有$T_8>T_9$

11．（2022·江苏南通 ）S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，公差$d>0$，若$a_3a_5a_7=105$，且$\dfrac{1}{a_3a_5}+\dfrac{1}{a_5a_7}+\dfrac{1}{a_3a_7}=\dfrac{1}{7}$，则(　)

A．$a_5=5$

B．$S_9=90$

C．对于任意的正整数n，总存在正整数m，使得$a_m=S_n$

D．一定存在三个正整数m，n，k，当$m<n<k$时，2^{a_m}，2^{a_n}，2^{a_k}三个数依次成等差数列

12．（2022·福建龙岩）已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_6=32$，下列说法正确的是（　）

A．若$\{a_n\}$是正项等比数列，则$a_5=8$　　　B．若$\{a_n\}$是正项等比数列，则$a_5=16$

C．若$\{a_n\}$是等差数列，则$a_4=16$　　　D．若$\{a_n\}$是等差数列，则公差为$\frac{15}{2}$

三、填空题(每题5分，4题共20分)

13．（2022·上海)已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=\frac{6n-31}{3n-17}$,则该数列a_n取得最大时,正整数$n=$____________.

14．（2022山东省）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为2，且a_1，a_2，a_5是等比数列$\left\{b_n\right\}$的前三项，则数列$\left\{a_nb_n\right\}$的前n项和$S_n=$______.

15．（2022·河南)若各项均不为零的数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$,且$\frac{2}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\left(n\in\mathrm{N}^*,n\geq 2\right)$,则$a_{2023}=$______.

16．（2022·浙江·嘉兴一中高二期中)记$b_n=a_{n+1}+(-1)^na_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.若数列$\left\{b_n\right\}$满足:$b_{2n}-b_{2n-1}=0,b_{2n+1}+b_{2n}=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列$\left\{a_n\right\}$的前200项的和为_________.

四、解答题（17题10分，其余每题12分，6题共70分）

17．（2022·吉林）已知$\left\{a_n\right\}$是公差为1的等差数列，且a_1,a_2,a_4成等比数列.

(1)求$\left\{a_n\right\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{\frac{2^{a_n}}{\left(2^{a_n}-1\right)\left(2^{a_{n+1}}-1\right)}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

18．（2022·福建）已知S_n为正项数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，$a_1=1$，且$\sqrt{S_n}=a_n+\frac{1}{4}$（$n\geq 2$且$n\in\mathbf{N}^*$）.

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{4^{\sqrt{S_n}}\cdot a_n\right\}$的前$n$项和$T_n$.

19．（2022·浙江·宁波市北仑中学高二期中）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+\sqrt{a_n}+1}$（其中$n\in\mathbf{N}^*$）

(1)判断并证明数列$\left\{a_n\right\}$的单调性；

(2)记数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，证明：$\dfrac{3}{2}<S_{2022}<\dfrac{5}{2}$．

20．（2022·安徽）设各项均为正数的数列$\left\{a_n\right\}$满足$\left(n+2\right)a_n^2-na_{n+1}^2+2a_na_{n+1}=0$．

(1)若$a_1=2$，求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)在（1）的条件下，设$b_n=\dfrac{1}{a_{2n-1}}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$S_n\geq\dfrac{2n}{3n+1}$．

21．（2022·福建龙岩·高二期中）已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为公比$q\neq 1$的等比数列，且$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_5=b_3$．

(1)求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=b_n+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$；

(3)在（2）的条件下，若对任意的$n\geq 1$，$n\in\mathbf{N}$，$2T_n>(4n-3)t-\dfrac{1}{2n+1}$恒成立，求实数$t$的取值范围.

22．（2022·宁夏·银川一中高三阶段练习（理））设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3\left(n\in N^*\right)$，若数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$b_2=4$，$b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}\left(n\in N^*\right)$

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{S_n},\left(n=2k-1,k\in N^*\right)\\ b_n,\left(n=2k,k\in N^*\right)\end{cases}$ 求数列$\{c_n\}$的前n项的和T_n.

第四章 数列 章末测试（提升）

二、单选题(每题 5 分，每题只有一个选项为正确答案，8 题共 40 分)

1．（2022·安徽）中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题："今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里"，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了 700 里路，则该马第六天走的里程数为（　）

A．$\dfrac{350}{127}$　　B．$\dfrac{700}{127}$　　C．$\dfrac{1400}{127}$　　D．$\dfrac{2800}{127}$

答案：C

【解析】由题意得，该马第 n 天走的里程数构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$，

则 $\dfrac{a_1\left(1-\dfrac{1}{2^7}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=700$，解得 $a_1=\dfrac{2^7\times 350}{127}$，故该马第六天走 $\dfrac{2^7\times 350}{127}\times\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1400}{127}$ 里路.

故选：C.

2．（2022·广东）在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 a_4 与 a_6 是方程 $x^2-10x+24=0$ 的两个根，则 $a_{20}=$（　）

A．19　　B．20　　C．21　　D．22

答案：B

【解析】a_4 与 a_6 是方程 $x^2-10x+24=0$ 的两个根，方程为 $(x-4)(x-6)=0$

则 $\begin{cases}a_4=4\\a_6=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_6=4\\a_4=6\end{cases}$，由于递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中，所以 $\begin{cases}a_4=4\\a_6=6\end{cases}$，则公差 $d=\dfrac{a_6-a_4}{6-4}=1$

所以 $a_{20}=a_4+16d=4+16=20$.

故选：B.

3．（2022 山东省）若数列 -9，m，x，n，-16 是等比数列，则 x 的值是（　）

A．12　　B．± 12　　C．-12　　D．**−12.5**

答案：C

【解析】数列 -9，m，x，n，-16 是等比数列，则 $x^2=-9\times(-16)$，故 $x=\pm 12$，

$x=-9\times q^2<0$，故 $x=-12$.

故选：C

4．（2022·浙江·嘉兴一中高二期中）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n=\begin{cases}(3-a)n-8,n\le 6\\a^{n-6},n>6\end{cases}$（$n\in\mathbf{N}^*$），且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(2,3)$　　　B．$(1,\frac{10}{7})$　　　C．$(\frac{10}{7},3)$　　　D．$(1,3)$

答案：C

【解析】由题意$\begin{cases}3-a>0\\a>1\\6(3-a)-8<a^{7-6}\end{cases}$，解得$\frac{10}{7}<a<3$．故选：C．

5．（2022·浙江绍兴·一模）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n，则“$2S_{n+1}<S_n+S_{n+2}$”是“数列$\{S_n\}$为单增数列”的（　）

A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　D．既不充分也不必要条件

答案：D

【解析】若$2S_{n+1}<S_n+S_{n+2}$，故$S_{n+1}-S_n<S_{n+2}-S_{n+1}$，即$a_{n+1}<a_{n+2}$，

故$\{a_n\}$为单调递增数列，设公差为$d\left(d>0\right)$，

此时$S_n=na_1+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，$n\geq 1,n\in\mathrm{N}$，

令$y=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$，对称轴为$x=-\frac{a_1-\frac{d}{2}}{d}$，当$a_1<-\frac{d}{2}$时，此时对称轴$x>1$，

此时$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$先增后减，

所以数列$\{S_n\}$不是单调数列，

充分性不成立，

若数列$\{S_n\}$为单增数列，设等差数列$\{a_n\}$公差为d，

若$d=0$，不妨设$a_1=1$，此时$S_n=n$，满足数列$\{S_n\}$为单增数列，

此时$S_1=1,S_2=2,S_3=3$，$2S_2=S_1+S_3=4$，故必要性不成立，

故“$2S_{n+1}<S_n+S_{n+2}$”是“数列$\{S_n\}$为单增数列”的既不充分也不必要条件.

故选：D

6．（2022·江西赣州）设公比为q的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项积为T_n，且$a_1>1$，$a_{2021}a_{2022}>1$，$\frac{a_{2021}-1}{a_{2022}-1}<0$，则下列结论正确的是（　）

A．$q>1$　　　B．$S_{2021}S_{2022}-1>0$

C．T_{2022}是数列$\{T_n\}$中的最大值　　　D．数列$\{T_n\}$无最大值

答案：B