22.2　相似三角形的判定

感悟新知

知识点 1 相似三角形

知1－讲

1. 定义　如果两个三角形中，对应角相等，对应边成比例，那么这两个三角形相似.

数学表达式：如图22.2-1，

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\left.\begin{aligned}&\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'\\&\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\end{aligned}\right\}\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

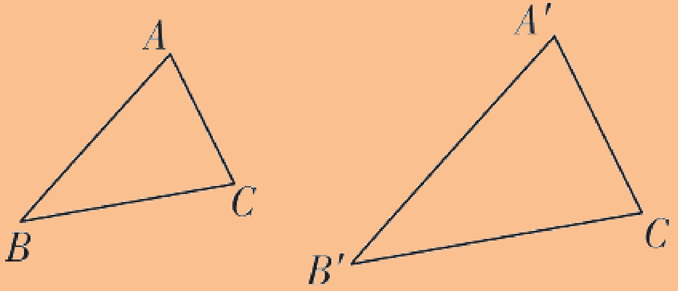


图 22.2-1

2. 相似三角形的表示方法 相似用符号“∽”表示，读作“相似于”. 如图22.2-2，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似，记作“$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$”，读作“$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$”.

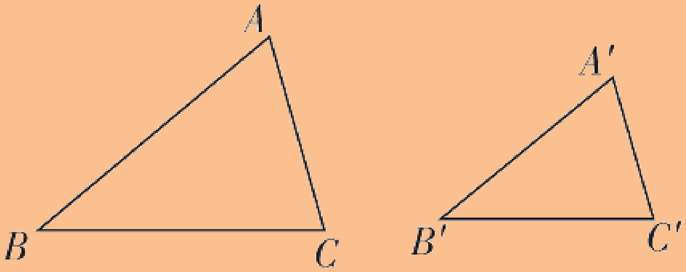


图 22.2–2

特别警示：用符号“∽”表示两个三角形相似时，要把表示对应顶点的大写字母写在对应的位置上. 如$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$表示顶点$A$与$A'$，$B$与$B'$，$C$与$C'$分别对应；如果仅说“$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似”，没有用“∽”连接，则需要分类讨论它们顶点的对应关系.

特别提醒

1. 相似三角形具有传递性，即若$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C' \backsim \triangle A''B''C''$，则$\triangle ABC \backsim \triangle A''B''C''$.

2. 相似三角形的相似比具有顺序性，即如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比为k，那么$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比为$\frac{1}{k}$.

3. 全等三角形是特殊的相似三角形，即全等三角形是相似比为1的相似三角形，而相似三角形不一定是全等三角形.

感悟新知

知1－练

例 1 如图22.2-3，已知$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，$\angle A=70°$，$\angle B=40°$，$AB=6$，$BC=6$，$AD=3$.

解题秘方：紧扣“相似三角形定义中对应角相等，对应边成比例”求解.

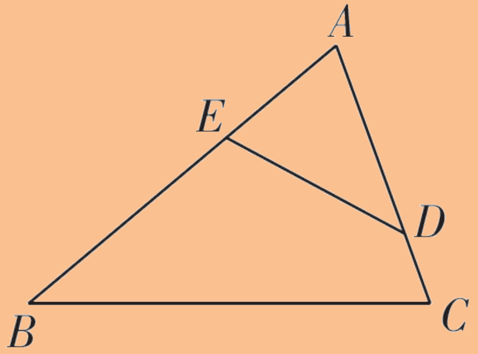


图 22.2–3

(1)求$\triangle ABC$与$\triangle ADE$的相似比；

解：$\triangle ABC$与$\triangle ADE$的相似比为$\frac{AB}{AD}=\frac{6}{3}=2$.

知1－练

(2)求$\angle AED$的度数和DE的长.

解：$\because \angle A=70°$，$\angle B=40°$，

$\therefore \angle C=180°-70°-40°=70°$.

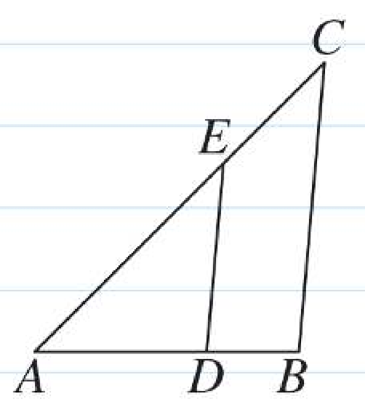
$\because \triangle ABC \backsim \triangle ADE$，$\therefore \angle AED=\angle C=70°$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}$.

又$\because AB=6$，$BC=6$，$AD=3$，$\therefore \dfrac{6}{3}=\dfrac{6}{DE}$.$\therefore DE=3$.

感悟新知

知1－练

1-1.如图，已知△ ABC∽△ ADE， AE=50 cm，EC=30 cm， BC=70 cm，∠ BAC=45°，∠ ACB=40°.



(1) 求∠ AED和∠ ADE的度数；

解：∵ ∠BAC＝45°，∠ACB＝40°，

∴ ∠ABC＝95°. ∵ △ABC∽△ADE，

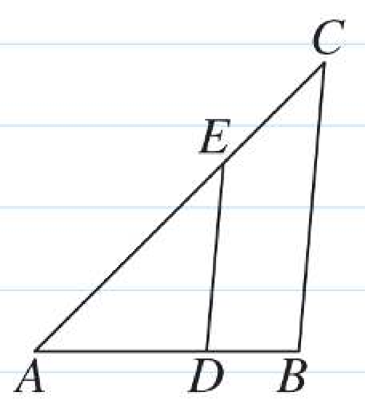
∴ ∠AED＝∠ACB＝40°，∠ADE＝∠ABC＝95°.

(2)求 DE 的长.

解：$\because \triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{50}{50+30}=\dfrac{5}{8}.$

又$\because BC=70$ cm，$\therefore DE=43.75$ cm.



感悟新知

知识点 2 平行线截三角形相似的定理

1. 定理　平行于三角形一边的直线与其他两边(或两边的延长线)相交，截得的三角形与原三角形相似.

数学表达式：如图22.2-4 所示，

∵ $DE \parallel BC$，

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

书写两个三角形相似时，要把表示对应顶点的大写字母写在对应的位置上.

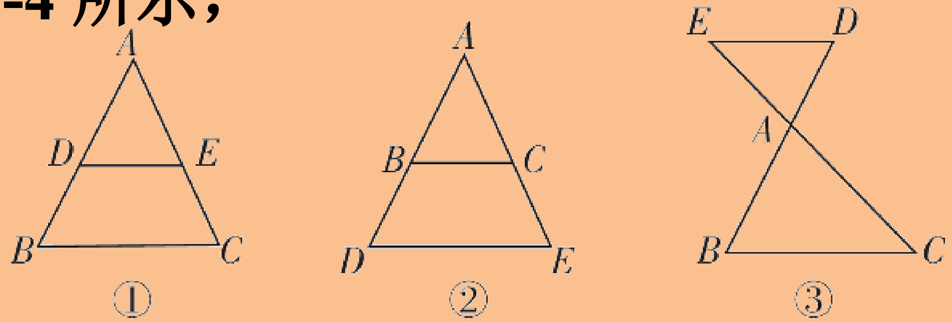


图 22.2-4

2. 作用　本定理是相似三角形判定定理的预备定理，它通过平行证三角形相似，再由相似证对应角相等、对应边成比例.

特别提醒

根据定理得到的相似三角形的三个基本图形中都有 $BC \parallel DE$，图22.2-4 ①②很像大写字母A，故我们称之为“A”型相似；图22.2-4 ③很像大写字母X，故我们称之为“X”型相似(也像阿拉伯数字“8”).

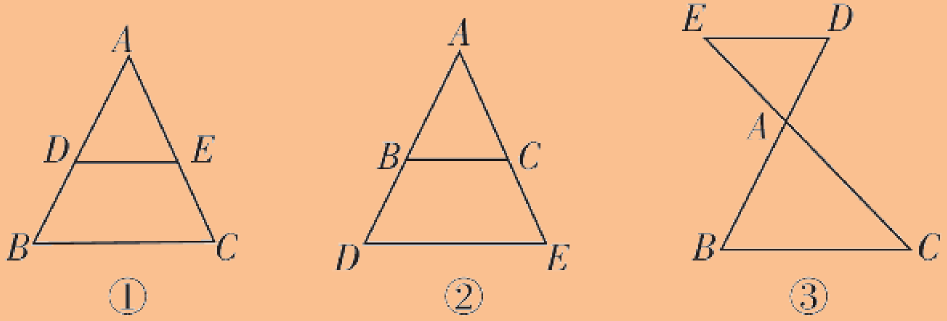


图 22.2-4

感悟新知

知2－练

例2 如图22.2-5，已知在▱$ABCD$中，E为AB延长线上的一点，$AB=3BE$，DE与BC相交于点F，请找出图中各对相似三角形，并求出相应的相似比.

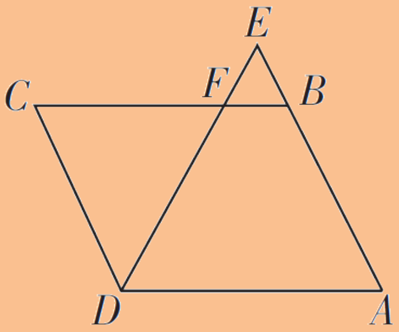


图 22.2–5

解题秘方：紧扣“平行线截三角形两边的两种基本图形——‘A’型和‘X’型”进行查找.

解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

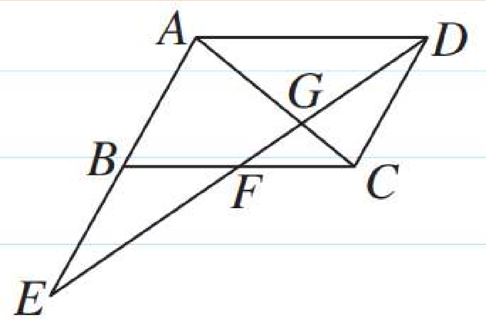
$\therefore AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，$AB=CD$.

$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle CDF$，$\triangle BEF \backsim \triangle AED$.$\therefore \triangle CDF \backsim \triangle AED$.

$\because AB=3BE$，$\therefore \triangle BEF$与$\triangle CDF$的相似比$k_1=\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1}{3}$；$\triangle BEF$与$\triangle AED$的相似比$k_2=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{4}$；$\triangle CDF$与$\triangle AED$的相似比$k_3=\dfrac{CD}{AE}=\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{3}{4}$.

知2－练

2-1.如图，在▱$ABCD$中，E是AB延长线上一点，连接DE，交AC于点G，交BC于点F，那么图中相似三角形(不含全等三角形)共有(　　) **B**



A.6 对　　B.5 对

C.4 对　　D.3 对

感悟新知

知2－练

例 3 如图22.2-6，在井口B处立一根垂直于井口的木杆BD，从木杆的顶端D观察井水水岸C，视线DC与井口的直径AB交于点E，如果测得$AB=1.6$ 米，$BD=1$ 米，$BE=0.2$ 米，那么AC为____7____米.

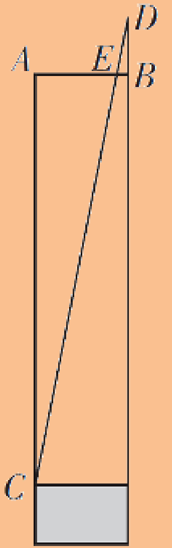


图 22.2-6

解题秘方：判断是用“平行线截线段成比例”，还是用“平行线截三角形相似的对应边成比例”解题是关键.

解：由题意知$BD\perp AB$，$AC\perp AB$，$\therefore BD\parallel AC$.

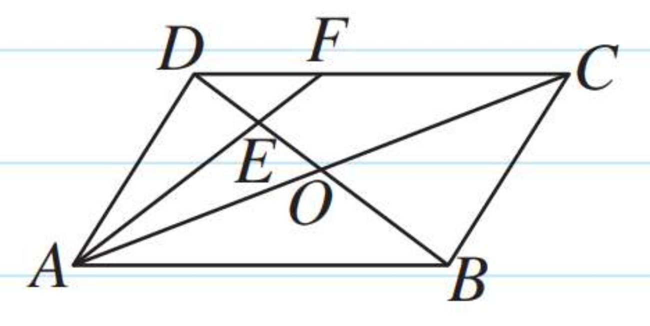
$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BDE$.

$\therefore \dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AE}{BE}$，即$\dfrac{AC}{1}=\dfrac{1.6-0.2}{0.2}$．$\therefore AC=7$ 米.

3-1.如图，在▱$ABCD$中，AC与BD相交于点O，E为OD的中点，连接AE并延长交DC于点F，则DF∶FC=(D)

A. 1∶4　　B. 1∶3

C. 2∶3　　D. 1∶2



知识点 3 利用角的关系判定三角形相似的定理

1. 定理　如果一个三角形的两个角分别与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似(可简单说成：两角分别相等的两个三角形相似).

数学表达式：如图22.2-7 所示，

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$\because \angle A=\angle D$，且$\angle B=\angle E$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

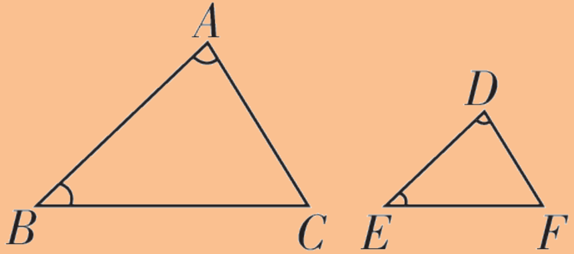


图 22.2–7

特别提醒

由两角分别相等判定两个三角形相似，其关键是找准对应角.一般地，相等的角是对应角．如：公共角、对顶角、同角(等角)的余角(补角)等都是相等的角，解题时要注意挖掘题目中的隐含条件.

感悟新知

知3－讲

2. 常见的相似三角形的类型

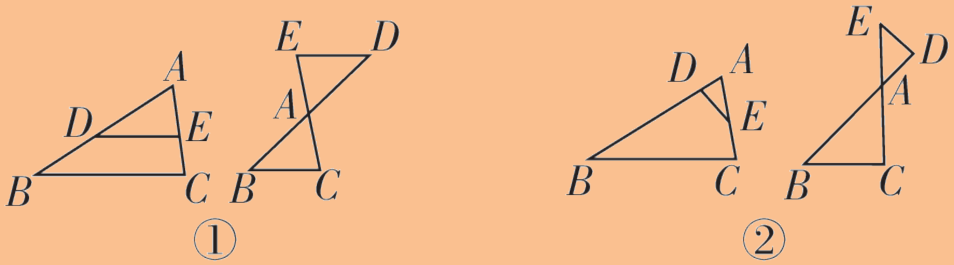
(1)平行线型：

如图22.2-8 ①，若$DE \parallel BC$，则$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$；

(2)相交线型：

如图22.2-8 ②，若$\angle AED = \angle B$，则$\triangle AED \backsim \triangle ABC$

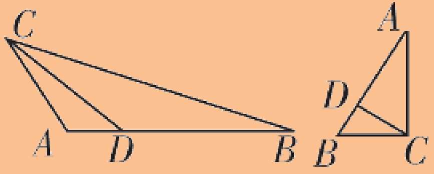
；



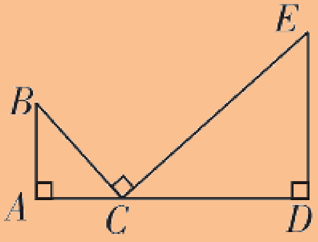
(3)“子母”型：

如图22.2-8 ③，若$\angle ACD=\angle B$，则$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$；

(4)“K ”型：如图22.2-8 ④，若点A，C，D共线，且$\angle A=\angle D=\angle BCE=90°$，则$\triangle ACB\backsim\triangle DEC$，图形整体像一个横放的字母K，所以称为“K ”型相似.



③



④

感悟新知

知3－练

例4 如图 22.2-9，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D，E 分别在 CB，AC 的延长线上，$\angle ADE=60°$.

求证：$\triangle ABD \backsim \triangle DCE$.

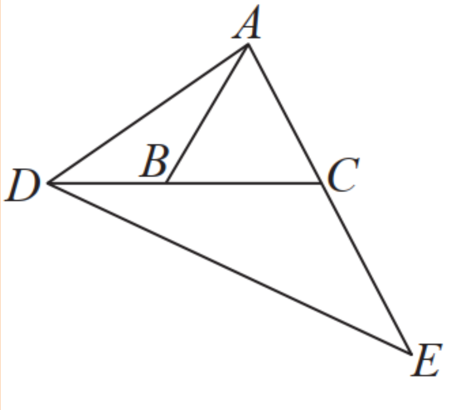


图 22.2-9

解题秘方：紧扣“两角分别相等的两个三角形相似”找到两组角对应相等即可.

证明： ∵$\angle ABC=\angle ACB=60°$,

∴$\angle ABD=\angle DCE=120°$.

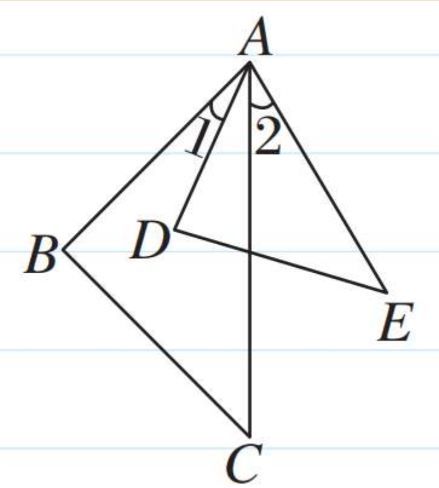
∵$\angle ADB+\angle DAB=\angle ABC=60°$,

$\angle ADB+\angle EDC=\angle ADE=60°$,

∴$\angle DAB=\angle EDC$. ∴$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$.

知3－练

4-1. [期末·六安]如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，$\angle C=\angle E$，$\angle 1=\angle 2$，证明：$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.



证明：$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 1+\angle DAC=\angle 2+\angle DAC$，

$\therefore \angle BAC=\angle DAE$.

又$\because \angle C=\angle E$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$.