第 1 章　勾股定理章末拔尖卷

【北师大版】

参考答案与试题解析

一．选择题（共 10 小题，满分 30 分，每小题 3 分）

1．（3 分）（2025 春·湖北随州·八班级统考期末）在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦．古希腊哲学家柏拉图争辩了勾为偶数，弦与股相差为 2 的一类勾股数，如：6，8，10；8，15，17…若此类勾股数的勾为$2m$（$m \geq 3$，m 为正整数），则其弦（结果用含m的式子表示）是（　　）

A．$4m^2-1$　　　B．$4m^2+1$　　　C．m^2-1　　　D．m^2+1

【答案】D

【分析】依据题意得$2m$为偶数，设其股是 a，则弦为$a+2$，依据勾股定理列方程即可得到结论．

【详解】解：∵m 为正整数，

∴$2m$为偶数，设其股是 a，则弦为$a+2$，

依据勾股定理得，$(2m)^2+a^2=(a+2)^2$，

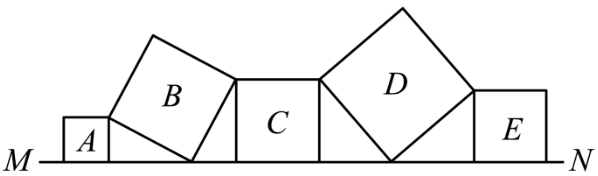
解得$a=m^2-1$，

∴弦是$a+2=m^2-1+2=m^2+1$，

故选：D．

【点睛】本题考查了勾股数，勾股定理，娴熟把握勾股定理是解题的关键．

2．（3 分）（2025 春·陕西西安·八班级西北高校附中校考期末）如图，五个正方形放在直线 MN 上，正方形 A、C、E 的面积依次为 3、5、4，则正方形 B、D 的面积之和为（　　）



A．11　　　B．14　　　C．17　　　D．20

【答案】C

【分析】如图：由题意可得$\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=90°,S_A=AB^2=3,S_C=DE^2=5,S_B=AC^2,AC=CE$，再依据全等三角形和勾股定理可得$S_B=S_C+S_A=5+3=8$，同理可得$S_D=S_C+S_E=5+4=9$，最终求正方形 B、D 的面积之和即可．

【详解】解：如图：

第 1 章　勾股定理章末拔尖卷

【北师大版】

参考答案与试题解析

一．选择题（共 10 小题，满分 30 分，每小题 3 分）

1．（3 分）（2025 春·湖北随州·八班级统考期末）在我国古代，人们将直角三角形中短的直角边叫做勾，长的直角边叫做股，斜边叫做弦．古希腊哲学家柏拉图争辩了勾为偶数，弦与股相差为 2 的一类勾股数，如：6，8，10；8，15，17…若此类勾股数的勾为$2m$（$m\geq 3$，m 为正整数），则其弦（结果用含m的式子表示）是（　　）

A．$4m^2-1$　　B．$4m^2+1$　　C．m^2-1　　D．m^2+1

【答案】D

【分析】依据题意得$2m$为偶数，设其股是 a，则弦为$a+2$，依据勾股定理列方程即可得到结论．

【详解】解：∵m 为正整数，

∴$2m$为偶数，设其股是 a，则弦为$a+2$，

依据勾股定理得，$(2m)^2+a^2=(a+2)^2$，

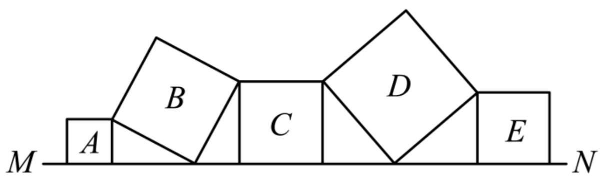
解得$a=m^2-1$，

∴弦是$a+2=m^2-1+2=m^2+1$，

故选：D．

【点睛】本题考查了勾股数，勾股定理，娴熟把握勾股定理是解题的关键．

2．（3 分）（2025 春·陕西西安·八班级西北高校附中校考期末）如图，五个正方形放在直线 MN 上，正方形 A、C、E 的面积依次为 3、5、4，则正方形 B、D 的面积之和为（　　）



A．11　　B．14　　C．17　　D．20

【答案】C

【分析】如图：由题意可得$\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=90°,S_A=AB^2=3,S_C=DE^2=5,S_B=AC^2,AC=CE$，再依据全等三角形和勾股定理可得$S_B=S_C+S_A=5+3=8$，同理可得$S_D=S_C+S_E=5+4=9$，最终求正方形 B、D 的面积之和即可．

【详解】解：如图：

由题意可得：$\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=90^\circ,S_A=AB^2=3,S_C=DE^2=5,S_B=AC^2,AC=CE$

$\therefore\angle BAC+\angle ACB=90^\circ,\angle DCE+\angle ACB=90^\circ,$

$\therefore\angle BAC=\angle DCE$，

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle CDE$，

$\therefore DE=BC$，

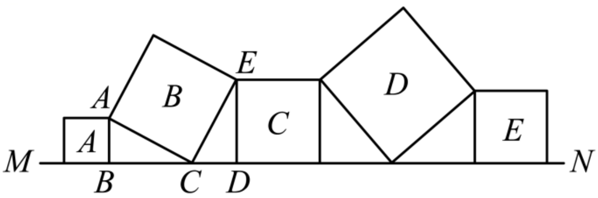
$\because\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore AC^2=BC^2+AB^2$，

$\therefore AC^2=DE^2+AB^2$，即$S_B=S_C+S_A=5+3=8$，

同理：$S_D=S_C+S_E=5+4=9$；

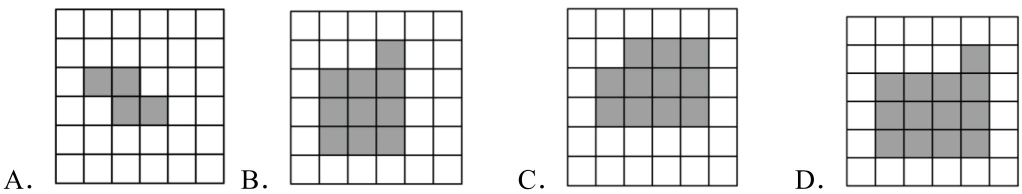
$\therefore S_D+S_B=8+9=17$．



故选 C．

【点睛】本题主要考查了勾股定理、正方形的性质、全等三角形的判定与性质，发觉各正方形之间的面积关系是解答本题的关键．

3．（3 分）（2025 春·江西宜春·八班级统考期末）观看下列各方格图中阴影部分所示的图形（每个方格的边长为 1），假如将它们沿方格边线或对角线剪开后无缝拼接，不能拼成正方形的是（　　）



【答案】C

【分析】依据网格的特点分别计算阴影部分的面积即可求得拼接后的正方形的边长，依据网格的特点能否找到构成边长的格点即可求解．

【详解】解：A．阴影部分面积为 4，则正方形的边长为2，故能拼成正方形，不符合题意；

B.阴影部分面积为 10，则正方形的边长为$\sqrt{10}$，

$\because\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

故能拼成正方形，不符合题意；

C.阴影部分面积为11，则正方形的边长为$\sqrt{11}$，依据网格的特点不能构造出$\sqrt{11}$的边，故不能拼成正方形，符合题意

D. 阴影部分面积为 13，则正方形的边长为$\sqrt{13}$，

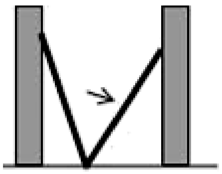
$\because \sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

故能拼成正方形，不符合题意；

故选 C．

【点睛】本题考查了网格与勾股定理，把握勾股定理是解题的关键．

4．（3 分）（2025 春·四川成都·八班级校考期中）如图，小巷左右两侧是竖直的墙，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙角的距离为 0.7 米，顶端距离地面 2.4 米，假如保持梯子底端位置不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面 2 米，则小巷的宽度为(　)

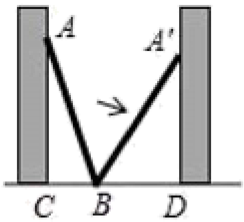


A．2.2 米　　　B．2.3 米　　　C．2.4 米　　　D．2.5 米

【答案】A

【分析】将梯子斜靠在墙上时，形成的图形看做直角三角形，依据勾股定理，直角边的平方和等于斜边的平方，可以求出梯子的长度，再次利用勾股定理即可求出梯子底端到右墙的距离，从而得出答案．

【详解】



如图，在 Rt△ACB 中，

∵∠ACB=90°，BC=0.7 米，AC=2.4 米，$AB^2=AC^2+BC^2$

∴$AB^2=0.7^2+2.4^2=6.25$

在 Rt△A'BD 中，

∵∠A'BD=90°，A'D=2 米，$BD^2+A'D^2=A'B^2$

∴$BD^2+2^2=6.25$

∴$BD^2=2.25$

∵BD>0，

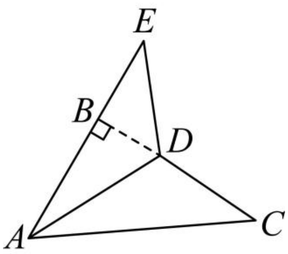
∴BD=1.5 米，

∴CD=BC+BD=0.7+1.5=2.2 米

即小巷的宽度为 2.2 米，故答案选 A

【点睛】本题考查的是勾股定理，熟知并娴熟运用勾股定理求斜边和直角边是解题的关键

5.（3 分）（2025 春·北京怀柔·八班级统考期末）如图，在Rt△ABC中，$\angle ABC=90°$，$AB=3$，$AC=5$，AD为$\angle BAC$的平分线，将△DAC沿AD向上翻折得到△DAE，使点E在射线AB上，则DE的长为（　　）



A．2　　　　B．$\frac{5}{2}$　　　　C．5　　　　D．$\frac{25}{4}$

【答案】B

【分析】依据勾股定理求得BC，进而依据折叠的性质可得$AE=AC$，可得$BE=2$，设$DE=x$，表示出BD,DE，进而在Rt△BDE中，勾股定理列出方程，解方程即可求解．

【详解】解：∵在Rt△ABC中，$\angle ABC=90°$，$AB=3$，$AC=5$，

∴$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∵将△DAC沿AD向上翻折得到△DAE，使点E在射线AB上，

∴$AE=AC$，

设$DE=x$，则$DC=DE=x,BD=BC-CD=4-x$，$BE=AE-AB=5-3=2$，

在Rt△BDE中，$BD^2+BE^2=DE^2$，

即$(4-x)^2+2^2=x^2$，

解得：$x=\frac{5}{2}$

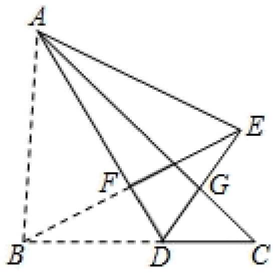
即DE的长为$\frac{5}{2}$，

故选：B．

【点睛】本题考查了勾股定理与折叠问题，娴熟把握勾股定理是解题的关键．

6．（3 分）（2025 春·广东深圳·八班级深圳市高级中学校考期末）如图，三角形纸片 ABC 中，点 D 是 BC 边上一点，连接 AD，把△ABD 沿着直线 AD 翻折，得到△AED，DE 交 AC 于点 G，连接 BE 交 AD 于点

F．若 DG＝EG，AF＝4，AB＝5，$\triangle AEG$ 的面积为$\frac{9}{2}$，则BD^2的值为（ ）



A．13　　B．12　　C．11　　D．10

【答案】A

【分析】首先依据 SAS 证明$\triangle BAF\cong\triangle EAF$ 可得 $AF\perp BE$，依据三角形的面积公式求出 AD，依据勾股定理求出 BD 即可．

【详解】解：由折叠得，$AB=AE$，$\angle BAF=\angle EAF$，

在$\triangle BAF$ 和$\triangle EAF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AE \\ \angle BAF=\angle EAF \\ AF=AF \end{cases},$$

$\therefore\triangle BAF\cong\triangle EAF(SAS)$，

$\therefore BF=EF$，

$\therefore AF\perp BE$，

又$\because AF$＝4，AB＝5，

$\therefore BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=3$，

在$\triangle ADE$ 中，$EF\perp AD$，DG＝EG，设 DE 边上的高线长为 h，

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot EF=\frac{1}{2}DG\cdot h+\frac{1}{2}EG\cdot h$，

即$S_{\triangle ADG}+S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}AD\cdot EF$，

$\because S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}\cdot GE\cdot h=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle ADG}=S_{\triangle AEG}$，

$\therefore S_{\triangle ADG}+S_{\triangle AEG}=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=9$，

$\therefore 9=\frac{1}{2}AD\cdot 3$，

$\therefore AD=6$，

$\therefore FD=AD-AF=6-4=2$，

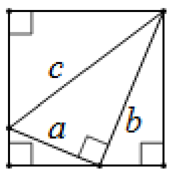
在 $Rt\triangle BDF$ 中，$BF=3$，$FD=2$，

$\therefore BD^2=BF^2+FD^2=3^2+2^2=13$，

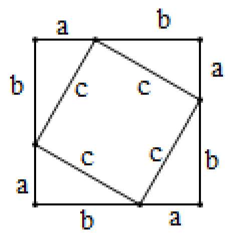
故选：A．

【点睛】本题考查翻折变换、三角形的面积、勾股定理、全等三角形的判定与性质等学问，运用三角形的面积求出 AD 的长度是解答本题的关键．

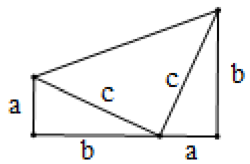
7．（3 分）（2025 春·山西运城·八班级统考期中）图中不能证明勾股定理的是（　　）



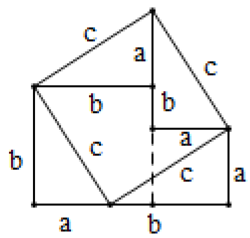
A．



B．



C．



D．

【答案】A

【分析】依据各个图象，利用面积的不同表示方法，列式证明结论$a^2+b^2=c^2$，找出不能证明的那个选项．

【详解】解：A 选项不能证明勾股定理；

B 选项，通过大正方形面积的不同表示方法，可以列式$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$，可得$a^2+b^2=c^2$；

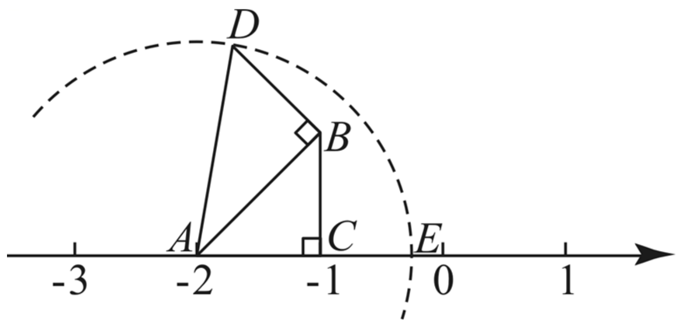
C 选项，通过梯形的面积的不同表示方法，可以列式$\frac{(a+b)^2}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，可得$a^2+b^2=c^2$；

D 选项，通过这个不规章图象的面积的不同表示方法，可以列式$c^2+2\times\frac{1}{2}ab=a^2+b^2+2\times\frac{1}{2}ab$，可得$a^2+b^2=c^2$．

故选：A．

【点睛】本题考查勾股定理的证明，解题的关键是把握勾股定理的证明方法．

8．（3 分）（2025 春·河北唐山·八班级统考期中）如图，将有一边重合的两张直角三角形纸片放在数轴上，纸片上的点 A 表示的数是-2，$AC=BC=BD=1$，若以点 A 为圆心，AD的长为半径画弧，与数轴交于点 E（点 E 位于点 A 右侧)，则点 E 表示的数为（　　）



A．$\sqrt{3}$　　B．$-2+\sqrt{3}$　　C．$-1+\sqrt{3}$　　D．$-\sqrt{3}$

【答案】B

【详解】依据勾股定理得：$AB=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}$，

∴$AE=\sqrt{3}$，

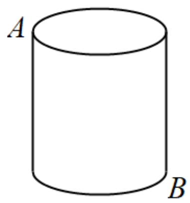
∴$OE=2-\sqrt{3}$，

∴点E表示的数为$-2+\sqrt{3}$.

故答案为：B.

【点睛】此题主要考查了勾股定理，以及数轴与实数，解题时求数轴上两点间的距离应让较大的数减去较小的数即可,本题的关键是求出 AE 的长.

9．（3 分）（2025 春·山东泰安·八班级统考期末）如图，一个底面周长为 $24cm$，高为 $5cm$的圆柱体，一只蚂蚁沿侧表面从点A到点B所经过的最短路线长为（　）



A．$12cm$　　B．$13cm$　　C．$25cm$　　D．$26cm$

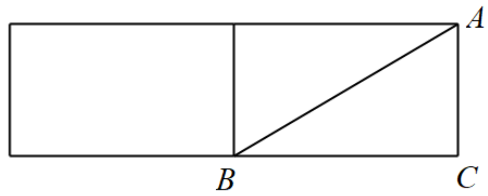
【答案】B

【分析】先将圆柱圆的侧面沿着点 A 所在的棱线剪开，得到长方形，得到 AC=5cm,BC=$\frac{24}{2}=12$cm，由此即可以利用勾股定理求出蚂蚁爬行的最短路线 AB 的长.

【详解】如图，沿着点 A 所在的棱线剪开，此时 AC=5cm,BC=$\frac{24}{2}=12$cm，

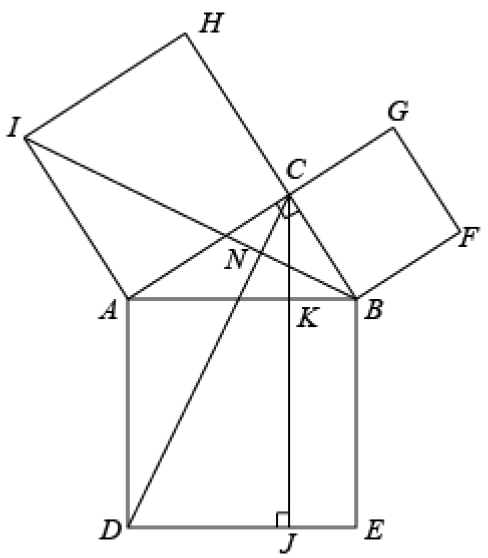
∴蚂蚁爬行的最短路线 AB=$\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$cm，

故选：B.



【点睛】此题考查勾股定理，依据题意构建直角三角形是解题的关键.蚂蚁爬行的路线问题，是将蚂蚁爬行的面开放得到平面图形，利用“两点之间线段最短“将起点与终点连接成线段，再求出该线段的长度即可解决问题.

10．（3 分）（2025 春·全国·八班级期中）勾股定理是人类早期发觉并证明的重要数学定理之一，是数形结合的重要纽带．数学家欧几里得利用下图验证了勾股定理．以直角三角形 ABC 的三条边为边长向外作正方形 $ACHI$，正方形 $ABED$，正方形 $BCGF$，连接 BI，CD，过点 C 作 $CJ\perp DE$ 于点 J，交 AB 于点 K．设正方形 $ACHI$ 的面积为 S_1，正方形 $BCGF$ 的面积为 S_2，矩形 $AKJD$ 的面积为 S_3，矩形 $KJEB$ 的面积为 S_4，下列结论中：①$BI\perp CD$；②$S_1:S_{\triangle ACD}=2:1$；③$S_1-S_4=S_3-S_2$；　④$S_1S_4=S_3S_2$，正确的结论有（　）



A．1 个　　　B．2 个　　　C．3 个　　　D．4 个

【答案】D

【分析】利用正方形的性质证明$\triangle ABI\cong\triangle ADC$，得出$\angle AIB=\angle ACD$，即可得出$\angle CNI=\angle NAI$，即可推断①，利用$\triangle ABI\cong\triangle ADC$，即可求出$\triangle ABI$的面积，即可推断②，由勾股定理和 $S_3+S_4=S_{\text{▫}ABED}$，即可推断③，由③$S_1-S_4=S_3-S_2$，两边平方，依据勾股定理可得$AC^2-BC^2=AK^2-BK^2$，然后计算${S_1}^2+{S_4}^2-({S_2}^2+{S_3}^2)=0$，即可推断④.

【详解】解：∵四边形 $ACHI$ 和四边形 $ABED$ 为正方形，

∴$AI=AC$，$AD=AB$，$\angle CAI=\angle BAD=90°$，

$\because \angle BAI=\angle BAC+\angle CAI$，$\angle DAC=\angle BAC+\angle BAD$，

$\therefore \angle BAI=\angle DAC$，

$\therefore \triangle ABI\cong\triangle ADC$（SAS），

$\therefore \angle AIB=\angle ACD$，

$\because \angle CNI=\angle CAI=90°$，

$\therefore BI\perp CD$，

故①正确；

$\because S_{\triangle}ACD=S_{\triangle}AIB=\frac{1}{2}\times AI\times AC$，$S_{正方形}ACHI=S_1=AI\times AC$，

$\therefore S_1$：$S_{\triangle}ACD=2$：1，

故②正确；

$\because S_1=AC^2$，$S_2=BC^2$，$S_3+S_4=S_{正方形}ADEB=AB^2$，$AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore S_1+S_2=S_3+S_4$，

$\therefore S_1-S_4=S_3-S_2$，

故③正确；

$\because$ $S_1-S_4=S_3-S_2$，

$\therefore S_1{}^2+S_4{}^2-2S_1S_4=S_2{}^2+S_3{}^2-2S_2S_3$，

$\because S_1=AC^2$，$S_2=BC^2$，$S_3=AK\bullet KJ=AK\bullet AB$，$S_4=BK\bullet KJ=BK\bullet AB$，

$\therefore$ $S_1{}^2+S_4{}^2=AC^4+AB^2BK^2$，$S_2{}^2+S_3{}^2=BC^4+AK^2AB^2$，

$\because AB^2=AC^2+BC^2$，$AC^2=AK^2+CK^2, BC^2=BK^2+CK^2$，

$\therefore AC^2-AK^2=BC^2-BK^2$，

即$AC^2-BC^2=AK^2-BK^2$，

$\therefore$ $S_1{}^2+S_4{}^2-(S_2{}^2+S_3{}^2)$ $=AC^4+AB^2BK^2-(BC^4+AK^2AB^2)$

$=AC^4-BC^4+AB^2(BK^2-AK^2)$

$=(AC^2+BC^2)(AC^2-BC^2)-AB^2(AC^2-BC^2)$

$=AB^2(AC^2-BC^2)-$ $AB^2(AC^2-BC^2)$

$=0$，

$\therefore S_1\bullet S_4=S_2\bullet S_3$，

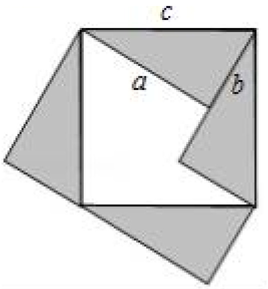
故④正确，

故选 D．

【点睛】本题考查勾股定理的证明，解题的关键是娴熟把握证明三角形全等的条件，勾股定理的运用，完全平方公式的变形．

二．填空题（共 6 小题，满分 18 分，每小题 3 分）

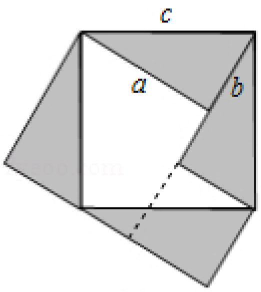
11．（3 分）（2025 春·北京·八班级北京四中校考期中）小明将 4 个全等的直角三角形拼成如图所示的五边形，添加适当的帮助线后，用等面积法建立等式证明勾股定理．小明在证题中用两种方法表示五边形的面积，分别是 S_1=____，S_2=____．



【答案】　c^2+ab　　a^2+b^2+ab

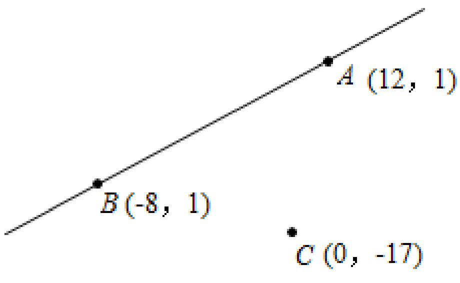
【详解】解：如图所示：$S_1=c^2+\frac{1}{2}ab\times2=c^2+ab$，$S_2=a^2+b^2+\frac{1}{2}ab\times2=a^2+b^2+ab$．

故答案为 c^2+ab，a^2+b^2+ab．



【点睛】本题考查了利用图形面积的关系证明勾股定理，解题的关键是利用三角形和正方形边长的关系进行组合图形．

12．（3 分）（2025 春·河北承德·八班级统考期末）勘测队按实际需要构建了平面直角坐标系，并标示了 A，B，C 三地的坐标，数据如图（单位：km）．笔直铁路经过 A，B 两地．



（1）A，B 间的距离______km；