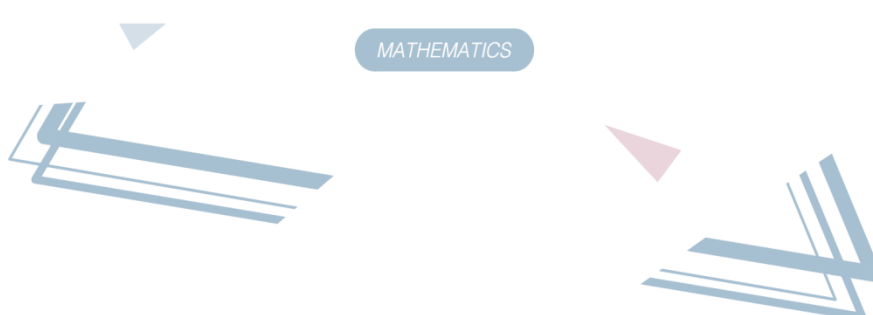




第十一讲

直角三角形的
存在性问题

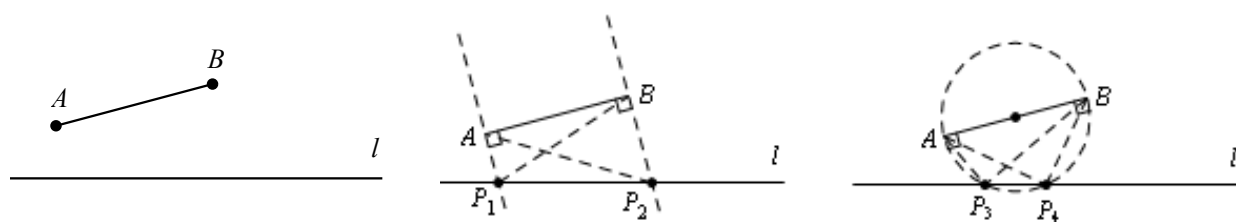


MATHEMATICS

知识要点

直角三角形的存在性问题解题策略：

- ✧ 几何法（三部曲）：先分类，再画图，后计算；
- ✧ 代数法（三部曲）：先罗列三边代数式，再分类由勾股定理列方程，后解方程、检验；
- ✧ 几何与代数相结合：几何法是确定目标（画出位置）、代数法是准确定位（计算长度）。两者相结合又快又好。



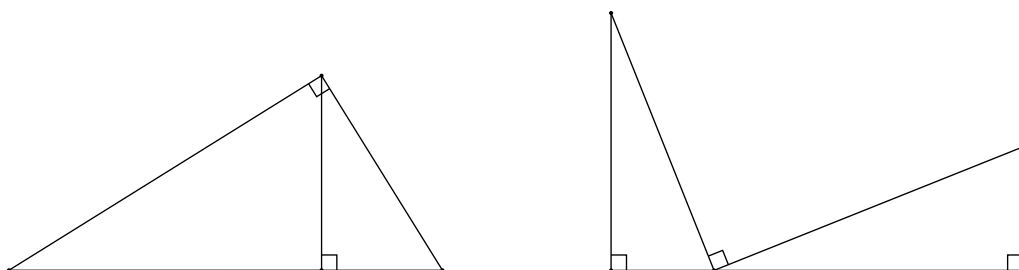
如上图，已知线段 AB 和直线 l ，在直线 l 上找点 P ，使 $\triangle ABP$ 为直角三角形。

分类标准：一般按照直角顶点或斜边分类

※解题工具：

- ① 勾股定理（两点间距离公式）
- ② 三角比
- ③ 直角三角形斜边中线等于斜边一半
- ④ 相似（三垂直）
- ⑤ $k_1 \cdot k_2 = -1$ （中考慎用）

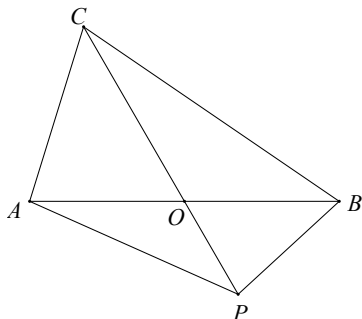
与直角相关的相似模型。



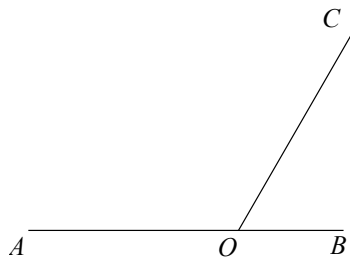
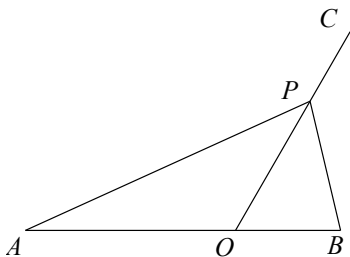
例题精讲

【例题1】 ★★★

- (1) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 4$ ， $AO = BO$ ， P 是射线 CO 上的一个动点， $\angle AOC = 60^\circ$ ，则当 $\triangle APB$ 为直角三角形时， AP 的长为_____.



- (2) 如图，点 O 在线段 AB 上， $AO = 2$ ， $OB = 1$ ， OC 为射线，且 $\angle BOC = 60^\circ$ ，动点 P 以每秒 2 个单位长度的速度从点 O 出发，沿射线 OC 做匀速运动，设运动时间为 t 秒. 当 $\triangle ABP$ 是直角三角形时，求 t 的值.



【分析】 (1) 【2015 南昌中考】 $2\sqrt{7}$ 或 $2\sqrt{3}$ 或 2

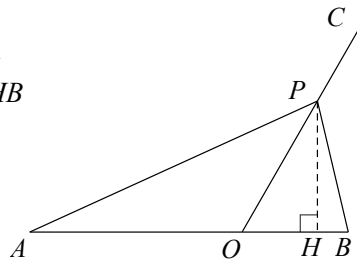
(2) $\angle PAB < \angle POB < 90^\circ$

① 当 $\angle ABP = 90^\circ$ 时， $\because \angle BOC = 60^\circ$ ， $\therefore OP = 2OB = 2$ ，即 $t = 1$

② 当 $\angle APB = 90^\circ$ 时，过 P 作 $PH \perp AB$ 交于 H 点， $PH^2 = AH \cdot HB$

$$\therefore t_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}, t_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \text{ (舍)}$$

综上所述，当 $\triangle ABP$ 是直角三角形时， $t = 1$ 或 $\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$.



模块一 坐标系内的直角三角形存在性问题

【例题2】 【自招班】★★

已知抛物线 $y = ax^2 - \frac{11}{2}ax + 6a$ ($a < 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 且 $OC = 2OA$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 求点 A 到直线 BC 的距离;

(3) 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折, 使点 B 和 B' 重合, 联结 BB' , 点 Q 是 BB' 的中点, 在抛物线上是

否存在一点 P , 使 $\triangle QCP$ 是以 QC 为直角边的直角三角形? 如果存在, 求出点 P 的坐标; 如

果不存在, 请说明理由.

【分析】 (1) 当 $y = 0$ 时, $ax^2 - \frac{11}{2}ax + 6a = 0$, 解得, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 4$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 0)$, 点 B 的坐标为 $(4, 0)$

$\therefore OA = \frac{3}{2}$, 即 $OC = 2OA = 3$

当 $x = 0$ 时, $y = 6a$, $\therefore |6a| = 3$, 即 $a = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x - 3$

(2) 作 $AH \perp BC$ 于 H , $\therefore \sin \angle OBC = \frac{AH}{AB} = \frac{OC}{BC} = \frac{3}{5}$

$\therefore AH = \frac{3}{2}$, 即点 A 到直线 BC 的距离为 $\frac{3}{2}$

(3) $\because BC = B'C$, $BQ = B'Q$ $\therefore BQ \perp CQ$

易知: $B'(0, 2)$ $\therefore$ 直线 BB' : $y = -\frac{1}{2}x + 2$

① $\angle CQP = 90^\circ$ 时: P 在直线 BB' 上, 联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x - 3 \end{cases}$, 解得 $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 4$

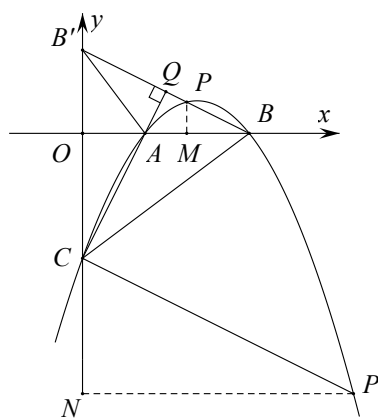
$\therefore P$ 的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4})$ 或 $(4, 0)$

② $\angle QCP = 90^\circ$ 时: $CP \parallel BB'$ $\therefore k_{CP} = -\frac{1}{2}$ 可求得直线 CP : $y = -\frac{1}{2}x - 3$,

联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x - 3 \end{cases}$, 解得 $x_1 = \frac{13}{2}$, $x_2 = 0$

$\therefore P$ 的坐标为 $(\frac{13}{2}, -\frac{25}{4})$

综上所述, P 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4})$, $(4, 0)$, $(\frac{13}{2}, -\frac{25}{4})$



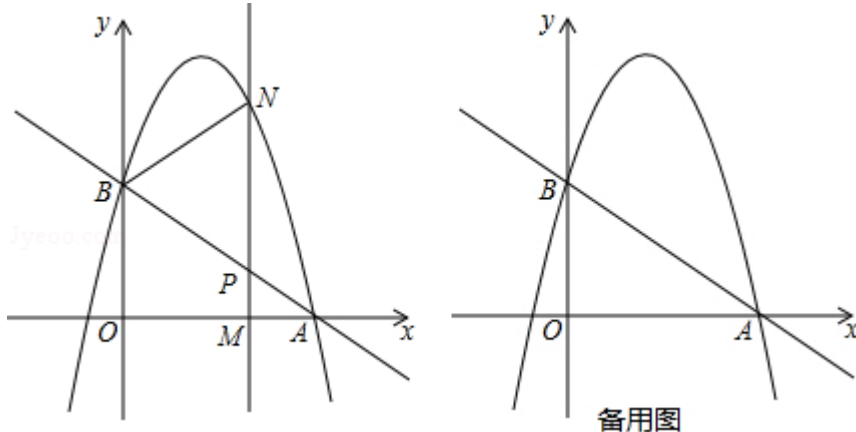
【例题3】 ★★★

如图, 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 过点 $A(3,0)$ 、 $B(0,2)$. $M(m,0)$ 为线段 OA 上一个动点 (点 M 与点 A 不重合), 过点 M 作垂直于 x 轴的直线与直线 AB 和抛物线分别交于点 P 、 N .

(1) 求直线 AB 的解析式和抛物线的解析式;

(2) 如果点 P 是 MN 的中点, 那么求此时点 N 的坐标;

(3) 如果以 B 、 P 、 N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似, 求点 M 的坐标.



【分析】 (1) 直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x + 2$;

$$\text{把 } A(3,0), B(0,2) \text{ 代入 } y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c \text{ 得 } \begin{cases} -\frac{4}{3} \times 3^2 + 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = \frac{10}{3} \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{ 抛物线解析式为 } y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2;$$

$$(2) \because M(m,0), MN \perp x \text{ 轴} \therefore N\left(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2\right), P\left(m, -\frac{2}{3}m + 2\right),$$

$$\therefore NP = -\frac{4}{3}m^2 + 4m, PM = -\frac{2}{3}m + 2,$$

$$\text{而 } NP = PM, \text{ 得 } -\frac{4}{3}m^2 + 4m = -\frac{2}{3}m + 2, \text{ 解得 } m_1 = 3 \text{ (舍去)}, m_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore N \text{ 点坐标为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right);$$

$$(3) \text{ ① 若 } \angle BNP = \angle AMP = 90^\circ, \text{ 则 } BN \parallel x \text{ 轴} \therefore N\left(\frac{5}{2}, 2\right) \therefore M\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{② 若 } \angle NBP = 90^\circ, \text{ 作 } ND \perp y \text{ 轴于 } D, \text{ 则 } \triangle NDB \sim \triangle BOA \text{ (三垂直)}$$

$$\text{得 } \frac{ND}{OB} = \frac{DB}{OA}, \text{ 即 } \frac{m}{2} = \frac{-\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m}{3}, \text{ 解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去)}, m_2 = \frac{11}{8},$$

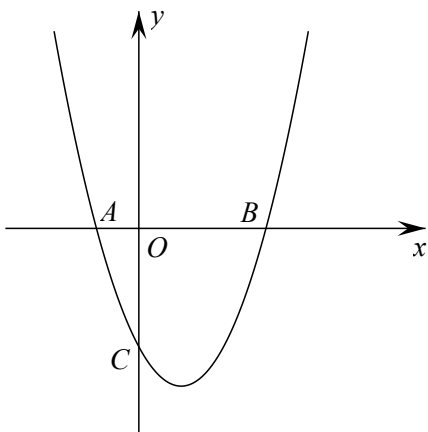
$$\text{此时 } M \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{11}{8}, 0\right);$$

$$\text{综上所述, 点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{11}{8}, 0\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

★★★

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 与 x 轴相交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x = 1$ 。

- (1) 求点 C 的坐标（用含 a 的代数式表示）；
- (2) 联结 AC 、 BC ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 6，求此抛物线的表达式；
- (3) 在第(2)小题的条件下，点 Q 为 x 轴正半轴上一点，点 G 与点 C ，点 F 与点 A 关于点 Q 成中心对称，当 $\triangle CGF$ 为直角三角形时，求点 Q 的坐标。



【分析】 【2018 青浦一模】

- (1) $y = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$ ，点 $C(0, -3a)$
- (2) 由 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3a = 6$ 得 $a = 1$ ， $\therefore y = x^2 - 2x - 3$
- (3) 设点 Q 的坐标为 $(m, 0)$ 。过点 G 作 $GH \perp x$ 轴，垂足为点 H 。

由题意知， $G(2m, 0)$ ， $F(2m+1, 0)$ ， $C(0, -3)$

$$\therefore FG^2 = 10, CF^2 = (2m+1)^2 + 9, CG^2 = 4m^2 + 36$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \angle CGF = 90^\circ \text{ 时, } 4m^2 + 36 + 10 = (2m+1)^2 + 9, \text{ 解得 } m = 9$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \angle CFG = 90^\circ \text{ 时, } FQ = \frac{1}{2}CG, \text{ 即 } (m+1)^2 = m^2 + 9, \text{ 解得 } m = 4$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } \angle GCF = 90^\circ \text{ 时, } (2m+1)^2 + 9 + 4m^2 + 36 = 10, \text{ 无解}$$

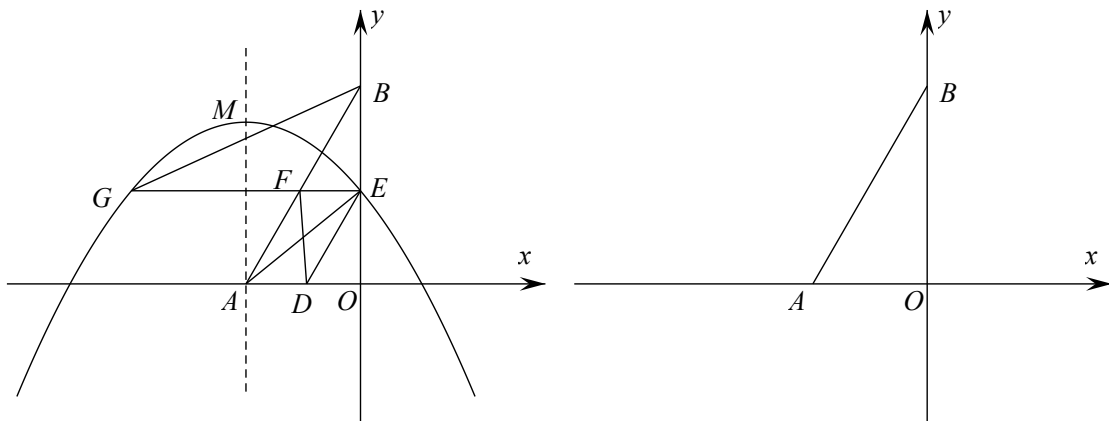
综上所述， $Q(9, 0)$ 或 $(4, 0)$ 。

提示：可以用三垂直相似解决。

【例题4】 【自招A】★★★★

已知 如图, 直线 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 动点 D 从 A 点出发向 O 点运动 (运动到 O 点停止), 过 D 作 $DE \parallel AB$ 交 y 轴于点 E ; 对称轴过点 A 且顶点为 M 的抛物线 $y = a(x-k)^2 + h$ ($a < 0$) 始终经过点 E , 过 E 作 $EG \parallel OA$ 交抛物线于点 G , 交 AB 于点 F , 联结 DE 、 DF 、 AE 、 BG . 设 D 的运动速度是1个单位长度/秒, 运动时间为 t 秒.

- (1) 用含 t 代数式分别表示 EF 、 BE 、 AF 的长;
- (2) 在整个运动过程中是否存在点 D , 令 $AE \parallel BG$? 若存在, 求出 t 的值, 并判断此时四边形 $ADEF$ 的形状且说明理由; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 当 $\triangle ADF$ 是直角三角形, 且抛物线的顶点 M 恰好在 BG 上时, 求抛物线的解析式.



【分析】 【2015·衢州一模】

(1) $EF = AD = t$; $BE = \sqrt{3}t$; $AF = DE = 2 - 2t$

(2) 法一:

$\because AE \parallel BG$; $\therefore \triangle AOE \sim \triangle GEB$

$$\therefore \frac{GE}{AO} = \frac{BE}{EO}, \text{ 即 } \frac{GE}{1} = \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3}(1-t)}; \therefore GE = \frac{t}{1-t}$$

又 $\because G$ 、 E 关于直线 $x = -1$ 对称; $\therefore t = \frac{2}{3}$, 此时四边形 $ADEF$ 为菱形

法二: 使用8字型, $\triangle FGB \sim \triangle FEA$

(3) $\angle FAD = 60^\circ$

① 当 $\angle ADF = 90^\circ$ 时; 此时 $OD = EF = AD = t$, $\therefore t = \frac{1}{2}$

$$G\left(-2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B(0, \sqrt{3}) \Rightarrow BG: y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \sqrt{3}, \therefore M\left(-1, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ 为顶点}$$

$$\text{又 } \because E\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x+1)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

② 当 $\angle AFD = 90^\circ$ 时,

$$\text{此时, } DE = AF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}t, OD = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{4}t; \therefore t = \frac{4}{5}$$

$$\text{类情况①, } M\left(-1, \frac{3\sqrt{3}}{5}\right); \therefore y = -\frac{2\sqrt{3}}{5}(x+1)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

$\therefore$ 综上所述, 抛物线解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x+1)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 或 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{5}(x+1)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{5}$

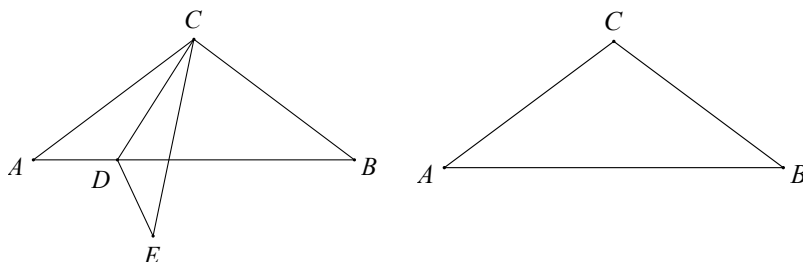
模块二 几何背景下的直角三角形存在性问题

【例题5】 ★★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CA=CB$ ， $AB=8$ ， $\cos A=\frac{4}{5}$ ，点 D 是 AB 边上的一个动点，点 E 与点 A

关于直线 CD 对称，联结 CE 、 DE 。

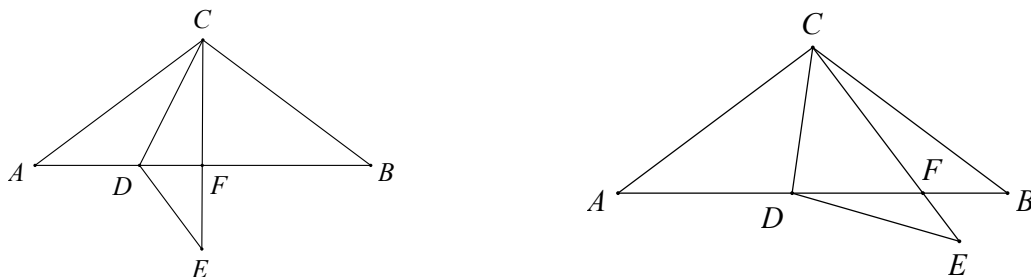
- (1) 求底边 AB 上的高；
- (2) 设 CE 与 AB 交于点 F ，当 $\triangle ACF$ 为直角三角形时，求 AD 的长；
- (3) 联结 AE ，当 $\triangle ADE$ 是直角三角形时，求 AD 的长。



【分析】 (1) 易得，底边 AB 上的高为3

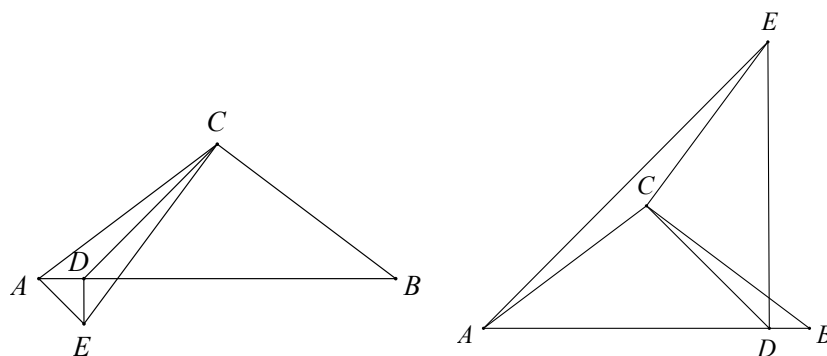
(2) 当 $\angle AFC$ 为 90° 时， CD 为 $\angle ACF$ 的平分线，易得， $AD=\frac{5}{2}$

当 $\angle ACF=90^\circ$ 时， $\angle ACD=\angle DCF=45^\circ$ ，易得， $AD=\frac{25}{7}$



(3) 当 $\angle ADC=135^\circ$ 时， $\triangle ADE$ 为直角三角形，易得， $AD=1$

当 $\angle ADC=45^\circ$ 时， $\triangle ADE$ 为直角三角形，易得， $AD=7$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/048033110132006130>