§2.4　函数的对称性

考试要求

1.能通过平移，分析得出一般的轴对称和中心对称公式和推论.

2.会利用对称公式解决问题.

内容索引

第一部分

落实主干知识

知识梳理

1.奇函数、偶函数的对称性

(1)奇函数关于__原点__对称，偶函数关于__y轴__对称.

(2)若$f(x-2)$是偶函数，则函数$f(x)$图象的对称轴为__$x=-2$__；若$f(x-2)$是奇函数，则函数$f(x)$图象的对称中心为__$(-2,0)$__.

2.若函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称，则$f(a-x)=f(a+x)$；

若函数$y=f(x)$满足$f(a-x)=-f(a+x)$，则函数的图象关于点__$(a,0)$__对称.

3.两个函数图象的对称

(1)函数$y=f(x)$与$y=f(-x)$关于__y轴__对称；

(2)函数$y=f(x)$与$y=-f(x)$关于__x轴__对称；

(3)函数$y=f(x)$与$y=-f(-x)$关于__原点__对称.

思考辨析

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)函数$y=f(x+1)$是偶函数，则函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=1$对称.

(√)

(2)函数$y=f(x-1)$是奇函数，则函数$y=f(x)$的图象关于点(1,0)对称.(×)

(3)若函数$f(x)$满足$f(x-1)+f(x+1)=0$，则$f(x)$的图象关于y轴对称.(×)

(4)若函数$f(x)$满足$f(2+x)=f(2-x)$，则$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称.

(√)

教材改编题

1.函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$图象的对称中心为

A.(0,0)　　　　B.(0,1)

C.(1,0)　　　　D.(1,1)

解析

因为 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$，由 $y=\dfrac{1}{x}$向上平移一个单位长度得到 $y=1+\dfrac{1}{x}$，

又 $y=\dfrac{1}{x}$关于(0,0)对称，

所以 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$的图象关于(0,1)对称.

教材改编题

2.已知定义在**R**上的函数$f(x)$在$[-2，+\infty)$上单调递减，且$f(-2-x)=f(-2+x)$，则$f(-4)$与$f(1)$的大小关系为__$f(-4)>f(1)$__.

解析

$\because f(-2-x)=f(-2+x)$，

$\therefore f(x)$关于直线$x=-2$对称，

又$f(x)$在$[-2，+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(-4)=f(0)>f(1)$，

故$f(-4)>f(1)$.

教材改编题

3.偶函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，且当$x\in[2,3]$时，$f(x)=2x-1$，则$f(-1)=$__5__.

解析

$\because f(x)$为偶函数，

$\therefore f(-1)=f(1)$，

由$f(x)$的图象关于$x=2$对称，

可得$f(1)=f(3)=2\times3-1=5$.

返回

第二部分

探究核心题型

例1 (1)已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$是奇函数，对$x\in\mathbf{R}$都有$f(x+1)=f(1-x)$，当$f(-3)=-2$时，则$f(2\ 023)$等于

A. -2　　B. 2

C. 0　　D. -4

解析

定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$是奇函数，且对$x\in\mathbf{R}$都有$f(x+1)=f(1-x)$，

故函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，

$\therefore f(x)=f(2-x)$，

故$f(-x)=f(2+x)=-f(x)$，

$\therefore f(x)=-f(2+x)=f(4+x)$，

$\therefore f(x)$是周期为4的周期函数.

则$f(2\ 023)=f(505\times4+3)=f(3)=-f(-3)=2$.

(2)已知函数$f(x)$的定义域为**R**，且$f(x+2)$为偶函数，$f(x)$在$[2，+\infty)$上单调递减，则不等式$f(x-1)>f(1)$的解集为__(2,4)__.

解析

∵$f(x+2)$是偶函数，

∴$f(x+2)$的图象关于直线$x=0$对称，

∴$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，

又$f(x)$在$[2，+\infty)$上单调递减，

∴$f(x)$在$(-\infty，2]$上单调递增.

又$f(x-1)>f(1)$，

∴$|x-1-2|<|1-2|$，即$|x-3|<1$，

解得$2<x<4$，

∴原不等式的解集为$(2,4)$.

思维升华

函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称$\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x)$；

若函数$y=f(x)$满足$f(a+x)=f(b-x)$，则$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$成轴对称.

跟踪训练1　(1)已知函数$f(x)=-x^2+bx+c$，且$f(x+1)$是偶函数，则$f(-1)$，$f(1)$，$f(2)$的大小关系是

A.$f(-1)<f(1)<f(2)$

B.$f(1)<f(2)<f(-1)$

C.$f(2)<f(-1)<f(1)$

D.$f(-1)<f(2)<f(1)$

解析

因为$f(x+1)$是偶函数，所以其对称轴为$x=0$，

所以$f(x)$的对称轴为$x=1$，

又二次函数$f(x)=-x^2+bx+c$的开口向下，根据自变量离对称轴的距离可得$f(-1)<f(2)<f(1)$.

(2)如果函数$f(x)$对任意的实数x，都有$f(1+x)=f(-x)$，且当$x\geq\frac{1}{2}$时，$f(x)=\log_2(3x-1)$，那么函数$f(x)$在$[-2,0]$上的最大值与最小值之和为

A.2　　　　B.3

C.4　　　　D.-1

解析

根据$f(1+x)=f(-x)$可知，$f(x)$的图象关于$x=\frac{1}{2}$对称，

那么求函数$f(x)$在$[-2,0]$上的最大值与最小值之和，即求函数$f(x)$在$[1,3]$上的最大值与最小值之和，

因为$f(x)=\log_2(3x-1)$在$\left[\frac{1}{2}，+\infty\right)$上单调递增，所以最小值与最大值分别为$f(1)=1$，$f(3)=3$，$f(1)+f(3)=4$.

例2 (1)(多选)若定义在**R**上的偶函数$f(x)$的图象关于点(2,0)对称，则下列说法正确的是

A.$f(x)=f(-x)$

B.$f(2+x)+f(2-x)=0$

C.$f(-x)=-f(x+4)$

D.$f(x+2)=f(x-2)$

解析

因为$f(x)$为偶函数，则$f(x)=f(-x)$，故A正确；

因为$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，对于$f(x)$的图象上的点$(x，y)$关于$(2,0)$的对称点$(4-x，-y)$也在函数图象上，即$f(4-x)=-y=-f(x)$，用$2+x$替换x得到，$f[4-(2+x)]=-f(2+x)$，即$f(2+x)+f(2-x)=0$，故B正确；

由$f(2+x)+f(2-x)=0$，令$x=x+2$，可得$f(x+4)+f(-x)=0$，即$f(-x)=-f(x+4)$，故C正确；

由B知，$f(2+x)=-f(2-x)=-f(x-2)$，故D错误.

(2)已知函数$f(x)$满足$f(x)+f(-x)=2$，$g(x)=\frac{1}{x}+1$，$y=f(x)$与$y=g(x)$有4个交点，则这4个交点的纵坐标之和为__4__.

解析

因为$f(x)+f(-x)=2$，所以$y=f(x)$的图象关于点$(0,1)$对称，

$y=g(x)=\frac{1}{x}+1$ 的图象也关于点$(0,1)$对称，则交点关于$(0,1)$对称，

所以4个交点的纵坐标之和为$2\times2=4$.

思维升华

函数 $y=f(x)$的图象关于点$(a，b)$对称$\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b\Leftrightarrow 2b-f(x)=f(2a-x)$；若函数 $y=f(x)$满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$，则 $y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$成中心对称.

跟踪训练2 (1)函数$f(x)=e^{x-2}-e^{2-x}$的图象关于

A.点$(-2,0)$对称　　B.直线$x=-2$对称

C.点$(2,0)$对称　　D.直线$x=2$对称

解析

$\because f(x)=e^{x-2}-e^{2-x}$，$\therefore f(2+x)=e^{2+x-2}-e^{2-(2+x)}=e^{x}-e^{-x}$，

$f(2-x)=e^{2-x-2}-e^{2-(2-x)}=e^{-x}-e^{x}$，

所以$f(2+x)+f(2-x)=0$，

因此，函数$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称.

(2)(2023·郑州模拟)若函数$f(x)$满足$f(2-x)+f(x)=-2$，则下列函数中为奇函数的是

A.$f(x-1)-1$　　B.$f(x-1)+1$

C.$f(x+1)-1$　　D.$f(x+1)+1$

解析

因为$f(2-x)+f(x)=-2$，

所以$f(x)$关于点$(1，-1)$对称，

所以将$f(x)$向左平移1个单位长度，再向上平移1个单位长度得到函数$y=f(x+1)+1$，该函数的对称中心为$(0,0)$，故$y=f(x+1)+1$为奇函数.

例3 已知函数$y=f(x)$是定义域为**R**的函数，则函数$y=f(x+2)$的图象与$y=f(4-x)$的图象

A.关于直线$x=1$对称

B.关于直线$x=3$对称

C.关于直线$y=3$对称

D.关于点(3,0)对称

解析

设$P(x_0，y_0)$为$y=f(x+2)$图象上任意一点，

则$y_0=f(x_0+2)=f(4-(2-x_0))$，

所以点$Q(2-x_0，y_0)$在函数$y=f(4-x)$的图象上，

而$P(x_0，y_0)$与$Q(2-x_0，y_0)$关于直线$x=1$对称，

所以函数$y=f(x+2)$的图象与$y=f(4-x)$的图象关于直线$x=1$对称.

思维升华

函数 $y=f(a+x)$的图象与函数 $y=f(b-x)$的图象关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$对称.

跟踪训练3　设函数$y=f(x)$的定义域为**R**，则函数$y=f(x-1)$的图象与$y=f(1-x)$的图象

A.关于y轴对称

B.关于x轴对称

C.关于直线$x=1$对称

D.关于直线$y=1$对称