

第 1 讲 空间几何体、空间中的位置关系(小题)

热点分类突破

— 典例研析 各个击破 —

热点一 三视图与直观图

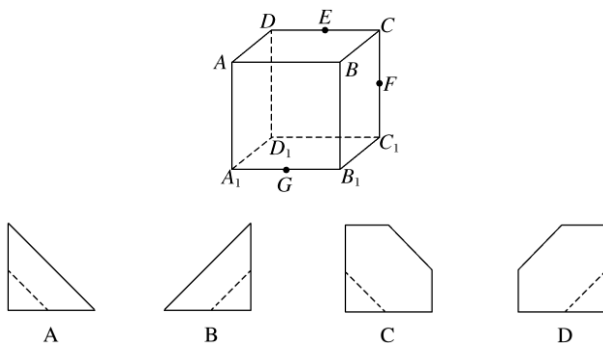
1. 一个物体的三视图的排列规则

俯视图放在正(主)视图的下面, 长度与正(主)视图的长度一样, 侧(左)视图放在正(主)视图的右面, 高度与正(主)视图的高度一样, 宽度与俯视图的宽度一样. 即“长对正、高平齐、宽相等”.

2. 由三视图还原几何体的步骤

一般先依据俯视图确定底面, 再利用正(主)视图与侧(左)视图确定几何体.

例 1 (1)如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 CD, CC_1, A_1B_1 的中点, 用过点 E, F, G 的平面截正方体, 则位于截面以下部分的几何体的侧(左)视图为()



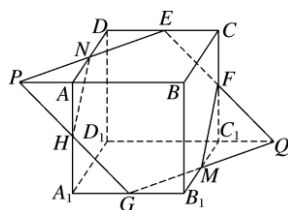
答案 C

解析 取 AA_1 的中点 H , 连接 GH , 则 GH 为过点 E, F, G 的平面与正方体的面 A_1B_1BA 的交线.

延长 GH , 交 BA 的延长线与点 P , 连接 EP , 交 AD 于点 N , 则 NE 为过点 E, F, G 的平面与正方体的面 $ABCD$ 的交线.

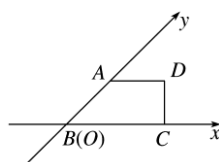
同理, 延长 EF , 交 D_1C_1 的延长线于点 Q , 连接 GQ , 交 B_1C_1 于点 M , 则 FM 为过点 E, F, G 的平面与正方体的面 BCC_1B_1 的交线.

所以过点 E, F, G 的平面截正方体所得的截面为图中的六边形 $EFMGHN$.



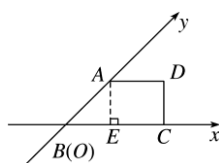
故可得位于截面以下部分的几何体的侧(左)视图为选项 C 所示.

(2) 有一块多边形的菜地, 它的水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形(如图所示), $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = AD = 1$, $DC \perp BC$, 则这块菜地的面积为_____.



答案 $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 如图, 在直观图中, 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为点 E ,

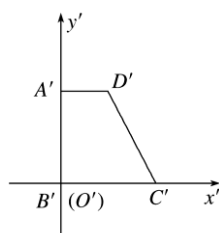


则在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = 1$, $\angle ABE = 45^\circ$, $\therefore BE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

而四边形 $AECD$ 为矩形, $AD = 1$,

$\therefore EC = AD = 1$, $\therefore BC = BE + EC = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

由此可还原原图形如图所示.



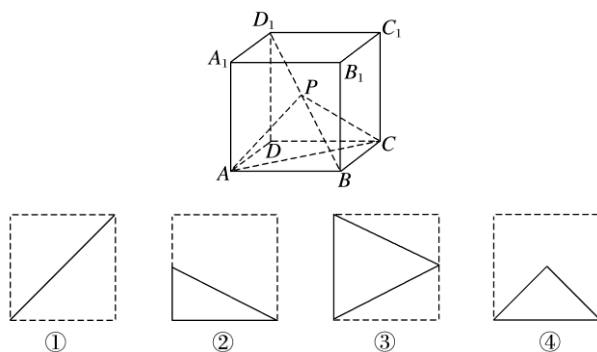
在原图形中, $A'D' = 1$, $A'B' = 2$, $B'C' = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$,

且 $A'D' \parallel B'C'$, $A'B' \perp B'C'$,

$\therefore$ 这块菜地的面积为 $S = \frac{1}{2}(A'D' + B'C') \cdot A'B'$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times 2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

跟踪演练 1 (1) 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 BD_1 的中点, 则 $\triangle PAC$ 在该正方体各个面上的射影可能是()



A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ①②

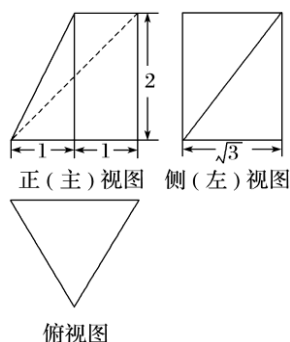
答案 A

解析 从上下方向看, $\triangle PAC$ 的射影为图①所示的情况;

从左右方向看, $\triangle PAC$ 的射影为图④所示的情况;

从前后方向看, $\triangle PAC$ 的射影为图④所示的情况.

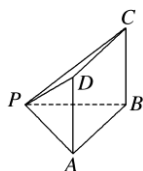
(2)(2019·江西省重点中学盟校联考) 如图所示是一个几何体的三视图及有关数据, 则该几何体的棱的长度中, 最长的是()



A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}$

答案 B

解析 由三视图可知该几何体是一个四棱锥, 其直观图如图所示,



其中 $PA = PB = AB = AD = BC = CD = 2$,

$$PD = \sqrt{PA^2 + AD^2} = 2\sqrt{2};$$

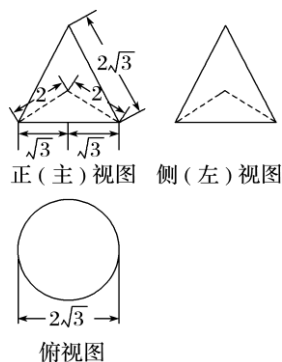
$$PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2},$$

所以最长的棱的长度为 $2\sqrt{2}$.

热点二 表面积与体积

空间几何体的表面积和体积计算是高考中常见的一个考点, 解决这类问题, 首先要熟练掌握各类空间几何体的表面积和体积计算公式, 其次要掌握一定的技巧, 如把不规则几何体分割成几个规则几何体的技巧, 把一个空间几何体纳入一个更大的几何体中的补形技巧.

例 2 (1)(2019·菏泽模拟)如图, 为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是()



A. $(12 + 4\sqrt{3})\pi$

B. $(6 + 2\sqrt{3})\pi$

C. $(9 + 2\sqrt{3})\pi$

D. $(15 + 4\sqrt{3})\pi$

答案 B

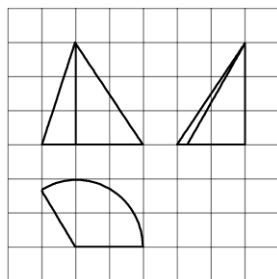
解析 结合题意可知, 该几何体为一个圆锥挖去了一个小圆锥,

大圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi \times 2\sqrt{3} = 6\pi$,

挖去的圆锥侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi \times 2 = 2\sqrt{3}\pi$,

故总表面积为 $(6 + 2\sqrt{3})\pi$.

(2)(2019·厦门模拟)如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 其中俯视图为扇形, 则该几何体的体积为()



A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{14\pi}{3}$ D. $\frac{16\pi}{9}$

答案 B

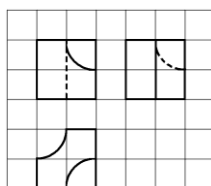
解析 由三视图知几何体是圆锥的一部分，

由俯视图可得，底面扇形的圆心角为 120° ，底面圆的半径为 2，

又由侧(左)视图知几何体的高为 3，

$$\therefore \text{几何体的体积 } V = \frac{120}{360} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 3 = \frac{4\pi}{3}.$$

跟踪演练 2 (1)(2019·江南十校质检)如图，网格纸上的小正方形的边长为 1，粗线(实线、虚线)画出的是某几何体的三视图，其中的曲线都是半径为 1 的圆周的四分之一，则该几何体的表面积为()



A. 20

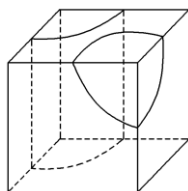
B. $20 + \frac{\pi}{4}$

C. $20 + \frac{3\pi}{4}$

D. $20 + \frac{5\pi}{4}$

答案 B

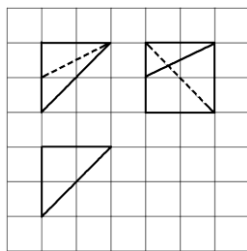
解析 由三视图可得几何体如图所示：



由已知得原几何体是由一个棱长为 2 的正方体挖去一个四分之一圆柱及一个八分之一球体得到的组合体，

$$\therefore S = 6 \times 2^2 - 2 \times 1 \times 2 - 5 \times \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{8} \times 4\pi = 20 + \frac{\pi}{4}.$$

(2)(2019·沈阳市东北育才学校模拟)如图所示, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某四棱锥的三视图, 则该几何体的体积为()



A.2 B. $\frac{8}{3}$ C.6 D.8

答案 A

解析 由三视图可知, 该四棱锥为斜着放置的四棱锥, 四棱锥的底面为梯形, 上底为 1, 下底为 2, 高为 2, 四棱锥的高为 2,

所以该四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 \times 2 = 2$.

热点三 多面体与球

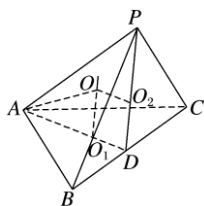
与球有关的组合体问题, 一种是内切, 一种是外接. 解题时要认真分析图形, 明确切点和接点的位置, 确定有关元素间的数量关系, 并作出合适的截面图. 如球内切于正方体, 切点为正方体各个面的中心, 正方体的棱长等于球的直径. 球外接于正方体, 正方体的顶点均在球面上, 正方体的体对角线长等于球的直径. 球与旋转体的组合, 通常作它们的轴截面解题, 球与多面体的组合, 通过多面体的一条侧棱和球心(或“切点”“接点”)作出截面图.

例 3 (1)在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 均为边长为 3 的等边三角形, 且 $PA = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为()

A. $\frac{13\sqrt{13}}{6}\pi$ B. $\frac{10\sqrt{10}}{3}\pi$
C. $\frac{5\sqrt{15}}{2}\pi$ D. $\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi$

答案 C

解析 取 BC 的中点 D , 连接 PD , AD ,



因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 均为等边三角形,

所以 $AD \perp BC$, $PD \perp BC$, $AD \cap PD = D$, $AD, PD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAD ,

因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 均为边长为 3 的等边三角形,

所以 $AD = PD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

又因为 $PA = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, $PA^2 = PD^2 + AD^2$,

所以 $PD \perp AD$,

过 $\triangle ABC$ 的外心 O_1 作平面 ABC 的垂线, 过 $\triangle PBC$ 的外心 O_2 作平面 PBC 的垂线,

设两条垂线交于点 O ,

则 O 为三棱锥 $P - ABC$ 外接球的球心.

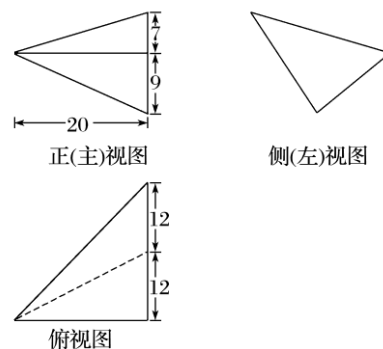
$O_1O = O_2D = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AO_1 = PO_2 = \sqrt{3}$,

所以 $OA^2 = OO_1^2 + AO_1^2 = \frac{15}{4}$,

所以外接球的半径 $R = OA = \frac{\sqrt{15}}{2}$,

所以三棱锥 $P - ABC$ 外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{15}}{2}\pi$.

(2)如图是某三棱锥的三视图, 则此三棱锥内切球的体积为()



A. $\frac{25\pi}{4}$

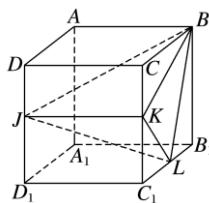
B. $\frac{25\pi}{16}$

C. $\frac{1\ 125\pi}{4}$

D. $\frac{1\ 125\pi}{16}$

答案 D

解析 把此三棱锥嵌入长、宽、高分别为 20,24,16 的长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,



三棱锥 $B - KLJ$ 即为所求的三棱锥,

其中 $KC_1 = 9$, $C_1L = LB_1 = 12$, $B_1B = 16$,

$$\therefore \frac{KC_1}{C_1L} = \frac{LB_1}{B_1B'}$$

则 $\triangle KC_1L \sim \triangle LB_1B$, $\angle KLB = 90^\circ$,

故可求得三棱锥各面面积分别为

$$S_{\triangle BKL} = 150, S_{\triangle JKL} = 150, S_{\triangle JKB} = 250, S_{\triangle JLB} = 250,$$

故表面积为 $S_{\text{表}} = 800$.

$$\text{三棱锥体积 } V = \frac{1}{3} S_{\triangle BKL} \cdot JK = 1000,$$

$$\text{设内切球半径为 } r, \text{ 则 } r = \frac{3V}{S_{\text{表}}} = \frac{15}{4},$$

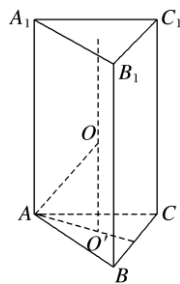
$$\text{故三棱锥内切球体积 } V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{125\pi}{16}.$$

跟踪演练 3 (1)(2019·榆林模拟)在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知底面 ABC 为正三角形, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AB = 6\sqrt{3}$, $AA_1 = 16$, 则该三棱柱外接球的表面积为()

A. 400π B. 300π C. 200π D. 100π

答案 A

解析 如图, O' 为底面中心, O 为外接球球心, 在正三角形 ABC 中求得 $O'A = 6$,



又 $OO' = 8$, $\therefore$ 外接球半径 $OA = 10$,

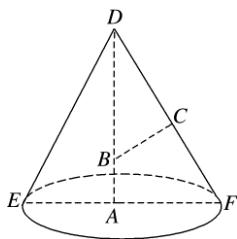
$$\therefore S_{\text{球}} = 4\pi \times 100 = 400\pi.$$

(2) 已知一个圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 记该圆锥的内切球的表面积为 S_1 , 外接球的表面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2}$ 等于()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

答案 C

解析 如图,



由已知圆锥侧面积是底面积的 2 倍, 不妨设底面圆半径为 r , l 为底面圆周长, R 为母线长,

$$\text{则 } \frac{1}{2}lR = 2\pi r^2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot R = 2\pi r^2,$$

解得 $R = 2r$,

故 $\angle ADC = 30^\circ$, 则 $\triangle DEF$ 为等边三角形,

设 B 为 $\triangle DEF$ 的重心, 过 B 作 $BC \perp DF$,

则 DB 为圆锥的外接球半径, BC 为圆锥的内切球半径,

$$\text{则 } \frac{BC}{BD} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{r_{\text{内}}}{r_{\text{外}}} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}.$$

热点四 空间线面位置关系的判断

高考中判断空间线面位置关系的注意点:

(1) 对于空间线面位置关系的判断, 常用的方法有: ①根据定理逐项判断, 可以举反例, 也可以证明, 要结合题目灵活选择; ②必要时可以借助空间几何体模型, 如借助长方体、正四面体中的线面位置关系来判断.

(2) 求角时, 一般先利用平行关系找到这个角, 然后把这个角放到三角形中去求解.

例 4 (1) 已知直线 a, b , 平面 α, β, γ , 下列命题正确的是()

A. 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = a$, 则 $a \perp \gamma$

B. 若 $\alpha \cap \beta = a, \alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = c$, 则 $a \parallel b \parallel c$

C.若 $\alpha \cap \beta = a$, $b \parallel a$, 则 $b \parallel \alpha$

D.若 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, $b \parallel a$, 则 $b \parallel \alpha$

答案 A

解析 A 中, 若 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $\alpha \cap \beta = a$,

则 $a \perp \gamma$, 该说法正确;

B 中, 若 $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = c$,

在三棱锥 $P-ABC$ 中, 令平面 α, β, γ 分别为平面 PAB, PAC, PBC ,

交线 a, b, c 为 PA, PB, PC , 不满足 $a \parallel b \parallel c$, 该说法错误;

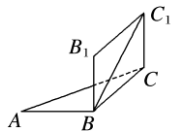
C 中, 若 $\alpha \cap \beta = a$, $b \parallel a$, 有可能 $b \subset \alpha$, 不满足 $b \parallel \alpha$, 该说法错误;

D 中, 若 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, $b \parallel a$,

正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 取平面 α, β 为平面 $ABCD, ADD_1A_1$,

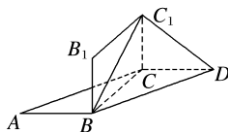
直线 b 为 A_1C_1 , 满足 $b \parallel \alpha$, 不满足 $b \parallel a$, 该说法错误.

(2)(2019·淄博模拟)如图所示, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 120^\circ$, 四边形 BCC_1B_1 为正方形, 且 $AB = BC = 2$, 则异面直线 BC_1 与 AC 所成角的余弦值为_____.



答案 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析 过 B 作 $BD \parallel AC$, 过 C 作 $CD \parallel AB$, 如图所示,



所以 $\angle C_1BD$ 是所求线线角或其补角.

在三角形 BC_1D 中, $BC_1 = C_1D = 2\sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{3}$,

$$\text{故 } \cos \angle C_1BD = \frac{8 + 12 - 8}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

跟踪演练 4 (1)若 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题正确的是 ()

A.若 $m \perp \alpha$, $n \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$

B.若 $m \parallel \alpha$, $n \perp \beta$, $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$

$$C_1O = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \tan \angle BC_1O = \frac{BO}{OC_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

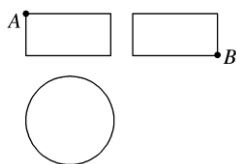
所以 $\angle BC_1O = 30^\circ$, BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角为 30° .

真题押题精练

— 真题押题 走进高考 —

【真题体验】

1.(2018·全国 I, 理, 7) 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正(主)视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在侧(左)视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为()

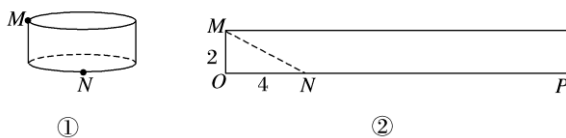


A. $2\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 3 D. 2

答案 B

解析 先画出圆柱的直观图,

根据题中的三视图可知, 点 M, N 的位置如图①所示.



圆柱的侧面展开图及 M, N 的位置(N 为 OP 的四等分点)如图②所示, 连接 MN , 则图中 MN 即为 M 到 N 的最短路径.

$$|ON| = \frac{1}{4} \times 16 = 4, \quad |OM| = 2,$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{|OM|^2 + |ON|^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

2.(2019·全国 I, 理, 12) 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为()

A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

答案 D

解析 因为点 E, F 分别为 PA, AB 的中点, 所以 $EF \parallel PB$, 因为 $\angle CEF = 90^\circ$, 所以 $EF \perp CE$, 所以 $PB \perp CE$.

取 AC 的中点 D , 连接 BD, PD , 易证 $AC \perp$ 平面 BDP ,

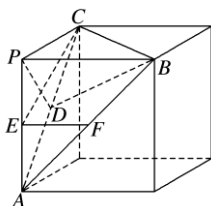
所以 $PB \perp AC$, 又 $AC \cap CE = C$, $AC, CE \subset$ 平面 PAC , 所以 $PB \perp$ 平面 PAC , 所以 $PB \perp PA$,

$PB \perp PC$, 因为 $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 为正三角形, 所以 $PA \perp PC$, 即 PA, PB, PC 两两垂直,

将三棱锥 $P - ABC$ 放在正方体中如图所示. 因为 $AB = 2$, 所以该正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 所以该正

方体的体对角线长为 $\sqrt{6}$, 所以三棱锥 $P - ABC$ 的外接球的半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以球 O 的体积 V

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi, \text{ 故选 D.}$$

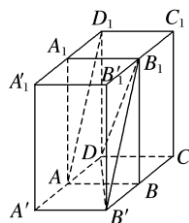


3. (2018·全国 II, 理, 9) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 1$, $AA_1 = \sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案 C

解析 方法一 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的一侧补上一个相同的长方体 $A' - B' - BA - A_1' - B_1' - B_1A_1$.



连接 B_1B' , 由长方体性质可知, $B_1B' \parallel AD_1$, 所以 $\angle DB_1B'$ 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成的角或其补角. 连接 DB' , 由题意, 得 $DB' = \sqrt{1^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$, $B'B_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/048103031056006024>