

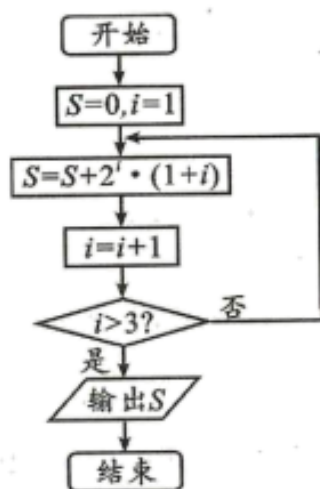
七台河市重点中学 2024 年高考数学二模试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值为（ ）



- A. 16 B. 48 C. 96 D. 128

2. $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， CD 平分 $\angle ACB$ ，若 $\vec{CB} = \vec{a}$ ， $\vec{CA} = \vec{b}$ ， $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ，则 $\vec{CD} =$ （ ）

- A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ D. $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

3. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 ， F_2 ，过 F_2 的直线 $2x + y - 4 = 0$ 与 y 轴交于点 A ，

线段 AF_2 与 E 交于点 B . 若 $|AB| = |BF_1|$ ，则 E 的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

4. 已知集合 $A = \{x | 1 < x \leq 24\}$ ， $B = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}\right\}$ ，则 $\partial_A B =$ （ ）

- A. $\{x | x \geq 5\}$ B. $\{x | 5 < x \leq 24\}$
 C. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$ D. $\{x | 5 \leq x \leq 24\}$

5. 已知公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , $a_1 = 2$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列, 则 $S_8 =$ ()

- A. 56 B. 72 C. 88 D. 40

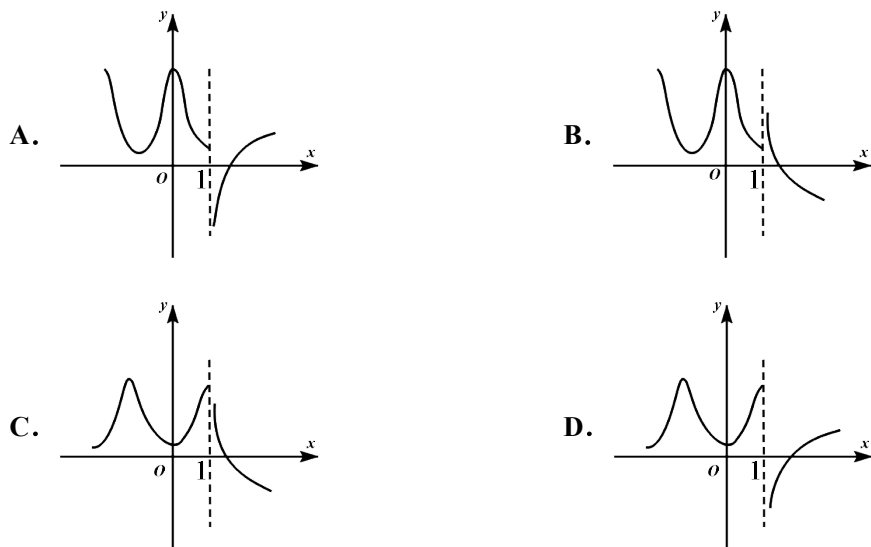
6. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 R , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数
C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

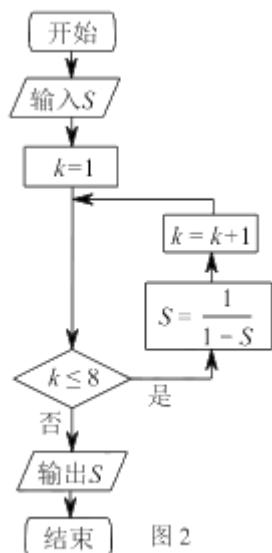
7. 设 m, n 为直线, α, β 为平面, 则 $m \perp \alpha$ 的一个充分条件可以是 ()

- A. $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = n, m \perp n$ B. $\alpha // \beta, m \perp \beta$
C. $\alpha \perp \beta, m // \beta$ D. $n \subset \alpha, m \perp n$

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x - \frac{1}{x}), & x > 1, \\ e^{\cos \pi x}, & x \leq 1 \end{cases}$ 的图象大致是 ()



9. 执行如图所示的程序框图, 当输出的 $S = 2$ 时, 则输入的 S 的值为 ()



- A. -2 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

10. 某装饰公司制作一种扇形板状装饰品，其圆心角为 120° ，并在扇形弧上正面等距安装 7 个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个，导线接头忽略不计)，已知扇形的半径为 30 厘米，则连接导线最小大致需要的长度为 ()

- A. 58 厘米 B. 63 厘米 C. 69 厘米 D. 76 厘米

11. 设 a, b, c 为正数，则“ $a+b>c$ ”是“ $a^2+b^2>c^2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不修要条件

12. 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，则 ω 的取值范围 ()

- A. $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ B. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ C. $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ D. $(0, 2]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在区间 $[-6, 2]$ 内任意取一个数 x_0 ，则 x_0 恰好为非负数的概率是_____.

14. 数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ，且 $a_1 = a_2$ ， $a_{2019} \cdot a_{2020} = 2020$ ，则 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2019}^2 =$ _____.

15. 在矩形 $ABCD$ 中， $BC=4$ ， M 为 BC 的中点，将 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 分别沿 AM ， DM 翻折，使点 B 与 C 重合于点 P . 若 $\angle APD=150^\circ$ ，则三棱锥 $M-PAD$ 的外接球的表面积为_____.

16. 现有 5 人要排成一排照相，其中甲与乙两人不相邻，且甲不站在两端，则不同的排法有_____种. (用数字作答)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

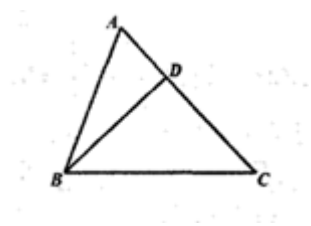
17. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 与 x 轴负半轴交于 $A(-2, 0)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 两点, 连接 AM , AN 并延长交直线 $x = 4$ 于

$E(x_3, y_3)$, $F(x_4, y_4)$ 两点, 已知 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$, 求证: 直线 MN 恒过定点, 并求出定点坐标.

18. (12分) 如图, D 是在 $\triangle ABC$ 边 AC 上的一点, $\triangle BCD$ 面积是 $\triangle ABD$ 面积的 2 倍, $\angle CBD = 2\angle ABD = 2\theta$.



(I) 若 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 求 $\frac{\sin A}{\sin C}$ 的值;

(II) 若 $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{2}$, 求边 AC 的长.

19. (12分) 已知直线 $x + y = 1$ 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点, 且交椭圆于 A, B 两点, 线段 AB 的中点是

$$M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过原点的直线 l 与线段 AB 相交 (不含端点) 且交椭圆于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

20. (12分) 设函数 $f(x) = |x - 1| + |x - a|$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a = 4$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq 4$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 + \ln x$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) + (a - 1)\ln x$ 的图象与 x 轴有且只有一个公共点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x) - (2m - 1)x < (1 - m)x^2$ 对任意 $x \in (1, +\infty)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = \ln(2x + a)$ ($x > 0, a > 0$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为

$$\ln 3 - \frac{2}{3}.$$

(1) 求 a ;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - 2x$ ($x > 0$) 和 $h(x) = f(x) - \frac{2x}{2x+1}$ ($x > 0$) 的单调性;

(3) 设 $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, 求证: $\frac{5-2^{n+1}}{2^n} < \frac{1}{a_n} - 2 < 0$ ($n \geq 2$).

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

列出每一次循环, 直到计数变量 i 满足 $i > 3$ 退出循环。

【详解】

第一次循环: $S = 2^1(1+1) = 4, i = 2$; 第二次循环: $S = 4 + 2^2(1+2) = 16, i = 3$;

第三次循环: $S = 16 + 2^3(1+3) = 48, i = 4$, 退出循环, 输出的 S 为 48。

故选: B.

【点睛】

本题考查由程序框图求输出的结果, 要注意在哪一步退出循环, 是一道容易题。

2、B

【解析】

由 CD 平分 $\angle ACB$, 根据三角形内角平分线定理可得 $\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA}$, 再根据平面向量的加减法运算即得答案。

【详解】

Q CD 平分 $\angle ACB$, 根据三角形内角平分线定理可得 $\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA}$,

又 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$,

$\therefore \frac{BD}{DA} = 2, \therefore BD = 2DA$.

$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

故选: B.

【点睛】

本题主要考查平面向量的线性运算，属于基础题.

3、D

【解析】

由题可得 $A(0,4)$ ， $F_2(2,0)$ ，所以 $c=2$ ，又 $|AB|=|BF_1|$ ，所以 $2a=|BF_1|+|BF_2|=|AF_2|=2\sqrt{5}$ ，得 $a=\sqrt{5}$ ，故可得椭圆的方程.

【详解】

由题可得 $A(0,4)$ ， $F_2(2,0)$ ，所以 $c=2$ ，

又 $|AB|=|BF_1|$ ，所以 $2a=|BF_1|+|BF_2|=|AF_2|=2\sqrt{5}$ ，得 $a=\sqrt{5}$ ， $\therefore b=1$ ，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查了椭圆的定义，椭圆标准方程的求解.

4、D

【解析】

首先求出集合 B ，再根据补集的定义计算可得；

【详解】

解： $\because -x^2+6x-5>0$ ，解得 $1<x<5$

$\therefore B=\{x|1<x<5\}$ ， $\therefore \complement_A B=\{x|5\leq x\leq 24\}$.

故选：D

【点睛】

本题考查补集的概念及运算，一元二次不等式的解法，属于基础题.

5、B

【解析】

$a_3^2=a_1a_9 \Leftrightarrow (a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$ ，将 $a_1=2$ 代入，求得公差 d ，再利用等差数列的前 n 项和公式计算即可.

【详解】

由已知， $a_3^2=a_1a_9$ ， $a_1=2$ ，故 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$ ，解得 $d=2$ 或 $d=0$ （舍），

故 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$, $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(2 + 2 \times 8) = 72$.

故选: B.

【点睛】

本题考查等差数列的前 n 项和公式, 考查等差数列基本量的计算, 是一道容易题.

6、C

【解析】

根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【详解】

解: $Q f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$\therefore f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$,

$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$, 故函数是奇函数, 故 A 错误,

$|f(-x)|g(-x) = |f(x)|g(x)$ 为偶函数, 故 B 错误,

$f(-x)g(g(-x)) = -f(x)g(g(x))$ 是奇函数, 故 C 正确.

$|f(-x)g(-x)| = |f(x)g(x)|$ 为偶函数, 故 D 错误,

故选: C.

【点睛】

本题主要考查函数奇偶性的判断, 根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

7、B

【解析】

根据线面垂直的判断方法对选项逐一分析, 由此确定正确选项.

【详解】

对于 A 选项, 当 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = n$, $m \perp n$ 时, 由于 m 不在平面 β 内, 故无法得出 $m \perp \alpha$.

对于 B 选项, 由于 $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \beta$, 所以 $m \perp \alpha$. 故 B 选项正确.

对于 C 选项, 当 $\alpha \perp \beta$, $m \parallel \beta$ 时, m 可能含于平面 α , 故无法得出 $m \perp \alpha$.

对于 D 选项, 当 $n \subset \alpha$, $m \perp n$ 时, 无法得出 $m \perp \alpha$.

综上所述, $m \perp \alpha$ 的一个充分条件是“ $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \beta$ ”

故选: B

【点睛】

本小题主要考查线面垂直的判断, 考查充分必要条件的理解, 属于基础题.

8、A

【解析】

根据复合函数的单调性，同增异减以及采用排除法，可得结果.

【详解】

当 $x > 1$ 时， $f(x) = \ln(x - \frac{1}{x})$ ，

由 $y = -\frac{1}{x}$, $y = x$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，

所以 $t = x - \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 递增

又 $y = \ln t$ 是增函数，

所以 $f(x) = \ln(x - \frac{1}{x})$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，故排除 B、C

当 $x \leq 1$ 时 $f(x) = e^{\cos \pi x}$ ，若 $x \in (0, 1)$ ，则 $\pi x \in (0, \pi)$

所以 $t = \cos \pi x$ 在 $(0, 1)$ 递减，而 $y = e^t$ 是增函数

所以 $f(x) = e^{\cos \pi x}$ 在 $(0, 1)$ 递减，所以 A 正确，D 错误

故选：A

【点睛】

本题考查具体函数的大致图象的判断，关键在于对复合函数单调性的理解，记住常用的结论：增+增=增，增-减=增，减+减=减，复合函数单调性同增异减，属中档题.

9、B

【解析】

若输入 $S = -2$ ，则执行循环得 $S = \frac{1}{3}, k = 2; S = \frac{3}{2}, k = 3; S = -2, k = 4; S = \frac{1}{3}, k = 5; S = \frac{3}{2}, k = 6;$

$S = -2, k = 7; S = \frac{1}{3}, k = 8; S = \frac{3}{2}, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = \frac{3}{2}$ ，与题意输出的 $S = 2$ 矛盾；

若输入 $S = -1$ ，则执行循环得 $S = \frac{1}{2}, k = 2; S = 2, k = 3; S = -1, k = 4; S = \frac{1}{2}, k = 5; S = 2, k = 6;$

$S = -1, k = 7; S = \frac{1}{2}, k = 8; S = 2, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = 2$ ，符合题意；

若输入 $S = -\frac{1}{2}$ ，则执行循环得 $S = \frac{2}{3}, k = 2; S = 3, k = 3; S = -\frac{1}{2}, k = 4; S = \frac{2}{3}, k = 5; S = 3, k = 6;$

$S = -\frac{1}{2}, k = 7; S = \frac{2}{3}, k = 8; S = 3, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = 3$ ，与题意输出的 $S = 2$ 矛盾；

若输入 $S = \frac{1}{2}$ ，则执行循环得 $S = 2, k = 2; S = -1, k = 3; S = \frac{1}{2}, k = 4; S = 2, k = 5; S = -1, k = 6;$

$S = \frac{1}{2}, k = 7; S = 2, k = 8; S = -1, k = 9$; 结束循环, 输出 $S = -1$, 与题意输出的 $S = 2$ 矛盾;

综上选 B.

10、B

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小, 可将导线的长视为扇形弧长, 利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 6 等分,

所以每部分的弦长和弧长相差很小, 可以用弧长近似代替弦长,

故导线长度约为 $\frac{2\pi}{3} \times 30 = 20\pi \approx 63$ (厘米).

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了扇形弧长的计算, 属于容易题.

11、B

【解析】

根据不等式的性质, 结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

解: a, b, c 为正数,

$\therefore$ 当 $a = 2, b = 2, c = 3$ 时, 满足 $a + b > c$, 但 $a^2 + b^2 > c^2$ 不成立, 即充分性不成立,

若 $a^2 + b^2 > c^2$, 则 $(a + b)^2 - 2ab > c^2$, 即 $(a + b)^2 > c^2 + 2ab > c^2$,

即 $\sqrt{(a + b)^2} > \sqrt{c^2}$, 即 $a + b > c$, 成立, 即必要性成立,

则“ $a + b > c$ ”是“ $a^2 + b^2 > c^2$ ”的必要不充分条件,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合不等式的性质是解决本题的关键.

12、B

【解析】

由 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 可得 $-\frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3} \leq \omega x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{3}$, 结合 $y = \cos x$ 在 $[-\pi, 0]$ 上单调递增, 易得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/055110102122011222>