

江西省南昌三校 2023-2024 学年高考数学试题原创模拟卷（八）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 $l: y = 2x + 10$ 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点且与其中一条渐近线平行，则双曲线的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2. 设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（ ）

- A. $\frac{17}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $-\frac{17}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

3. 已知直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in \mathbb{R})$ 有公共点，则 $t(4 - t)$ 的最大值为（ ）

- A. 4 B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{32}{9}$ D. $\frac{32}{7}$

4. 以下关于 $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ 的命题，正确的是

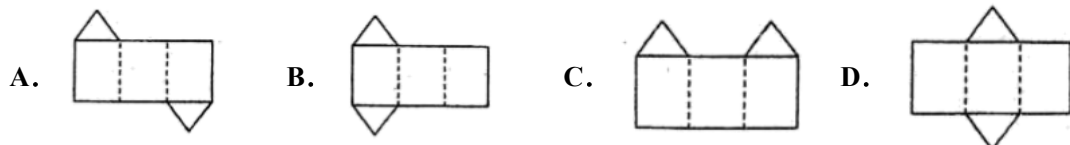
A. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增

B. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 需是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 将函数 $y = f(x)$ 图象向左平移需 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，可得到 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象

5. 下列图形中，不是三棱柱展开图的是（ ）



6. 已知 i 为虚数单位, 若复数 $z_1 = 2 + i$, $z \cdot z_1 = 5$, 则 $|z| =$

- A.** 1
- B.** $\sqrt{5}$
- C.** 5
- D.** $5\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若不等式 $f(x) \leq |x - k|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A.** $(-\infty, 1]$ **B.** $[1, +\infty)$ **C.** $[0, 1)$ **D.** $(-1, 0]$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (x-1)e^x$ ($a \in \mathbb{R}$) 若对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ，则实数 a 的取值范围是()

- A. $[1,2]$ B. $[e,4]$ C. $[1,4]$ D. $[1,2) \cup [e,4]$

9. 设命题 $p: \forall a, b \in R, |a-b| < |a| + |b|$, 则 $\neg p$ 为

- A.** $\forall a, b \in R, |a - b| \geq |a| + |b|$ **B.** $\exists a, b \in R, |a - b| < |a| + |b|$
- C.** $\exists a, b \in R, |a - b| > |a| + |b|$ **D.** $\exists a, b \in R, |a - b| \geq |a| + |b|$

10. 观察下列各式: $x \otimes y = 2$, $x^2 \otimes y^2 = 4$, $x^3 \otimes y^3 = 9$, $x^4 \otimes y^4 = 17$, $x^5 \otimes y^5 = 31$, $x^6 \otimes y^6 = 54$,
 $x^7 \otimes y^7 = 92$, L , 根据以上规律, 则 $x^{10} \otimes y^{10} =$ ()

- A. 255 B. 419 C. 414 D. 253

11. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为

- A. $\square = \pm\sqrt{2}\square$ B. $\square = \pm\sqrt{3}\square$ C. $\square = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\square$ D. $\square = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\square$

12. 中, 如果 $\cos \alpha = \sin \beta - \sin \gamma = -\frac{1}{2}$, 则 的形状是 ()

- A. 等边三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 以 $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$ 为圆心的两圆均过 $(1, 0)$, 与 y 轴正半轴分别交于 $(0, y_1)$, $(0, y_2)$, 且满足 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$, 则点 (a_1, a_2) 的轨迹方程为_____.

14. 已知复数 $z = (i-2)^2$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数是____, $|z| =$ _____.

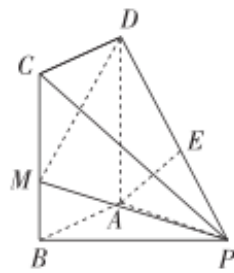
15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,

$PA \perp PC$ ，则球 O 的体积为_____.

16. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 1$ ， $AD = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，若 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}$ ， $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

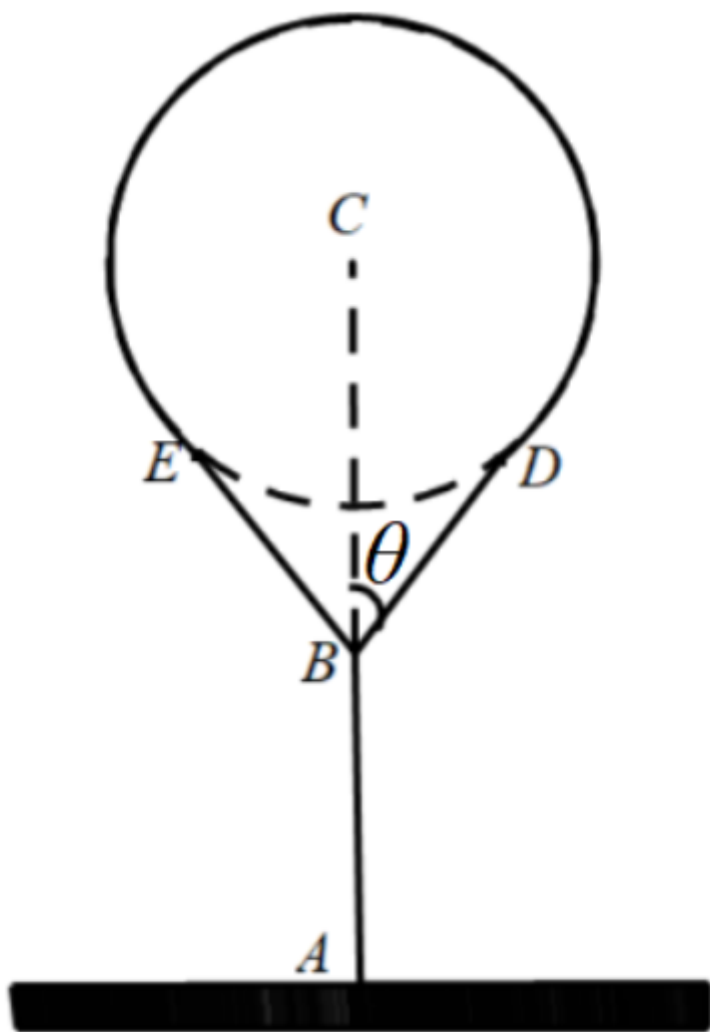
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为矩形， $AB = 3$ ， $AP = 4$ ， E 为 PD 的中点， $AE \perp PC$ 。



- (1) 求线段 AD 的长.
- (2) 若 M 为线段 BC 上一点，且 $BM = 1$ ，求二面角 $M-PD-A$ 的余弦值.

18. (12 分) 如图，湖中有一个半径为 1 千米的圆形小岛，岸边点 A 与小岛圆心 C 相距 3 千米，为方便游人到小岛观光，从点 A 向小岛建三段栈道 AB ， BD ， BE ，湖面上的点 B 在线段 AC 上，且 BD ， BE 均与圆 C 相切，切点分别为 D ， E ，其中栈道 AB ， BD ， BE 和小岛在同一个平面上.沿圆 C 的优弧（圆 C 上实线部分）上再修建栈道 DE .记 $\angle CBD$ 为 θ 。



(1) 用 θ 表示栈道的总长度 $f(\theta)$ ，并确定 $\sin \theta$ 的取值范围；

(2) 求当 θ 为何值时，栈道总长度最短.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(1,0)$ ，若以线段 PQ 为直径的圆与 y 轴相切.

(1) 求点 Q 的轨迹 C 的方程；

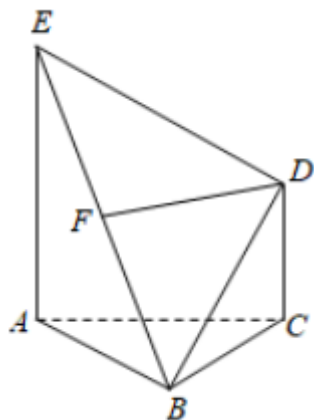
(2) 若 C 上存在两动点 A, B (A, B 在 x 轴异侧) 满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 32$ ，且 $\triangle PAB$ 的周长为 $2|AB| + 2$ ，求 $|AB|$ 的值.

20. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，直线 l 交 C 于 A, B 两点 (异于坐标原点 O).

(1) 若直线 l 过点 F ， $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12$ ，求 C 的方程；

(2) 当 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ 时，判断直线 l 是否过定点，若过定点，求出定点坐标；若不过定点，说明理由.

21. (12 分) 已知多面体 $ABCDE$ 中， AE 、 CD 均垂直于平面 ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AE = 2CD$ ， $AB = BC = CD$ ， F 是 BE 的中点.



(1) 求证: $DF \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求直线 BD 与平面 ABE 所成角的正弦值.

22. (10 分) 某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏, 每次由一个小孩与其一位家长参与, 测试家长对小孩饮食习惯的了解程度. 在每一轮游戏中, 主持人给出 A, B, C, D 四种食物, 要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序, 然后由家长猜测小孩的排序结果. 设小孩对四种食物排除的序号依次为 $x_A x_B x_C x_D$, 家长猜测的序号依次为 $y_A y_B y_C y_D$, 其中 $x_A x_B x_C x_D$ 和 $y_A y_B y_C y_D$ 都是 1, 2, 3, 4 四个数字的一种排列. 定义随机变量 $X = (x_A - y_A)^2 + (x_B - y_B)^2 + (x_C - y_C)^2 + (x_D - y_D)^2$, 用 X 来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度.

(1) 若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解.

(i) 求他们在一轮游戏中, 对四种食物排出的序号完全不同的概率;

(ii) 求 X 的分布列 (简要说明方法, 不用写出详细计算过程);

(2) 若有一组小孩和家长进行来三轮游戏, 三轮的结果都满足 $X < 4$, 请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解, 说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

根据直线 $l: y = 2x + 10$ 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点, 得 $c = 5$, 又和其中一条渐近线平行, 得到

$b = 2a$, 再求双曲线方程.

【详解】

因为直线 $l: y = 2x + 10$ 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点,

所以 $F(-5, 0)$, 所以 $c = 5$,

又和其中一条渐近线平行,

所以 $b = 2a$,

所以 $a^2 = 5, b^2 = 20$,

所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查双曲线的几何性质, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题.

2、D

【解析】

用诱导公式和二倍角公式计算.

【详解】

$$\sin 2\alpha = -\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cos 2(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -[2\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) - 1] = -[2 \times (\frac{3}{5})^2 - 1] = \frac{7}{25}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查诱导公式、余弦的二倍角公式, 解题关键是找出已知角和未知角之间的联系.

3、C

【解析】

根据 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 表示圆和直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 有公共点, 得到 $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$, 再利用二次函数的性质求解.

【详解】

因为 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 表示圆,

所以 $2t - t^2 > 0$, 解得 $0 < t < 2$,

因为直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2 (t \in R)$ 有公共点,

所以圆心到直线的距离 $d \leq r$,

$$\text{即 } \frac{|t|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2t - t^2},$$

$$\text{解得 } 0 \leq t \leq \frac{4}{3},$$

$$\text{此时 } 0 \leq t \leq \frac{4}{3},$$

因为 $f(t) = t(4-t) = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$, 在 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ 递增,

$$\text{所以 } t(4-t) \text{ 的最大值 } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查圆的方程, 直线与圆的位置关系以及二次函数的性质, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题.

4、D

【解析】

利用辅助角公式化简函数得到 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 再逐项判断正误得到答案.

【详解】

$$f(x) = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

A 选项, $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right)$ 函数先增后减, 错误

B 选项, $x = \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 0$ 不是函数对称轴, 错误

C 选项, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, 不是对称中心, 错误

D 选项, 图象向左平移需 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到 $y = \sqrt{2} \sin(2(x + \frac{\pi}{8}) - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin 2x$, 正确

故答案选 D

【点睛】

本题考查了三角函数的单调性, 对称轴, 对称中心, 平移, 意在考查学生对于三角函数性质的综合应用, 其中化简三角函数是解题的关键.

5、C

【解析】

根据三棱柱的展开图的可能情况选出选项.

【详解】

由图可知, ABD 选项可以围成三棱柱, C 选项不是三棱柱展开图.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查三棱柱展开图的判断, 属于基础题.

6、 B

【解析】

由 $z \cdot z_1 = 5$ 可得 $z = \frac{5}{z_1}$, 所以 $|z| = \frac{5}{|z_1|} = \frac{5}{|2+i|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 故选 B.

7、 A

【解析】

先求出函数 $f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程, 在同一直角坐标系内画出函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 和 $g(x) = |x - k|$ 的图象,

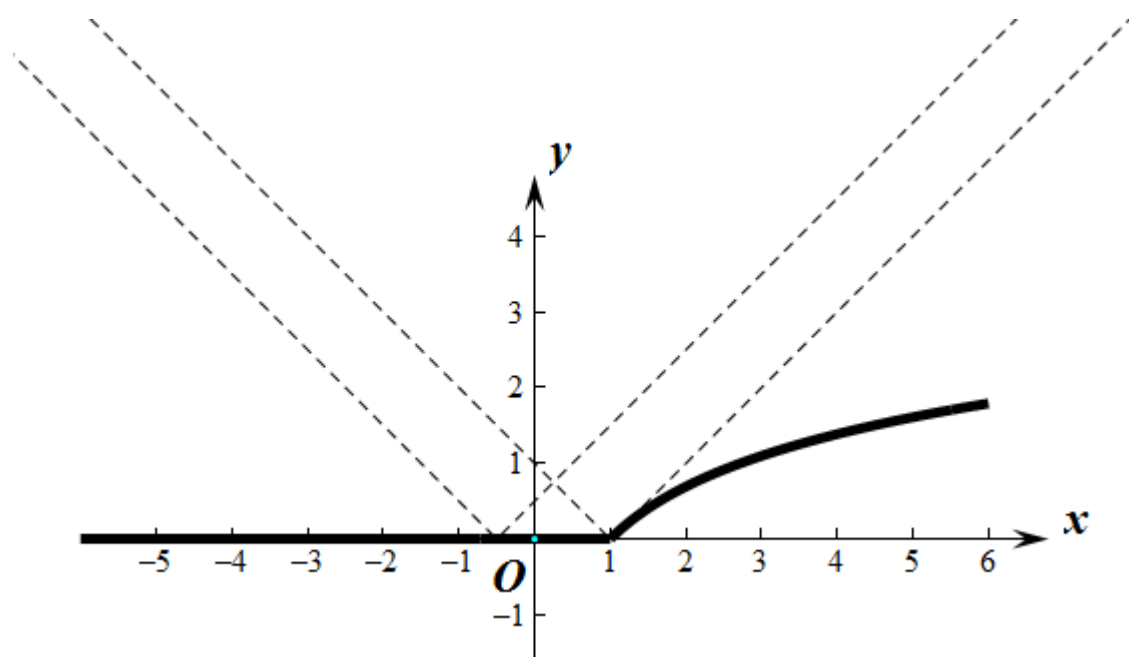
利用数形结合进行求解即可.

【详解】

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = \ln x, \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程为: $y = x - 1$, 令

$g(x) = |x - k|$, 它与横轴的交点坐标为 $(k, 0)$.

在同一直角坐标系内画出函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 和 $g(x) = |x - k|$ 的图象如下图所示:



利用数形结合思想可知：不等式 $f(x) \leq |x-k|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是 $k \leq 1$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查了利用数形结合思想解决不等式恒成立问题，考查了导数的应用，属于中档题。

8、C

【解析】

分析：先求导，再对 a 分类讨论求函数的单调区间，再画图分析转化对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有

$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ，得到关于 a 的不等式组，再解不等式组得到实数 a 的取值范围。

详解：由题得 $f'(x) = ax - [e^x + (x-1)e^x] = ax - xe^x = x(a - e^x)$ 。

当 $a < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，

因为对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ，

所以 $f(1) + f(1) \geq f(0)$ ，

所以 $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \geq 1$ ，

故 $a \geq 1$ ，与 $a < 1$ 矛盾，故 $a < 1$ 矛盾。

当 $1 \leq a < e$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0, \ln a]$ 单调递增，在 $(\ln a, 1]$ 单调递减。

所以 $f(x)_{\max} = f(\ln a) = \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + a$ ，

因为对区间 $[0,1]$ 内的任意实数 x_1 、 x_2 、 x_3 ，都有 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_3)$ ，

所以 $f(0) + f(1) \geq f(\ln a)$ ，

所以 $1 + \frac{1}{2}a \geq \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + a$ ，

即 $\frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + \frac{1}{2}a - 1 \leq 0$

令 $g(a) = \frac{1}{2}a \ln^2 a - a \ln a + \frac{1}{2}a - 1$ ，($1 \leq a < e$)，

所以 $g'(a) = \frac{1}{2}(\ln^2 a - 1) < 0$ ，

所以函数 $g(a)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减，

所以 $g(a)_{\max} = g(1) = -\frac{1}{2} < 0$ ，

所以当 $1 \leq a < e$ 时，满足题意。

当 $a \geq e$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/055114320321012000>