

专题 01 任意角及其度量重难点题型专训 (15 大题型+15 道提优训练)



题型预览

题型一 任意角的概念

题型二 弧度的概念

题型三 找出终边相同的角

题型四 根据图形写出角 (范围)

题型五 确定已知角所在象限

题型六 由已知角所在的象限确定某角的范围

题型七 确定 n 倍角所在象限

题型八 确定 n 分角所在象限

题型九 用弧度制表示角的集合

题型十 角度化为弧度

题型十一 弧度化为角度

题型十二 弧长的有关计算

题型十三 扇形面积的有关计算

题型十四 扇形中的最值问题

题型十五 扇形弧长公式与面积公式的应用



知识梳理

知识点 01 任意角

1、任意角

正角:按逆时针方向旋转形成的角

负角:按顺时针方向旋转形成的角

零角:不作任何旋转形成的角

2、象限角: 角 α 的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边落在第几象限, 则称 α 为第几象限角.

第一象限角的集合为 $\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

第二象限角的集合为 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第三象限角的集合为 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第四象限角的集合为 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

知识点 02 终边相同的角

与角 α 终边相同的角的集合为 $\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

已知 α 是第几象限角, 确定 α/n ($n \in \mathbb{N}^*$) 所在象限: 若 α 是第 k 象限角, 把单位圆上每个象限的圆弧 n 等分, 并从 x 轴正半轴开始, 沿逆时针方向依次在每个区域标上 $1, 2, 3, 4$, 再循环, 直到填满为止, 则有标号 k 的区域是角 α/n 终边所在的范围。

知识点 3 弧度制的转换

1、长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度.

2、半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l ，则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = l/r$.

3、弧度制与角度制的换算公式： $2\pi = 360^\circ$ ， $1^\circ = \pi/180$ ， $1 \text{ rad} = 180^\circ / \pi \approx 57.3^\circ$.

知识点 04 扇形

若扇形的圆心角为 α (α 为弧度制)，半径为 r ，弧长为 l ，周长为 C ，面积为 S ，则弧长公式： $l = r|\alpha|$ ，扇形周长： $C = 2r + l$ ，扇形面积： $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r \cdot r$.



经典例题



【经典例题一 任意角的概念】

【例 1】(2425 高一下·上海静安·课后作业) 已知角 α 和角 β ，则下列说法正确的是 ()

A. 若角 α 是第一象限角，则角 α 是锐角

B. 若角 α 和角 β 的终边相同，则 $\alpha = \beta$

C. 若角 α 和角 β 分别是角 0° 的终边绕端点 O 按顺、逆时针方向旋转相同度数形成的角，则 $\alpha + \beta = 0$

D. 若角 β 的终边在第二象限，则角 β 是钝角

【答案】C

【分析】根据任意角的概念逐项判断.

【详解】A，角 $\alpha = 360^\circ + 20^\circ = 380^\circ$ ，是第一象限角，但不是锐角，A 错误；

B，角 $\alpha = 90^\circ$ ，角 $\beta = 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$ ，则角 α 和 β 的终边相同，但 $\alpha \neq \beta$ ，B 错误；

C， 0° 的终边绕端点 O 按顺、逆时针方向旋转相同度数形成的两个角互为相反角，C 正确；

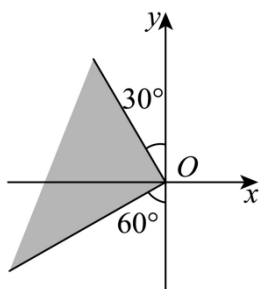
D，角 $\beta = 120^\circ + 360^\circ$ 的终边在第二象限，则角 β 不是钝角，D 错误.

故选：C.



变式训练

1. (2324 高一下·天津·阶段练习) 若角 α 的终边落在如图所示的阴影部分内，则角 α 的取值范围是 ()



A. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

B. $(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6})$

C. $[\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{7\pi}{6} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$

D. $[2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$

【答案】D

【分析】根据给定图形，求出在 $[0, 2\pi)$ 内阴影部分的边界射线对应的角，进而确定阴影部分对应任意角的范围，即得结果.

【详解】依题意，在 $[0, 2\pi)$ 内阴影部分的边界射线对应的角分别为 $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$,

在 $[0, 2\pi)$ 内阴影部分对应角的范围是 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$,

所以角 α 的取值范围是 $[2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$.

故选：D

2. (2324 高一下·北京海淀·阶段练习) 时间经过 4h (时)，时针转了_____度，等于_____弧度；若时针长度是 1 厘米，则时针 4h (时) 转出的扇形面积是_____平方厘米.

【答案】 -120 $-\frac{2\pi}{3}$ $-\frac{2}{3}\pi$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{1}{3}\pi$

【分析】根据任意角的概念及角度制与弧度制的转化关系化为弧度制，再由扇形面积公式计算可得.

【详解】时针一小时转过 -30° ，所以时间经过 4h 时针转了 -120° ，即 $-120^\circ = -\left(120 \times \frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = -\frac{2\pi}{3} \text{rad}$,

又时针长度是 1 厘米，则时针 4h (时) 转出的扇形面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times 1^2 = \frac{\pi}{3}$ (平方厘米).

故答案为： -120 ； $-\frac{2\pi}{3}$ ； $\frac{\pi}{3}$

3. (2425 高一下·上海·课后作业) 中午 12 点以后，在什么时候 (近似到几点几分几秒) 时针与分针第一次重合？什么时候 (近似到几点几分几秒) 分针第一次在时针的反向延长线上？

【答案】在 13 时 5 分 27 秒时时针与分针第一次重合；在 12 时 32 分 43 秒时分针第一次在时针的反向延长线上.

【分析】根据题意，由分针与时针的转速，结合条件，列出方程，代入计算，即可求解.

【详解】①设经过 $x \text{ min}$ 后，分针与时针第一次重合，因分针每 60min 转一圈 (即 360°),

故 x min 共转过 $\frac{360^\circ}{60}x = (6x)^\circ$ ，时针每 60min 转 $\frac{1}{12}$ 圈（即 30° ），

故 x min 共转过 $\frac{30^\circ}{60}x = \left(\frac{x}{2}\right)^\circ$ 。

又第一次重合时，分针应比时针多转一圈，故有 $6x - \frac{x}{2} = 360$ ，解得 $x = \frac{720}{11}$ ，

所以在 13 时 5 分 27 秒时时针与分针第一次重合；

②设经过 y min 后，分针第一次在时针的反向延长线上，

则分针第一次在时针的反向延长线上时，分针比时针多转 180° ，

故有 $6x - \frac{x}{2} = 180$ ，解得 $x = \frac{360}{11}$ ，

所以在 12 时 32 分 43 秒时分针第一次在时针的反向延长线上。



【经典例题二 弧度的概念】

【例 2】（2324 高一下·上海徐汇·阶段练习）若一圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长，则此圆弧所对的圆心角 α 的弧度数为（ ）

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\sqrt{3}$

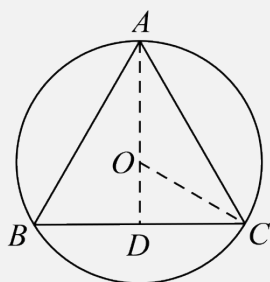
D. 2

【答案】C

【分析】画图设外接圆半径 $r = 2$ ，利用正三角形性质可得圆弧长 $l = 2\sqrt{3}$ ，再由弧度制定义可得 $\alpha = \sqrt{3}$ 。

【详解】不妨设正 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $r = 2$ ，圆心为 O ，

取 BC 的中点为 D ，连接 AD, OC ，易知 O 在 AD 上，且 $\angle OCB = 30^\circ$ ， $AD \perp BC$ ；如下图所示：



在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中， $OD = \frac{1}{2}OC = 1$ ，所以 $CD = \sqrt{3}$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ；

依题意可知该圆弧长 $l = BC = 2\sqrt{3}$ ，

所以圆心角 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 。

故选：C



变式训练

1. (2324 高一下·上海闵行·期末) 春秋战国时期, 为指导农耕, 我国诞生了表示季节变迁的 24 节气. 它将黄道(地球绕太阳按逆时针方向公转的轨道, 可近似地看作圆) 分为 24 等份, 每等份为一个节气, 2022 年 10 月 8 日为寒露, 经过霜降、立冬、小雪及大雪后, 便是冬至, 则从寒露到冬至, 地球公转的弧度数约为 ()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{12}$

D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【分析】求出每一等份的度数, 从寒露到冬至经历了 5 个节气, 进而可得答案

【详解】由题意知, 把圆分成 24 等份, 每一等份为 $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$, 从寒露到冬至经历了 5 个节气, 所以地球公转的弧度数约为 $\frac{\pi}{12} \times 5 = \frac{5\pi}{12}$.

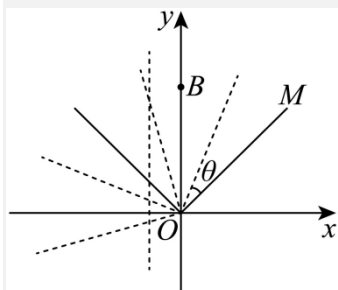
故选: C

2. (2324 高一下·上海·期末) 设 α 是正实数, 将函数 $y = |x|$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ ($0 < \theta < \alpha$), 得到曲线 C . 若对于每一个旋转角 θ , 曲线 C 都可以看成是某一个函数的图像, 则 α 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】画出函数 $y = |x|$ 的图像, 由图可知, 当函数 $y = |x|$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ 大于 $\angle MOB$ 时, 曲线 C 不是一个函数的图像, 由此求出答案.

【详解】画出函数 $y = |x|$ 的图像, 如图, 在 y 轴正半轴上取一点 B , 则 $\angle MOB = \frac{\pi}{4}$,

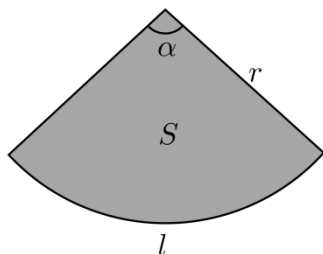


由图可知, 当函数 $y = |x|$ 的图像绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ 大于 $\angle MOB$ 时, 旋转所得的图像与垂直于 x 轴的直线就有两个交点, 曲线 C 不是一个函数的图像,

故 α 的最大值是 $\angle MOB = \frac{\pi}{4}$.

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

3. (2324 高一·全国·课堂例题) 如图, 设扇形的圆心角 $\alpha = x$, 半径为 r , 弧长为 l , 扇形面积记为 S .



(1) 用 r 与 x 表示扇形的面积 S ;

(2) 用 r 与 l 表示扇形的面积 S .

【答案】(1) $S = \frac{1}{2}|x|r^2$

(2) $S = \frac{1}{2}lr$

【分析】(1) 根据弧度的概念及圆的面积公式求解;

(2) 由 (1) 结合弧长公式求解.

【详解】(1) x rad 角的大小是周角的 $\frac{|x|}{2\pi}$, 所形成扇形的面积 S 是整个圆的面积 πr^2 的 $\frac{|x|}{2\pi}$,
即 $S = \frac{|x|}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}|x|r^2$.

(2) 由 (1) 可得 $S = \frac{1}{2}|x|r^2 = \frac{1}{2}|x|r \cdot r$,

又因为 $l = |x|r$, 所以 $S = \frac{1}{2}lr$.



【经典例题三 找出终边相同的角】

【例 3】(2324 高一下·上海徐汇·期末) 下列命题正确的是 ().

- A. 小于 90° 的角是锐角 B. 第二象限的角一定大于第一象限的角
C. 与 -2024° 终边相同的最小正角是 136° D. 若 $\alpha = -2$, 则 α 是第四象限角

【答案】C

【分析】根据锐角定义判断 A, 取特殊角判断 B, 根据终边相同的角判断 C, 确定 α 所在象限判断 D.

【详解】 $-10^\circ < 90^\circ$, 但是由锐角的定义知 -10° 不是锐角, 故 A 错误;

100° 是第二象限的角, 400° 是第一象限的角, 但 $100^\circ < 400^\circ$, 故 B 错误;

因为 $-2024^\circ = -6 \times 360^\circ + 136^\circ$ ，所以与 -2024° 终边相同的最小正角是 136° ，故 C 正确；

$\alpha = -2 < -\frac{\pi}{2}$ 且 $\alpha = -2 > -\pi$ ，所以 α 是第三象限角，故 D 错误。

故选：C



变式训练

1. (2425 高一下·上海杨浦·阶段练习) 下列说法正确的是 ()

A. 角 60° 和角 600° 是终边相同的角

B. 第三象限角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \pi + 2k\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. 终边在 y 轴上角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. 第二象限角大于第一象限角

【答案】C

【分析】根据角的定义判断。

【详解】 $600^\circ = 360^\circ + 240^\circ$ ，因此 600° 的解与 240° 角的终边相同，A 错；

第三象限角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ，B 错；

终边在 y 轴上角，终边可能在 y 轴正半轴， $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，

终边在 y 轴负半轴， $\alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ，其中 $k \in \mathbb{Z}$ ，终合为 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，C 正确；

$\frac{2\pi}{3}$ 是第二象限角， $\frac{7\pi}{3}$ 是第一象限角，但 $\frac{2\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$ ，D 错。

故选：C。

2. (2024 高一下·全国·专题练习) 已知角 α 为钝角，若 4α 角的终边与 α 角的终边重合，则角 $\alpha =$ _____。

【答案】 120°

【详解】若 4α 角的终边与 α 角的终边重合，则 $4\alpha = k \cdot 360^\circ + \alpha$ 。因为角 α 为钝角，所以 $k=1$ 。解得 $\alpha=120^\circ$ ，故答案为 120° 。

3. (2425 高一下·全国·课后作业) 已知角 $\alpha = 1200^\circ$ 。

(1) 将 α 改写成 $\beta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \beta < 2\pi$) 的形式，并指出 α 是第几象限角；

(2)在区间 $[-4\pi, 0]$ 上找出与 α 终边相同的角.

【答案】(1) $\frac{2\pi}{3} + 3 \times 2\pi$, 角 α 是第二象限角.

(2) $-\frac{10\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{3}$.

【分析】(1) 根据角度制与弧度制的互化公式进行求解即可;

(2) 利用代入法进行求解即可.

【详解】(1) 因为 $\alpha = 1200^\circ = 1200 \times \frac{\pi}{180} = \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 3 \times 2\pi$,

所以角 α 与 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边相同,

又 $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$, 所以角 α 是第二象限角.

(2) 因为与角 α 终边相同的角(含角 α 在内)为 $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以由 $-4\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 0$, 得 $-\frac{7}{3} \leq k \leq -\frac{1}{3}$.

因为 $k \in \mathbb{Z}$,

所以 $k = -2$ 或 $k = -1$.

当 $k = -2$ 时, $\frac{2\pi}{3} + 2 \times (-2)\pi = -\frac{10\pi}{3}$;

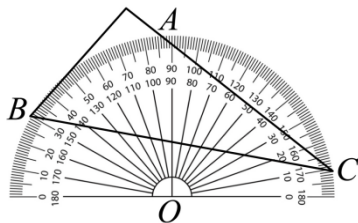
当 $k = -1$ 时, $\frac{2\pi}{3} + 2 \times (-1)\pi = -\frac{4\pi}{3}$,

故在区间 $[-4\pi, 0]$ 上与角 α 终边相同的角是 $-\frac{10\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{3}$.



【经典例题四 根据图形写出角(范围)】

【例4】(2324 高一下·上海·期中)将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上,使点C在半圆上.点A、B的读数分别为 $86^\circ, 30^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的大小为()



A. 15°

B. 28°

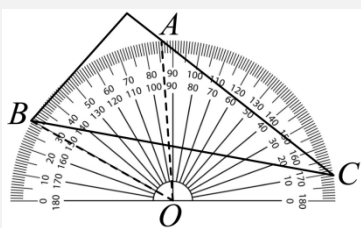
C. 29°

D. 34°

【答案】B

【分析】先由题意求出圆心角 $\angle AOB$ 的度数, 再根据圆周角定理即可求得结果.

【详解】如图：



由题意得 $\angle AOB = 86^\circ - 30^\circ = 56^\circ$

则 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 28^\circ$

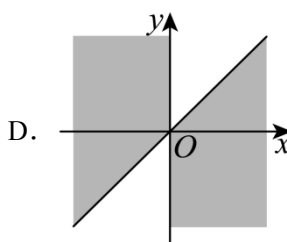
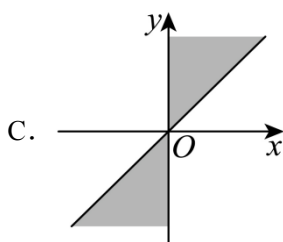
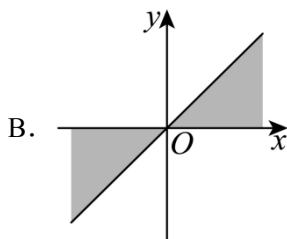
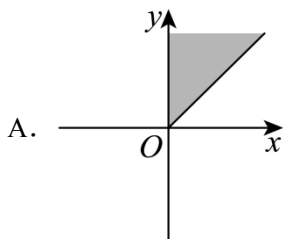
故选：B.



变式训练

1. (2425 高一下·全国·课后作业) 集合 $\left\{ \alpha \left| \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$ 中角所表示的范围 (阴影部分) 是

()



【答案】C

【分析】对 k 分奇偶性，结合终边相同的角的定义讨论判断即可

【详解】当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时， $2n\pi + \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ ，

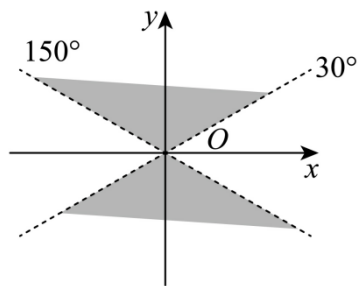
此时 α 表示的范围与 $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 表示的范围一样；

当时 $k = 2n+1 (n \in \mathbf{Z})$ ， $2n\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ ，

此时 α 表示的范围与 $\pi + \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \pi + \frac{\pi}{2}$ 表示的范围一样.

故选：C.

2. (2324 高一·全国·课后作业) 已知角 α 的终边在图中阴影所表示的范围内(不包括边界), 那么 $\alpha \in$ _____.



【答案】 $\{\alpha \mid k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

【分析】 先求得在 $0^\circ : 360^\circ$ 范围内, 终边落在阴影内的角的范围, 继而即可求得.

【详解】 在 $0^\circ : 360^\circ$ 范围内, 终边落在阴影内的角为:

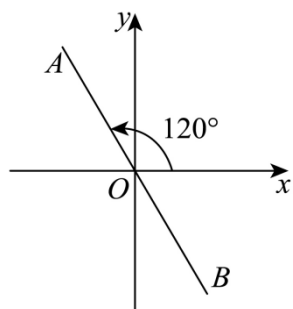
$30^\circ < \alpha < 150^\circ$ 和 $210^\circ < \alpha < 330^\circ$.

$$\alpha \in \{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 210^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 330^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\alpha \mid k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

故答案为: $\{\alpha \mid k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 150^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. (2425 高一下·上海·课堂例题) 如图, 用弧度制分别写出下列条件下的角的集合.



(1) 终边在射线 OA 上;

(2) 终边在直线 AB 上.

【答案】 (1) $\left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

(2) $\left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

【分析】 (1) 将角度改为弧度, 再加周期, 写成集合形式即可.

(2) 写出终边在 OA 和 OB 上角的集合, 再取并集即可.

【详解】 (1) 由任意角的定义得,

终边在射线 OA 上的角为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(2) 由任意角的定义得,

终边在射线 OB 上的角为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

化简得 $\left\{ \alpha \mid \alpha = (2k+1)\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

所以终边在直线 AB 上的角为 $A \cup B = \left\{ \alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



【经典例题五 确定已知角所在象限】

【例 5】(2324 高一下·上海嘉定·期中) 若 α 是第一象限角, 则下列各角是第三象限角的是 ()

- A. $90^\circ - \alpha$ B. $180^\circ - \alpha$ C. $270^\circ - \alpha$ D. $-\alpha$

【答案】C

【分析】根据象限角的概念判断即可.

【详解】若 α 是第一象限角, 则 $k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$,

$-90^\circ - k \cdot 360^\circ < -\alpha < -k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 则 $-\alpha$ 是第四象限角, 故 D 错误;

$-k \cdot 360^\circ < 90^\circ - \alpha < 90^\circ - k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 则 $90^\circ - \alpha$ 是第一象限角, 故 A 错误;

$90^\circ - k \cdot 360^\circ < 180^\circ - \alpha < 180^\circ - k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 则 $180^\circ - \alpha$ 是第二象限角, 故 B 错误;

$180^\circ - k \cdot 360^\circ < 270^\circ - \alpha < 270^\circ - k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 则 $270^\circ - \alpha$ 是第三象限角, 故 C 错误.

故选: C.



变式训练

1. (2425 高一下·上海徐汇·阶段练习) 已知集合 $A = \{x \mid x \text{ 是第二象限角}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是钝角}\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是大于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$, 那么 A, B, C 的关系是 ()

- A. $B = A \cap C$ B. $B \cup C = C$
C. $A \sqsubset C$ D. $A = B = C$

【答案】B

【分析】根据任意角定义, 结合集合描述判断各集合的关系即可.

【详解】如 480° 是第二象限角且大于 90° ，但不是钝角，A 错；

由钝角一定大于 90° ，但大于 90° 角不一定是钝角，故 B 是 C 的真子集，B 对，D 错；

如 -210° 是第二象限角，但小于 90° ，C 错；

故选：B

2. (2324 高一下·全国·课前预习) 象限角

把角放在平面直角坐标系中，使角的顶点与_____重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么，角的_____在第几象限，就说这个角是第几_____；如果角的终边在_____，就认为这个角不属于任何一个象限.

【答案】 原点； 终边； 象限角； 坐标轴上.

【分析】略

【详解】略

3. (2425 高一下·上海·课堂例题) 设 $\alpha_1 = -570^\circ$ ， $\alpha_2 = 750^\circ$ ， $\beta_1 = \frac{3\pi}{5}$ ， $\beta_2 = -\frac{\pi}{3}$.

(1) 将 α_1 、 α_2 用弧度制表示出来，并指出它们各自是哪个象限的角；

(2) 将 β_1 、 β_2 用角度制表示出来，并在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间找出与它们终边重合的所有角.

【答案】(1) 答案见解析

(2) 答案见解析

【分析】(1) 将角度数乘以 $\frac{\pi}{180}$ 即可化为弧度，再化为 $2k\pi + \alpha$ 的形式，判断所在象限；

(2) 由 $\pi = 180^\circ$ 将弧度化为角度，表示出终边重合的角，令其在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间，即可得到与它们终边重合的所有角.

【详解】(1) $\alpha_1 = -570^\circ = -570 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{19\pi}{6} = -2 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ ，在第二象限；

$\alpha_2 = 750^\circ = 750 \times \frac{\pi}{180} = \frac{25\pi}{6} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$ ，在第一象限，

即 α_1 是第二象限的角， α_2 是第一象限的角.

(2) $\beta_1 = \frac{3\pi}{5} = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$ ，终边重合的角是 $k \cdot 360^\circ + 108^\circ (k \in \mathbb{Z})$ ，

所以 $-720^\circ < k \cdot 360^\circ + 108^\circ < 0^\circ$ ，解得 $k = -2$ 或 $k = -1$ ，

所以 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 范围内与它终边重合的角是 -612° 和 -252° ；

$\beta_2 = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$ ，终边重合的角是为 $k \cdot 360^\circ - 60^\circ (k \in \mathbb{Z})$ ，

所以 $-720^\circ < k \cdot 360^\circ - 60^\circ < 0^\circ$ ，解得 $k = -1$ 或 $k = 0$ ，

所以 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 范围内与它终边重合的角是 -420° .



【经典例题六 由已知角所在的象限确定某角的范围】

【例 6】(2324 高一下·上海松江·期末) 角 α 是第二象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限为 ()

- A. 第一、三象限 B. 第二、三象限 C. 第一、四象限 D. 第三、四象限

【答案】A

【分析】表示出 α 在第二象限的集合, 再求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的集合即可

【详解】由题可知 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限; 当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是第一或第三象限.

故选: A

【点睛】思路点睛: 本题考查 $\frac{\alpha}{n}$ 所在象限的判断, 常规思路为: 先表示出 α 所在象限集合, 再求 $\frac{\alpha}{n}$ 对应集合, 结合具体 k 值综合分析



变式训练

1. (2324 高一下·上海宝山·期末) 已知 $\sin \theta - \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$, 则角 θ 所在的区间可能是 ().

- A. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

【答案】B

【解析】先化简已知得 $2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\theta$, 然后根据各个选项确定等式两端的取值范围从而得到答案.

【详解】由 $\sin \theta - \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$ 得, $2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\theta$,

对于 A, 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$,

而 $2\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin 2\theta > 0$, 两个式子不可能相等, 故错误;

对于 B, 当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in (0, 2)$, $2\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$\sin 2\theta \in (0, 1)$, 存在 θ 使得 $2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\theta$, 故正确;

对于 C, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in (2, 2\sqrt{2})$, 而

$2\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin 2\theta \in (-1, 0)$, 不可能相等, 所以错误;

对于 D, 当 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$,

$2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in (2, 2\sqrt{2})$, 而 $2\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin 2\theta \in (-1, 0)$, 不可能相等, 所以错误

故选: B.

【点睛】本题主要考查了三角恒等式的应用, 三角函数在各象限内的符号, 关键是根据各个选项确定等号两端式子的取值范围, 考查了学生分析问题、解决问题的能力.

2. (2324 高一下·上海长宁·期中) 已知 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$ _____

【答案】 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】根据二倍角公式, 先求出 $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, 再根据 α 的范围, 判断 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 符号, 即可求解.

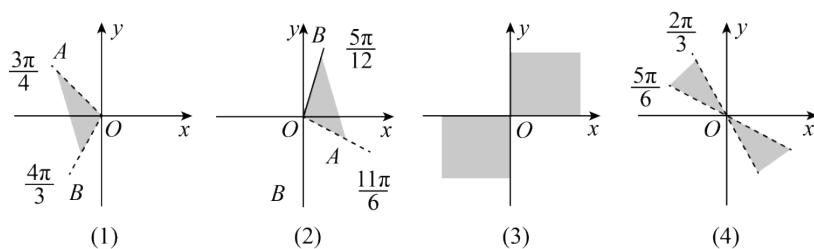
【详解】由 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, $\therefore \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}$

又 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\therefore \frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\therefore \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

故答案为: $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

【点睛】关键点点睛: 本题考查三角函数求值问题, 熟记公式是解题关键, 属于基础题.

3. (2024 高一·全国·专题练习) 如图所示, 用弧度制表示顶点在原点, 始边重合于 x 轴的非负半轴, 终边落在阴影部分的角的集合.



【答案】 (1) $\{\alpha | \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (2) $\{\alpha | -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (3) $\{\alpha | k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (4) $\{\alpha | \frac{2\pi}{3} + k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

【分析】(1) 将阴影部分看成是由 OA 逆时针转到 OB 所形成, 根据终边相同角的表示, 即可得到答案;

(2) 若将终边为 OA 的一个角改写为 $-\frac{\pi}{6}$

，此时阴影部分可以看成是 OA 逆时针旋转到 OB 所形成，即可得到答案；

(3)将图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 πrad 而得到，即可得到答案；

(4)与第(3)小题的解法类似，将第二象限阴影部分旋转 πrad 后可得到第四象限的阴影部分，即可得到答案；

【详解】(1)将阴影部分看成是由 OA 逆时针转到 OB 所形成，

故满足条件的角的集合为 $\{\alpha | \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

(2)若将终边为 OA 的一个角改写为 $-\frac{\pi}{6}$ ，此时阴影部分可以看成是 OA 逆时针旋转到 OB 所形成，故满足

条件的角的集合为 $\{\alpha | -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

(3)将图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 πrad 而得到，所以满足条件的角的集合为

$\{\alpha | k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

(4)与第(3)小题的解法类似，将第二象限阴影部分旋转 πrad 后可得到第四象限的阴影部分。所以满足条件的

角的集合为 $\{\alpha | \frac{2\pi}{3} + k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

【点睛】本题主要考查了终边相同角的表示及其应用，其中解答中熟记终边相同角的表示，准确写出阴影部分的范围是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题。



【经典例题七 确定 n 倍角所在象限】

【例 7】(2324 高一下·上海杨浦·期中) θ 是第三象限角，且 $\sqrt{1+\sin\theta} = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ ，则 $\frac{\theta}{2}$ 是 ()

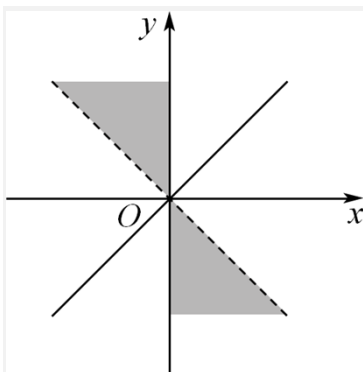
- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

【答案】B

【分析】由条件可得 $k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ，再根据 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} > 0$ ，可得 $\frac{\theta}{2}$ 是第二象限角。

【详解】解：Q θ 是第三象限角， $\therefore 2k\pi + \pi < \theta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，即 $k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，故 $\frac{\theta}{2}$ 是第二或第四象限角。

如图



又 $Q \sqrt{1+\sin \theta} = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} > 0$ ，则 $\frac{\theta}{2}$ 是第二象限角，

故选：B.

【点睛】本题主要考查同角三角的基本关系，象限角的表示，属于基础题.



变式训练

1. (2324 高一下·上海徐汇·期末) 设 α 是第三象限角，则下列函数值一定为负数的是 ()

A. $\cos 2\alpha$

B. $\tan \frac{\alpha}{2}$

C. $\sin \frac{\alpha}{2}$

D. $\cos \frac{\alpha}{2}$

【答案】B

【分析】根据 α 的范围，求出 2α 以及 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围，根据三角函数在各个象限的符号，即可得出答案.

【详解】对于 A 项，由已知， α 的取值集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

所以， $2k \cdot 360^\circ + 360^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$,

所以， $(2k+1) \cdot 360^\circ < 2\alpha < (2k+1) \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$,

所以， 2α 可能是第一象限角，也可能为第二象限角，终边也有可能落在 y 轴正半轴上，故 A 错误；

对于 B 项，由已知， α 的取值集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

所以， $k \cdot 180^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 135^\circ, k \in \mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时，设 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$ ，则 $n \cdot 360^\circ + 90^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 135^\circ, n \in \mathbf{Z}$,

此时 $\frac{\alpha}{2}$ 位于第二象限， $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$ ；

当 k 为奇数时，设 $k = 2n+1, n \in \mathbf{Z}$ ，则 $n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 315^\circ, n \in \mathbf{Z}$,

此时 $\frac{\alpha}{2}$ 位于第四象限， $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$.

综上所述, $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$ 恒成立, 故 B 项正确;

对于 C 项, 当 $\frac{\alpha}{2}$ 位于第二象限时, $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, 故 C 项错误;

对于 D 项, 当 $\frac{\alpha}{2}$ 位于第四象限时, $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, 故 D 项错误.

故选: B.

2. (2324 高一下·上海·阶段练习) 已知 α 终边在第四象限, 则 2α 终边所在的象限为_____.

【答案】第三象限或第四象限或 y 轴负半轴

【分析】由角 α 的范围求出 2α 的范围, 再结合象限角的概念求解即可.

【详解】由于 α 是第四象限角, 故 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi$, 故 $4k\pi - \pi < 2\alpha < 4k\pi$, 即 2α 终边在“第三象限或第四象限或 y 轴负半轴”.

故答案为: 第三象限或第四象限或 y 轴负半轴.

3. (2324 高一下·上海·课后作业) 已知角 α 的终边在第四象限.

(1) 试分别判断 $\frac{\alpha}{2}$ 、 2α 是哪个象限的角;

(2) 求 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围.

【答案】(1) $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限的角, 2α 是第三或第四象限或 y 轴的非正半轴的角; (2)

$$\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{2}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

【分析】(1) 先写出 α 的范围, 再求出 $\frac{\alpha}{2}$ 和 2α 的范围, 即可求解;

(2) 由写出 α 的范围, 再求出 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围, 再判断即可.

【详解】 α 是第四象限的角,

$$\therefore 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore k\pi + \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}),$$

当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时,

$$\therefore 2n\pi + \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \pi (n \in \mathbf{Z})$$

此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限;

当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时,

$$\therefore 2n\pi + \frac{7\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + 2\pi (n \in \mathbf{Z})$$

此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限；

$$\text{又} \text{Q} \ 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Q} \ 4k\pi + 3\pi < 2\alpha < 4k\pi + 4\pi (k \in \mathbb{Z})$$

此时 2α 是第三象限或第四象限或 y 轴的非正半轴；

$$(2) \text{Q} \ 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{3} < \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$



【经典例题八 确定 n 分角所在象限】

【例 8】(2324 高一下·上海徐汇·期末) 已知 α 是第一象限角，那么 $\frac{\alpha}{3}$ 不可能是 ()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

【答案】D

【分析】由题意可得 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，由此得 $\frac{2}{3}k\pi < \frac{\alpha}{3} < \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ，讨论 k 的取值，即分 $k = 3n, n \in \mathbb{Z}$ 、 $k = 3n+1, n \in \mathbb{Z}$ 、 $k = 3n+2, n \in \mathbb{Z}$ 进行讨论，即可确定答案。

【详解】由题意 α 是第一象限角，即 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

$$\text{故} \ \frac{2}{3}k\pi < \frac{\alpha}{3} < \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z},$$

当 $k = 3n, n \in \mathbb{Z}$ 时， $2n\pi < \frac{\alpha}{3} < 2n\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ， $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角；

当 $k = 3n+1, n \in \mathbb{Z}$ 时， $2n\pi + \frac{2\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < 2n\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ， $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限角；

当 $k = 3n+2, n \in \mathbb{Z}$ 时， $2n\pi + \frac{4\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < 2n\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ， $\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角；

故 $\frac{\alpha}{3}$ 不可能是第四象限角，

故选：D



变式训练

1. (2024·上海·模拟预测) 下列命题中不正确命题的个数是 ()

① 已知 a, b 是实数，则“ $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b$ ”是“ $\log_3 a > \log_3 b$ ”的充分而不必要条件；

② $\exists x \in (-\infty, 0)$, 使 $2^x < 3^x$;

③ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan x > \sin x$;

④ 若角 α 的终边在第一象限, 则 $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|}$ 的取值集合为 $\{-2, 2\}$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【分析】由 $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b \Leftrightarrow a > b$, $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b > 0$ 可判断出①错误, 由当 $x < 0$ 时, $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$ 可判断出②错误, 由当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x > 0, 1 > \cos x$, 可得到③正确, 由 $\alpha \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 可得 $\frac{\alpha}{2} \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$, 然后可判断出④正确.

【详解】因为 $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b \Leftrightarrow a > b$, $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b > 0$

所以“ $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b$ ”是“ $\log_3 a > \log_3 b$ ”的必要不充分条件, 故①错误

因为当 $x < 0$ 时, $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$, 即 $2^x > 3^x$, 故②错误

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x > 0, 1 > \cos x > 0$, 所以 $\sin x > \sin x \cos x$, 所以 $\tan x > \sin x$, 故③正确

因为角 α 的终边在第一象限, 即 $\alpha \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\frac{\alpha}{2} \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$

当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限, $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|} = -2$

当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限, $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|} = 2$

所以 $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|}$ 的取值集合为 $\{-2, 2\}$, 故④正确

综上: 不正确命题的个数是 2

故选：B

【点睛】本题考查的知识点：指对数函数的性质，三角函数的概念及其在每个象限符号特点，属于基础题.

2. (2425 高一下·上海静安·阶段练习) 已知 θ 为第二象限角，那么 $\frac{\theta}{3}$ 是第_____象限角.

【答案】一、二、四

【分析】结合第二象限角的表示可得 $30^\circ + k \cdot 120^\circ < \frac{\theta}{3} < 60^\circ + k \cdot 120^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ，讨论 k 确定其所在选项.

【详解】 $\because \theta$ 为第二象限角，

$$\therefore 90^\circ + k \cdot 360^\circ < \theta < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore 30^\circ + k \cdot 120^\circ < \frac{\theta}{3} < 60^\circ + k \cdot 120^\circ, k \in \mathbb{Z},$$

当 $k = 3n, n \in \mathbb{Z}$ 时， $30^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\theta}{3} < 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ ，属于第一象限，

当 $k = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 时， $150^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\theta}{3} < 180^\circ + n \cdot 360^\circ$ ，属于第二象限，

当 $k = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}$ 时， $270^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\theta}{3} < 300^\circ + n \cdot 360^\circ$ ，属于第四象限，

$\therefore \frac{\theta}{3}$ 是第一、二或第四象限角.

故答案：一、二、四

3. (2324 高一下·上海·课后作业) (1) 如果角 α 的终边在第二象限，讨论 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的位置；

(2) 由此可否得出在其他几个象限的结论？请画出 α 的终边在第一、二、三、四象限时， $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的位置；

(3) 类似地讨论 $\frac{\alpha}{3}$ 的位置(可设 α 在第一象限，讨论 $\frac{\alpha}{3}$ 终边的位置，并写出其他几个象限的情形).

【答案】(1) 第一象限或第三象限；(2) 可得出，图像见解析；(3) α 的终边在第一象限， $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一或第二或第三象限； α 的终边在第二象限， $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一或第二或第四象限； α 的终边在第三象限， $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一或第三或第四象限； α 的终边在第四象限， $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第二或第三或第四象限；

【分析】(1) 当角 α 的终边在第二象限，得 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，则 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，分 k 是奇数和是偶数进行讨论；

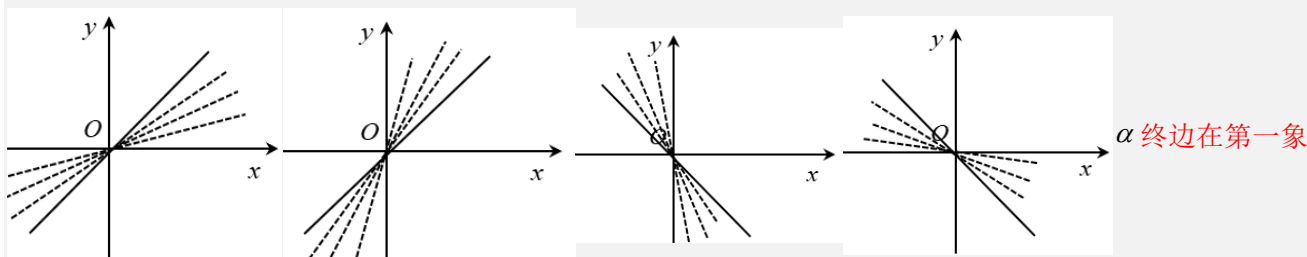
(2) 确定 α 的终边在第一、二、三、四象限时，得出 α 的范围，进而确定 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的位置，结合象限，画出图形即可；

(3) 同理 (1) (2), 讨论 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边位置.

【详解】(1) 由角 α 的终边在第二象限, 得 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限, 当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限.

(2) 由 (1) 可得, 当 α 的终边在第一、二、三、四象限时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边分别在第一或第三、第一或第三、第二或第四、第二或第四象限, 如图:



限 α 终边在第二象限 α 终边在第三象限 α 终边在第四象限

(3) 当 α 的终边在第一象限时, 即 $2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{2}{3}k\pi < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 3n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一象限;

当 $k = 3n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第二象限;

当 $k = 3n+2, n \in \mathbf{Z}$ 时, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第三象限;

$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一或第二或第三象限,

推广可知: 当 α 的终边在第二象限时, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一或第二或第四象限;

当 α 的终边在第三象限时, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一或第三或第四象限;

当 α 的终边在第四象限时, $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第二或第三或第四象限

【点睛】方法点睛: 本题考查已知 α , 推导 $\frac{\alpha}{n}$ 象限角的方法, 常规解法为: 写出已知角的范围表达式, 再求出 $\frac{\alpha}{n}$ 对应范围表达式, 讨论 k 取 1、2、3、4、... 时终边对应象限角的分布情况, 然后总结出一般规律.



【经典例题九 用弧度制表示角的集合】

【例 9】(2024 高一·全国·专题练习) 用弧度制表示与 150° 角的终边相同的角的集合为 ()

A. $\left\{ \beta \mid \beta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$

B. $\left\{ \beta \mid \beta = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \right\}$

$$C. \left\{ \beta \mid \beta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$D. \left\{ \beta \mid \beta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

【答案】D

【分析】利用弧度制表达出 $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ ，进而表达出与 150° 角的终边相同的角的集合.

【详解】因为 $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ ，且角度和弧度不能在一个集合中同时使用，

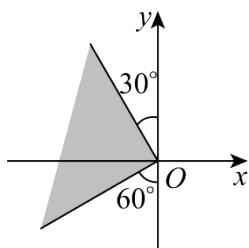
故与 150° 角的终边相同的角的集合为 $\left\{ \beta \mid \beta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

故选：D



变式训练

1. (2024 高一·全国·专题练习) 若角 α 的终边落在如图所示的阴影部分内，则角 α 的取值范围是 ()



$$A. \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$$

$$B. \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$C. \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6} \right]$$

$$D. \left[2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \right] (k \in \mathbf{Z})$$

【答案】D

【分析】写出两条边界所表示的角，数形结合得到角 α 的取值范围.

【详解】阴影部分的两条边界分别是 $\frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{7\pi}{6}$ 角的终边，

所以 α 的取值范围是 $\left[2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \right] (k \in \mathbf{Z})$.

故选：D

2. (2024 高一下·上海普陀·期末) 走时精确的钟表，中午12时，分针与时针重合于表面上12的位置，则当下一次分针与时针重合时，时针转过的弧度数的绝对值等于_____.

【答案】 $\frac{2\pi}{11}$.

【分析】设时针转过的角的弧度数为 α ，可知分针转过的角为 12α ，于此得出 $12\alpha = \alpha + 2\pi$ ，由此可计算出 α 的值，从而可得出时针转过的弧度数的绝对值 α 的值.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/055140000024012104>