§1.3.3　函数的最大(小)值与导数

[课标要求]

1．借助函数图象，直观地理解函数的最大值和最小值的概念．(难点)

2．弄清函数最大值、最小值与极大值、极小值的区别与联系．(易混点)

3．会用导数求在给定区间上函数的最大值、最小值．(重点)

课前预习案·素养养成

基础知识整合

函数的最大(小)值与导数的关系

1．函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上的最值

一般地，如果在区间$[a，b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有__最大值__和__最小值__.

2．函数最值的求法

求函数$y=f(x)$在$[a，b]$上的最值可分两种情况进行：

(1)当函数$f(x)$单调时：若函数$y=f(x)$在$[a，b]$上单调递增，则$f(a)$为函数的<u>最小值</u>，$f(b)$为函数的<u>最大值</u>；若函数$y=f(x)$在$[a，b]$上单调递减，则$f(a)$为函数的<u>最大值</u>，$f(b)$为函数的<u>最小值</u>.

(2)当函数$f(x)$不单调时：

①求$y=f(x)$在$(a，b)$内的极值；

②将$y=f(x)$的各<u>极值</u>与端点处的函数值$f(a)$、$f(b)$比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

3．函数的极值与最值的区别

	区别		
极值	是在局部对函数值的比较，表示函数在<u>某一点附近</u>的局部性质.	极值可能有多个，也可能没有.	只能在区间内取得.
最值	是在整个区间上对函数值的比较，考查函数在<u>整个区间</u>上的情况.	最大(小)值最多只有一个.	可在区间的端点处取得.

核心要点探究

知识点　求函数的最值

【问题1】　如图，观察区间$[a，b]$上函数$y=f(x)$的图象，你能找出它的极大值、极小值吗?

答案　$f(x_1)$，$f(x_3)$，$f(x_5)$是函数$y=f(x)$的极小值；$f(x_2)$，$f(x_4)$，$f(x_6)$是函数$y=f(x)$的极大值.

【问题2】 对问题1中的函数$y=f(x)$你能找出它在区间$[a，b]$上的最大值、最小值吗？在区间$(a，b)$上呢？

答案 函数$y=f(x)$在区间$[a，b]$上的最大值是$f(a)$，最小值是$f(x_3)$．若区间改为$(a，b)$，则$f(x)$有最小值$f(x_3)$，无最大值．

【问题3】 结合问题1、2，思考极值与最值有什么关系?

答案 区别：(1)函数的最值是比较整个定义域内的函数值得出的；函数的极值是比较极值点附近的函数值得出的.

(2)函数在其定义区间上的最大值、最小值最多各有一个，而函数的极值可能不止一个，也可能一个也没有，函数的最大值一定不小于它的最小值.

(3)极值只能在区间内取得，最值则可以在端点处取得.

联系：极值有可能是最值，最值不在端点处取得的可导函数，其最值一定是极值，同时区间(a,b)内若只有一个极值，则极值一定为最值.

【问题4】　求函数$y=f(x)$在区间$[a，b]$上的最大值与最小值的步骤是什么？

答案　求函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上的最值的步骤如下：

(1)求函数$f(x)$的导函数$f'(x)$；

(2)令$f'(x)=0$，求出使得方程$f'(x)=0$的所有点；

(3)确定函数$y=f(x)$在$(a，b)$内的极值；

(4)将函数$y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$比较，其中最大的是函数的最大值，最小的是函数的最小值.

课堂探究案·素养提升

题型一　求函数的最值

【例 1】　求下列函数的最值.

(1)$f(x)=2x^3-12x$，$x\in[-1，3]$；

(2)$f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$，$x\in[0，2\pi]$.

【解析】 (1)$f(x)=2x^3-12x$,

$\therefore f'(x)=6x^2-12=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-\sqrt{2}$($-\sqrt{2}\notin[-1,3]$，故舍去)或 $x=\sqrt{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$与 $f(x)$的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},3)$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	↘	极小值$-8\sqrt{2}$	↗	18

$\therefore$当 $x=\sqrt{2}$时，$f(x)$有最小值 $f(\sqrt{2})=-8\sqrt{2}$;

当 $x=3$ 时，$f(x)$有最大值 $f(3)=18$.

(2)$f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$，令 $f'(x)=0$，又 $x\in[0,2\pi]$，

解得 $x=\frac{2}{3}\pi$ 或 $x=\frac{4}{3}\pi$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如表：

x	0	$\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)$	$\frac{2}{3}\pi$	$\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$	$\frac{4}{3}\pi$	$\left(\frac{4}{3}\pi,2\pi\right)$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	极大值 $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	极小值 $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	π

∴当 $x=0$ 时，$f(x)$有最小值 $f(0)=0$；

当 $x=2\pi$ 时，$f(x)$有最大值 $f(2\pi)=\pi$.

●规律方法

求函数最值的解题策略

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是单调函数，则函数 $f(x)$ 在区间的端点处取得最值.

(2)可利用基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}(a, b>0)$ 求函数的最值，若 ab 为定值，可求 $a+b$ 的最小值．若 $a+b$ 为定值，可求 ab 的最大值.

(3)利用导数求函数在区间 $[a, b]$ 内的极值，再求区间端点的值进行比较，也可求出最值.

变式训练

1．求函数$f(x)=x^5+5x^4+5x^3+1$在区间$[-1，4]$上的最大值与最小值.

解析 $f'(x)=5x^4+20x^3+15x^2=5x^2(x+3)(x+1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-1$ 或 $x=-3$.

$0\in[-1，4]$，$-1\in[-1，4]$，$-3\notin[-1，4]$，

列表如下：

x	-1	$(-1，0)$	0	$(0，4)$	4
$f'(x)$	0	+	0	+	2 800
$f(x)$	0	↗	1	↗	2 625

$\because f(x)$在$[-1，4]$上单调递增，

$\therefore$函数 $f(x)=x^5+5x^4+5x^3+1$ 在区间$[-1，4]$上的最大值为 2 625，最小值为 0.

题型二　已知函数的最值求参数

【例2】　已知函数$f(x)=ax^3-6ax^2+b$在$[-1，2]$上的最大值为3，最小值为-29，求a，b的值.

【解析】 依题意，显然 $a\neq 0$.

因为 $f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$，$x\in[-1,2]$，

所以令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=4$(舍去).

(1)若 $a>0$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$[-1,0)$	0	$(0,2]$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

由上表知，当 $x=0$ 时，$f(x)$取得最大值，

所以 $f(0)=b=3$.

又 $f(2)=-16a+3$，$f(-1)=-7a+3$，故 $f(-1)>f(2)$，

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$取得最小值，

即 $-16a+3=-29$，$a=2$.

(2)若 $a<0$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$[-1, 0)$	0	$(0, 2]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$取得最小值，所以 $f(0)=b=-29$.

又 $f(2)=-16a-29$，$f(-1)=-7a-29$，

故 $f(2)>f(-1)$.

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$取得最大值，

即 $-16a-29=3$，$a=-2$.

综上所述，所求 a，b 的值为$\begin{cases}a=2,\\b=3,\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-2,\\b=-29.\end{cases}$