

重难点 02 集合中的创新问题

【题型归纳目录】



【方法技巧与总结】

1、集合中的创新问题主要体现在（1）集合中的新定义问题；（2）集合中的新运算问题；（3）集合中的新性质问题。对于这类以集合为背景的创新问题是近几年考查的一个热点。此类题目常常以“问题”为核心，以“探究”为途径，以“发现”为目的，以集合为依托。解决集合中的创新问题的着手点：（1）正确理解新定义、新运算、新性质的定义，剥去它们的外表，转化为我们熟悉的集合知识；（2）合理利用集合性质是破解创新性集合问题的关键；（3）对于选择题，可结合选项，通过验证、排除、对比、特值法进行求解，当不满足要求时，只需通过举反例来说明。

2、解决与集合有关的创新题的对策：

（1）分析含义，合理转化，准确提取信息是解决此类问题的前提。剥去新定义、新法则的外表，利用我们所学集合的性质将陌生的集合转化为我们所熟悉的集合，陌生的运算转化为我们熟悉的运算，是解决这类问题的突破口，也是解决此类问题的关键。

（2）根据新定义（新运算、新法则）的要求，“照章办事”，逐条分析、验证和运算，其中要注意应用集合的有关性质。

（3）对于选择题，可结合选项，通过验证、排除、对比、特值法等进行求解或排除错误选项，当不满足新定义的要求时，只需通过举反例来说明，以达到快速判断结果的目的。

【经典题型】

题型一：创新集合新定义

【典例 11】（2024·黑龙江·二模）已知集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ，定义集合： $A * B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ ，则集合 $A * B$ 的非空子集的个数是（ ）个。

A. 16

B. 15

C. 14

D. 13

【答案】B

【解析】根据题意， $A * B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ ，

则集合 $A*B$ 的非空子集的个数是 $2^4 - 1 = 15$.

故选：B

【典例 12】(2024·高一·上海浦东新·开学考试) 定义集合运算 $A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的差集；定义集合运算 $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$ 称为集合 A 与集合 B 的对称差，有以下 4 个等式：①

$$A\Delta B = B\Delta A; \quad ② (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C); \quad ③ A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C); \quad ④$$

$$A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C), \text{ 则 4 个等式中恒成立的是 ()}$$

- A. ①② B. ①②③ C. ①②④ D. ①②③④

【答案】B

【解析】对于①中，由 $B\Delta A = (B-A) \cup (A-B) = (A-B) \cup (B-A) = A\Delta B$ ，所以①正确；

对于②中，由 $A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\} = \{x | x \in A, x \notin (A \cap B)\} = A - (A \cap B)$ ，

同理可得： $B-A = B - (A \cap B)$ ，

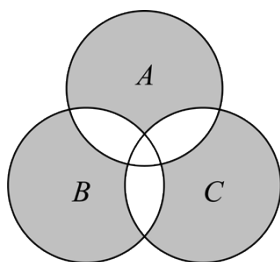
$$\text{则 } A\Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B),$$

$$\text{所以 } (A\Delta B)\Delta C = (A\Delta B) \cup C - (A\Delta B) \cap C,$$

所以表示的集合为图 (1) 中阴影部分所表示的集合，如图所示，

同理 $A\Delta(B\Delta C) = A \cup (B\Delta C) - A \cap (B\Delta C)$ ，也表示图 (1) 中阴影部分所表示的集合，

所以 $(A\Delta B) \cup C = A\Delta(B\Delta C)$ ，所以②正确；



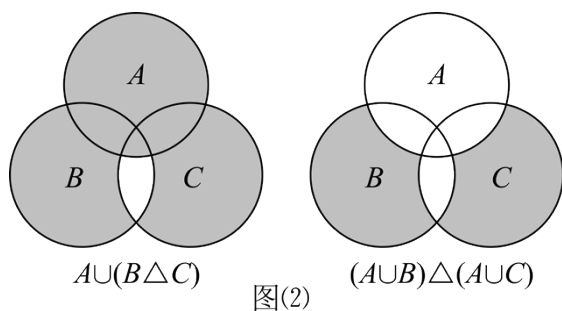
图(1)

对于③中，由 $A \cap (B\Delta C) = A \cap (B \cup C - B \cap C) = A \cap (B \cup C) - A \cap (B \cap C)$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) - (A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C), \text{ 所以③正确；}$$

对于④中，如图 (2) 所示，可得 $A \cup (B\Delta C) \neq (A \cup B)\Delta(A \cup C)$ ，所以④错误。

故选：B.



【变式 11】（2024·高一·北京丰台·期末）记 $R(A)$ 为非空集合 A 中的元素个数，定义

$$A * B = \begin{cases} R(A) - R(B), & R(A) \geq R(B) \\ R(B) - R(A), & R(A) < R(B) \end{cases} \text{. 若 } A = \{1, 2\}, B = \{x | (x^2 + ax)(x^2 + ax + 5) = 0\}, \text{ 且 } A * B = 1, \text{ 设实数 } a \text{ 的}$$

所有可能取值组成的集合是 S ，则 $R(S)$ 等于 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】由定义得 $R(A) = 2$ ，又 $A * B = 1$ ，则 $R(B) = 1$ 或 $R(B) = 3$ ，

由方程 $(x^2 + ax)(x^2 + ax + 2) = 0$ ，得 $x^2 + ax = 0$ 或 $x^2 + ax + 2 = 0$ ，

当 $R(B) = 1$ 时，方程 $(x^2 + ax)(x^2 + ax + 2) = 0$ 只有一个实数根，

而方程 $x^2 + ax = 0$ 有一根为 0，则另一根必为 0， $-a = 0$ ，此时 $x^2 + ax + 2 = 0$ 无实根，因此 $a = 0$ ；

当 $R(B) = 3$ 时，必有 $a \neq 0$ ，方程 $x^2 + ax = 0$ 有两个不相等的实数根 $x_1 = 0, x_2 = -a$ ，

并且 $x_1 = 0, x_2 = -a$ 都不是方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 的根，

显然方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 有两个相等的实数根，且异于 $x_1 = 0, x_2 = -a$ ，

于是 $\Delta = a^2 - 8 = 0$ ，解得 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = -2\sqrt{2}$ ，

当 $a = 2\sqrt{2}$ 时，方程 $(x^2 + ax)(x^2 + ax + 2) = 0$ 的根为 $0, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ ，满足题意，

当 $a = -2\sqrt{2}$ 时，方程 $(x^2 + ax)(x^2 + ax + 2) = 0$ 的根为 $0, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}$ ，满足题意，

因此 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = -2\sqrt{2}$ ，所以 $S = \{0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$ ， $R(S) = 3$ 。

故选：C

【变式 12】（2024·高一·广东惠州·阶段练习）对于集合 M, N ，定义 $M - N = \{x | x \in M, x \notin N\}$ ，

$$M \oplus N = (M - N) \cup (N - M), \text{ 设 } A = \left\{x \mid x \geq -\frac{9}{4}, x \in \mathbb{R}\right\}, B = \{x \mid x < 0, x \in \mathbb{R}\}, \text{ 则 } A \oplus B = ()$$

$$A. \left\{x \mid -\frac{9}{4} < x < 0, x \in \mathbf{R}\right\}$$

$$B. \left\{x \mid -\frac{9}{4} \leq x < 0, x \in \mathbf{R}\right\}$$

$$C. \left\{x \mid x < -\frac{9}{4} \text{ 或 } x \geq 0, x \in \mathbf{R}\right\}$$

$$D. \left\{x \mid x < -\frac{9}{4} \text{ 或 } x > 0, x \in \mathbf{R}\right\}$$

【答案】C

【解析】集合 $A = \left\{x \mid x \geq -\frac{9}{4}, x \in \mathbf{R}\right\}$, $B = \{x \mid x < 0, x \in \mathbf{R}\}$,

$$\text{则 } \complement_{\mathbf{R}} A = \left\{x \mid x < -\frac{9}{4}, x \in \mathbf{R}\right\}, \quad \complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbf{R}\},$$

由定义可得: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\} = A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B - A = \{x \mid x \in B \text{ 且 }$

$$x \notin A\} = B \cap \complement_{\mathbf{R}} A = \left\{x \mid x < -\frac{9}{4}, x \in \mathbf{R}\right\},$$

$$\text{所以 } A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \left\{x \mid x < -\frac{9}{4} \text{ 或 } x \geq 0, x \in \mathbf{R}\right\},$$

选项 ABD 错误, 选项 C 正确.

故选: C

【变式 13】(2024·高一·湖北·阶段练习) 设 A, B 为非空集合, 定义 $A * B = \{x \mid x \in A \cup B, \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 已

知 $M = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x \mid x > 2\}$, 则 $M * N = (\quad)$

$$A. \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

$$B. \{x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$$

$$C. \{x \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x > 3\}$$

$$D. \{x \mid 0 \leq x < 2\}$$

【答案】C

【解析】由于 $M = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x \mid x > 2\}$,

$$\text{所以 } M \cup N = \{x \mid x \geq 0\}, \quad M \cap N = \{x \mid 2 < x \leq 3\},$$

$$\text{所以 } M * N = \{x \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x > 3\},$$

故选: C.

题型二: 创新集合新运算

【典例 21】(2024·高一·湖北·阶段练习) 在实数集 $\mathbf{R}$ 中定义一种运算“ $\otimes$ ”, 具有以下三条性质:

①对任意 $a \in \mathbf{R}$, $0 \otimes a = a$;

②对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, $a \otimes b = b \otimes a$;

③对任意 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a \otimes b) \otimes c = c \otimes (ab) + (a \otimes c) + (b \otimes c) - 2c$,

以下正确的选项是 ()

$$A. 2 \otimes (0 \otimes 2) = 0$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/055242111133011322>