

## 圆中的重要模型之圆弧的中点模型

当圆中出现弧的中点时,我们要注意考虑几个方面:三角形的中位线,垂径定理,圆周角定理,弦,弧,圆心角,圆周角的关系等等。其关系复杂,在理解其做辅助线的方法和分析技巧的基础之上,还要注意各知识点之间的联系,才是形成稳固的解题思路以及推导模式的最佳选择,以便于最后才能突破复杂的综合题型以及压轴题型。

当圆中出现弦的中点或弧的中点时,我们联想到的是利用垂径定理以及圆周角定理进行思路的突破,这样的解决方式比较直接,而且能够提高大家解题的效率。

### 目录

#### 例题讲解模型

##### 模型 1. 与垂径定理相关的中点模型

##### 模型 2. 与圆周角定理相关的中点模型(母子模型)

##### 模型 3. 垂径定理与圆周角定理结合的中点模型

##### 模型 4. 与托勒密定理相关的中点模型

#### 习题练模型

### 例题讲解模型

#### 模型 1. 与垂径定理相关的中点模型

##### 模型解读

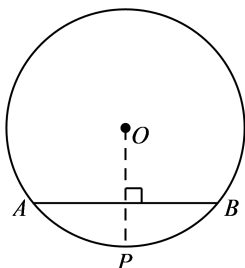


图 1

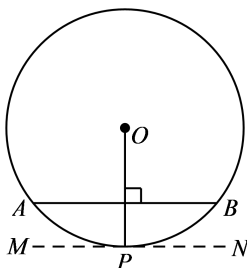


图 2

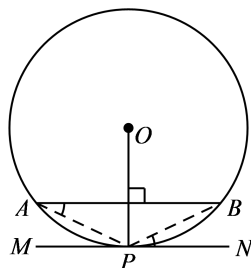


图 3

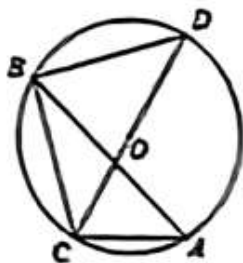
- 1) 条件:如图 1, 已知点  $P$  是  $\widehat{AB}$  中点, 连接  $OP$ , 结论:  $OP \perp AB$ ;
- 2) 条件:如图 2, 已知点  $P$  是  $\widehat{AB}$  中点, 过点  $P$  作  $MN \parallel AB$ , 结论:  $MN$  是圆  $O$  的切线;
- 3) 条件:如图 3, 点  $P$  是  $\widehat{AB}$  中点, 连接  $BP$ 、 $AP$ , 若  $\angle BPN = \angle A$ , 结论:  $MN$  是圆  $O$  切线。

##### 模型证明

- 证明: 1) 根据垂径定理易得:  $OP \perp AB$ ;
- 2) 由 1) 知:  $OP \perp AB$ ,  $\therefore MN \parallel AB$ ,  $\therefore OP \perp MN$ ,  $\therefore MN$  是圆  $O$  的切线。
- 3) 由 1) 知:  $OP \perp AB$ ,  $\therefore \angle BPO + \angle ABP = 90^\circ$ ,  $\because P$  是  $\widehat{AB}$  中点,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{BP}$ ,  $\therefore \angle ABP = \angle BAP$ ,  $\because \angle BPN = \angle A$ ,  $\therefore \angle BPN = \angle ABP$ ,  $\therefore \angle BPO + \angle BPN = 90^\circ$ ,  $\therefore MN$  是圆  $O$  的切线。

## 模型运用

1. (2023·陕西西安·校考模拟预测) 如图,  $\triangle BCD$  内接于  $\odot O$ , 点  $B$  是  $\widehat{CD}$  的中点,  $CD$  是  $\odot O$  的直径. 若  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AC = 4$ , 则  $BC$  的长为 ( )

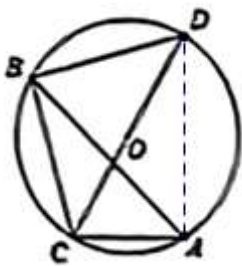


- A. 5                      B.  $4\sqrt{2}$                       C.  $4\sqrt{3}$                       D.  $5\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】连接  $AD$ , 先求得  $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$ , 再利用直角三角形的性质求得  $CD = 2AC = 2 \times 4 = 8$ , 又由点  $B$  是  $\widehat{CD}$  的中点得  $BC = BD$ , 进而利用勾股定理即可得解.

【详解】解: 如图, 连接  $AD$ ,  $\because CD$  是  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$ ,



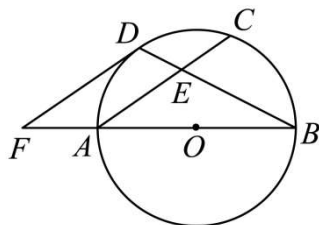
$\because \angle ABC = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle CDA = \angle ABC = 30^\circ$ ,  $\therefore CD = 2AC = 2 \times 4 = 8$ ,

$\because$  点  $B$  是  $\widehat{CD}$  的中点,  $\therefore BC = BD$ ,

$\because \angle CBD = 90^\circ$ ,  $\therefore BC^2 + BD^2 = CD^2$  即  $2BC^2 = 64$ , 解得  $BC = 4\sqrt{2}$ , 故选: B.

【点睛】本题主要考查了勾股定理, 圆周角定理,  $30^\circ$  直角三角形的性质, 弧、弦之间的关系, 熟练掌握圆周角定理及勾股定理是解题的关键.

2. (2023·湖北十堰·九年级校考期中) 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $C$  是  $\odot O$  上一点,  $D$  是  $\widehat{AC}$  的中点,  $BD$  交  $AC$  于点  $E$ , 过点  $D$  作  $DF \parallel AC$  交  $BA$  的延长线于点  $F$ .



- (1) 求证:  $DF$  是  $\odot O$  的切线; (2) 若  $AF = 2$ ,  $FD = 4$ , 求  $\triangle DFB$  的面积.

【答案】(1) 见解析 (2)  $\frac{48}{5}$

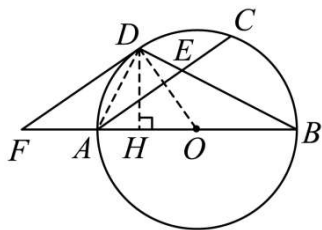
【分析】(1) 连接  $OD$ , 由垂径定理得  $OD \perp AC$ , 根据平行线的性质证明  $OD \perp DF$ , 进而可得结论;

(2) 设  $\odot O$  的半径为  $r$ , 根据勾股定理列方程可得:  $r^2 + 4^2 = (r+2)^2$ , 解得:  $r=3$ , 利用面积法求出  $DH = \frac{12}{5}$ , 然后利用三角形面积公式即可求解.

【详解】(1) 连接  $OD$ ,  $\because D$  是  $\widehat{AC}$  的中点,  $\therefore OD \perp AC$ ,

$\because DF \parallel AC$ ,  $\therefore OD \perp DF$ ,  $\because OD$  为  $\odot O$  的半径,  $\therefore$  直线  $DF$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 连接  $AD$ , 作  $DH \perp AB$  于点  $H$ , 设  $\odot O$  的半径为  $r$ , 则  $OD = OA = r$ ,  $OF = 2 + r$ ,



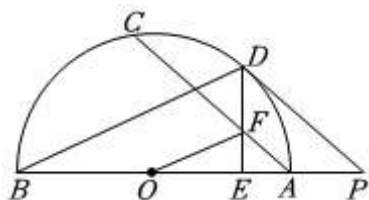
$\because \angle ODF = 90^\circ$ ,  $\therefore r^2 + 4^2 = (r+2)^2$ , 解得  $r=3$ ,  $\therefore AB=6$ ,  $BF=8$ ,  $\therefore OF=8-3=5$ .

$\because \frac{1}{2}FD \cdot OD = \frac{1}{2}OF \cdot DH$ ,  $\therefore 4 \times 3 = 5DH$ ,  $\therefore DH = \frac{12}{5}$ ,

$\therefore \triangle DFB$  的面积  $= \frac{1}{2}FB \cdot DH = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{12}{5} = \frac{48}{5}$ .

【点睛】本题考查了切线的判定, 圆周角定理, 勾股定理等知识, 解答此题的关键是正确作出辅助线..

3. (2023 春·福建福州·九年级统考期中) 如图, 点  $C$  在以  $AB$  为直径的半圆  $O$  上 (点  $C$  不与  $A, B$  两点重合), 点  $D$  是  $\widehat{AC}$  的中点,  $DE \perp AB$  于点  $E$ , 连接  $AC$  交  $DE$  于点  $F$ , 连接  $OF$ , 过点  $D$  作半圆  $O$  的切线  $DP$  交  $BA$  的延长线于点  $P$ . (1) 求证:  $AC \parallel DP$ ; (2) 求证:  $AC = 2DE$ ; (3) 连接  $CE, CP$ , 若  $AE:EO = 1:2$ , 求  $\frac{CE}{CP}$  的值.



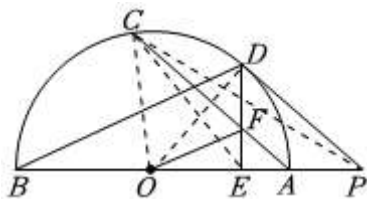
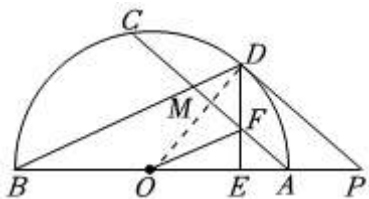
【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3)  $\frac{2}{3}$

【分析】(1) 连接  $OD$ , 由垂径定理得出  $OD \perp AC$ , 由切线的性质得出  $OD \perp DP$ , 则可得出结论;

(2) 证明  $\triangle ODE \cong \triangle OAM$  (AAS), 由全等三角形的性质得出  $DE = AM$ , 则可得出结论;

(3) 连接  $OD, OC, CE, CP$ , 证明  $\triangle DOE \sim \triangle POD$ , 由相似三角形的性质得出  $\frac{OD}{OP} = \frac{OE}{OD}$ , 证出  $\triangle COE \sim \triangle POC$ , 得出  $\frac{CE}{CP} = \frac{OE}{OC}$ , 则可得出答案.

【详解】(1) 证明: 连接  $OD$ ,



$\because D$  为弧  $AC$  的中点,  $\therefore OD \perp AC$ , 又  $\because DP$  为  $\odot O$  的切线,  $\therefore OD \perp DP$ ,  $\therefore AC \parallel DP$ ;

(2) 证明:  $\because DE \perp AB$ ,  $\therefore \angle DEO = 90^\circ$ , 由 (1) 可知  $OD \perp AC$ , 设垂足为点  $M$ ,  $\therefore \angle OMA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DEO = \angle OMA$ ,  $AC = 2AM$ , 又  $\because \angle DOE = \angle AOM$ ,  $OD = OA$ ,

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OAM (AAS)$ ,  $\therefore DE = AM$ ,  $\therefore AC = 2AM = 2DE$ ;

(3) 解: 连接  $OD$ ,  $OC$ ,  $CE$ ,  $CP$ ,  $\because \angle ODP = \angle OED = 90^\circ$ ,  $\angle DOE = \angle DOP$ ,

$\therefore \triangle DOE \sim \triangle POD$ ,  $\therefore \frac{OD}{OP} = \frac{OE}{OD}$ ,  $\therefore OD^2 = OE \cdot OP$ ,

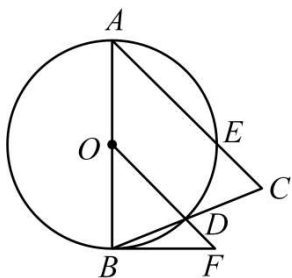
$\because OC = OD$ ,  $\therefore OC^2 = OE \cdot OP$ ,  $\therefore \frac{OC}{OE} = \frac{OP}{OC}$ ,

又  $\because \angle COE = \angle POC$ ,  $\therefore \triangle COE \sim \triangle POC$ ,  $\therefore \frac{CE}{CP} = \frac{OE}{OC}$ ,

$\because AE:EO = 1:2$ ,  $\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{2}{3}$ ,  $\therefore \frac{OE}{OC} = \frac{2}{3}$ ,  $\therefore \frac{CE}{CP} = \frac{2}{3}$ .

【点睛】本题是圆的综合题,考查的是切线的性质,垂径定理,圆周角定理,相似三角形的判定和性质,全等三角形的判定和性质,掌握圆的切线垂直于过切点的半径及相似三角形的判定与性质是解题的关键.

4. (2023·广东佛山·校联考一模) 如图,在  $\odot O$  中,  $AB$  为  $\odot O$  的直径,点  $E$  在  $\odot O$  上,  $D$  为  $\widehat{BE}$  的中点,连接  $AE$ ,  $BD$  并延长交于点  $C$ . 连接  $OD$ , 在  $OD$  的延长线上取一点  $F$ , 连接  $BF$ , 使  $\angle CBF = \frac{1}{2} \angle BAC$ .

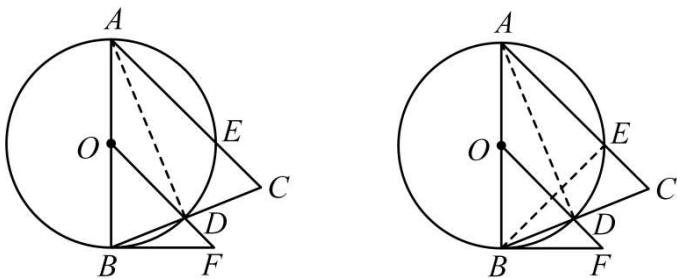


- (1) 求证:  $BF$  为  $\odot O$  的切线; (2) 若  $AE = 4$ ,  $OF = \frac{9}{2}$ , 求  $\odot O$  的直径.

【答案】(1) 证明见解析 (2) 6

【分析】(1) 如图所示, 连接  $AD$ , 由直径所对的圆周角是直角得到  $\angle ADB = 90^\circ$ , 由  $D$  为  $\widehat{BE}$  的中点结合  $\angle CBF = \frac{1}{2} \angle BAC$ , 得到  $\angle CBF = \angle BAD$ , 进而证明  $\angle ABF = 90^\circ$ , 由此即可证明  $BF$  为  $\odot O$  的切线; (2) 如图所示, 连接  $BE$ , 同理得  $\angle AEB = 90^\circ$ , 证明  $\triangle OBF \sim \triangle AEB$ , 利用相似三角形的性质求出  $OB = 3$ , 则  $\odot O$  的直径为 6.

【详解】(1) 证明: 如图所示, 连接  $AD$ ,  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ,



$\because D$  为  $\widehat{BE}$  的中点,  $\therefore \widehat{BD} = \widehat{ED}$ ,  $\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$ ,

$\because \angle CBF = \frac{1}{2} \angle BAC$ ,  $\therefore \angle CBF = \angle BAD$ ,

$\because \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle ABF = \angle ABD + \angle CBF = 90^\circ$ ,  $\therefore AB \perp BF$ ,

$\because OB$  是  $\odot O$  的半径,  $\therefore BF$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 解: 如图所示, 连接  $BE$ ,  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle AEB = 90^\circ$ ,

$\because \angle BOD = 2\angle BAD$ ,  $\angle BAC = 2\angle BAD$ ,  $\therefore \angle BOD = \angle BAC$ ,

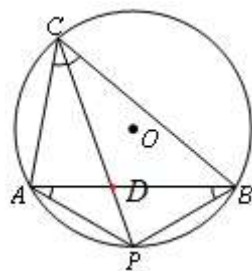
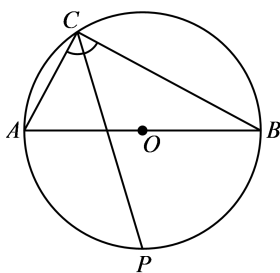
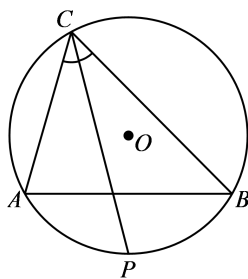
又  $\because \angle ABF = \angle AEB = 90^\circ$ ,  $\therefore \triangle OBF \sim \triangle AEB$ ,  $\therefore OB:AE = OF:AB$ ,

$\therefore OB:4 = \frac{9}{2}:2OB$ ,  $\therefore OB^2 = 9$ , 即  $OB = 3$ ,  $\therefore \odot O$  的直径为 6.

【点睛】本题主要考查了圆周角定理, 相似三角形的性质与判定, 切线的判定, 三角形内角和定理, 正确作出辅助线是解题的关键.

## 模型 2. 与圆周角定理相关的中点模型 (母子模型)

### 模型解读



1) 条件: 如图 1, 已知点  $P$  是  $\widehat{AB}$  中点, 点  $C$  是圆上一点, 结论:  $\angle PCA = \angle PCB$ .

2) 条件: 如图 2, 已知点  $P$  是半圆中点, 结论:  $\angle PCA = \angle PCB = 45^\circ$ .

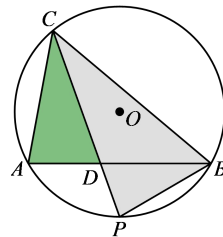
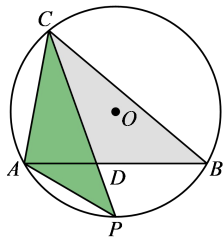
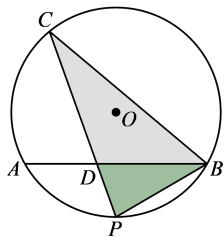
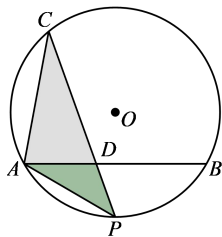
3) 条件: 如图 3, 已知点  $P$  是  $\widehat{AB}$  中点, 结论:  $\angle PBA = \angle PCA = \angle PCB = \angle PAB$ ;  $\triangle PDA \sim \triangle PAC$ ;  $\triangle PDB \sim \triangle PBC$ ;  $\triangle CAP \sim \triangle CDB$ ;  $\triangle CAD \sim \triangle CPB$ .

### 模型证明

证明: 1)  $\because P$  是  $\widehat{AB}$  中点,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{BP}$ ,  $\therefore \angle PCA = \angle PCB$ ,

2)  $\because P$  是  $\widehat{AB}$  中点,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{BP}$ ,  $\therefore \angle PCA = \angle PCB$ ,

$\because AB$  是直径,  $\therefore \angle CPB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle PCA = \angle PCB = 45^\circ$ ,



3)  $\because P$  是  $\widehat{AB}$  中点,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{BP}$ ,  $\therefore \angle PBA = \angle PCA = \angle PCB = \angle PAB$ ,

$\because \angle PCA = \angle PAD$ ,  $\angle APD = \angle CPA$ ,  $\therefore \triangle PDA \sim \triangle PAC$ ;

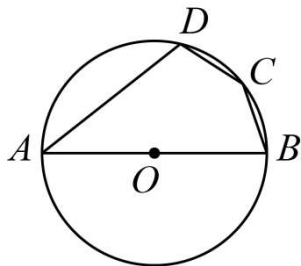
$\because \angle PCB = \angle APB$ ,  $\angle BPD = \angle CPB$ ,  $\therefore \triangle PDB \sim \triangle PBC$ ;

$\because \widehat{AC} = \widehat{AC}$ ,  $\therefore \angle P = \angle B$ ,  $\therefore \angle PCB = \angle ACP$ ,  $\therefore \triangle CAP \sim \triangle CDB$ ;

$\because \widehat{BC} = \widehat{BC}$ ,  $\therefore \angle P = \angle A$ ,  $\therefore \angle ACD = \angle PCB$ ,  $\therefore \triangle CAD \sim \triangle CPB$ .

# 模型运用

5. (2023·广东九年级期中) 如图, 四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $AB$  为  $\odot O$  的直径, 点  $C$  为  $\widehat{BD}$  的中点, 若  $\angle DAB = 40^\circ$ , 则  $\angle CBA$  的度数是 ( )

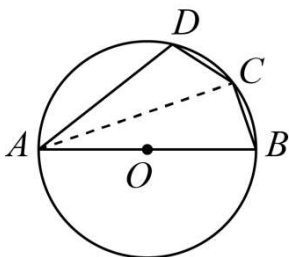


- A.  $70^\circ$                       B.  $40^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $50^\circ$

【答案】A

【分析】连接  $AC$ , 根据圆周角定理得到  $\angle CAB = 20^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 根据直角三角形的性质计算即可.

【详解】解: 连接  $AC$ ,

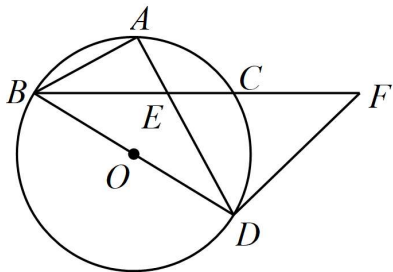


$\because$  点  $C$  为  $\widehat{BD}$  的中点,  $\angle DAB = 40^\circ$ ,  $\therefore \angle CAB = \frac{1}{2} \angle DAB = 20^\circ$ ,

$\because AB$  为  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle ABC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ , 故选: A.

【点睛】本题考查的是圆周角定理, 掌握直径所对的圆周角是直角是解题的关键.

6. (2023·广东佛山·校考三模) 如图,  $BD$  为  $\odot O$  的直径, 点  $A$  是弧  $BC$  的中点,  $AD$  交  $BC$  于点  $E$ ,  $AE = 4$ ,  $ED = 8$ . (1) 求证:  $\triangle ABE \sim \triangle ADB$ ; (2) 求线段  $BE$  的长; (3) 延长  $BC$  至  $F$ , 连接  $FD$ , 使  $\triangle BDF$  的面积等于  $24 + 24\sqrt{3}$ , 求  $\angle EDF$  的度数.



【答案】(1) 见解析 (2) 8 (3)  $75^\circ$

【分析】(1) 由  $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ , 可得  $\angle ADB = \angle ABC$ , 再利用“两角分别相等的两个三角形相似”进行证明;

(2) 先利用相似三角形的性质求出  $AB$ , 再用勾股定理求  $BE$ ;

(3) 连接  $CD$ , 并求其长度, 利用  $\triangle BDF$  的面积求出  $BF$  的长, 进而得到  $CE$ ,  $CF$ , 利用特殊角的三角函数求



据  $CE=2$ ,  $BE=4$ , 得到  $BD=6$ , 结合 (2) 得到  $CD=2\sqrt{3}$ , 即可得到  $AD$ , 结合三角函数即可得到答案;

【详解】(1) 证明: 连接  $OD$ ,  $OC$ ,  $OD$  交  $AC$  于  $H$ ,

$\because D$  是劣弧  $AC$  的中点,  $\therefore \widehat{CD} = \widehat{AD}$ ,  $\therefore \angle AOD = \angle COD$ ,

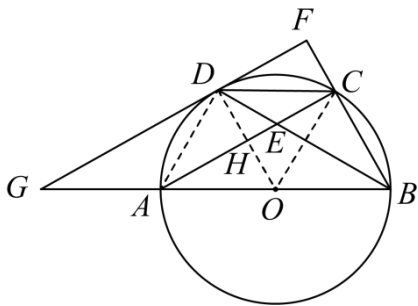
$\because OC = OA$ ,  $\therefore OD \perp AC$ ,  $\therefore \angle OHC = 90^\circ$ ,  $\because FG$  是的  $\odot O$  切线,  $OD$  为半径,  $\therefore OD \perp FG$ ,

$\therefore \angle ODF = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle OHC = \angle ODF$ ,  $\therefore AC \parallel FG$ ;

(2) 证明:  $\because D$  是劣弧  $AC$  的中点  $\therefore \widehat{CD} = \widehat{AD}$ ,  $\therefore \angle ECD = \angle BDC$ ,

$\therefore \angle CDE = \angle BDC$ ,  $\therefore \triangle CDE \sim \triangle BDC$ ,  $\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{DE}{CD}$ ,  $\therefore CD^2 = DE \cdot BD$ ;

(3) 解: 连接  $AD$ ,  $\because CE=2$ ,  $BE=4$ ,  $\therefore BD=6$  由 (2) 可得  $CD^2 = DE \cdot BD$ ,  $\therefore CD^2 = 12$ ,  $\therefore CD = 2\sqrt{3}$ ,



$\because D$  是劣弧  $AC$  的中点  $\therefore \widehat{CD} = \widehat{AD}$ ,  $\therefore CD = AD = 2\sqrt{3}$ ,

$\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ , 则  $\tan \angle ABD = \frac{AD}{BD}$ ,

$\because AD = 2\sqrt{3}$ ,  $BD = 6$ ,  $\therefore \tan \angle ABD = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$   $\therefore \angle ABD = 30^\circ$ ,

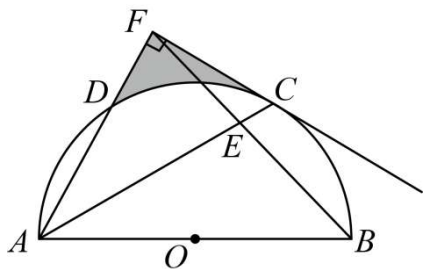
又  $\because \angle ABD = \angle ACD$ ,  $\therefore \angle ACD = 30^\circ$ ,  $\because AC \parallel FG$ ,  $\therefore \angle CDF = \angle ACD = 30^\circ$ ,

$\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ , 又  $\because AC \parallel FG$ ,  $\therefore \angle ACB = \angle GFC$ ,

$\therefore \angle GFC = 90^\circ$ ,  $\therefore \sin \angle CDF = \frac{CF}{CD}$ ,  $\therefore \sin 30^\circ = \frac{CF}{CD}$ , 即  $\frac{CF}{CD} = \frac{1}{2}$ , 又  $CD = 2\sqrt{3}$   $\therefore CF = \sqrt{3}$ .

【点睛】本题考查圆周角定理, 切线的性质, 三角形相似的判定与性质, 解直角三角形, 解题的关键是根据圆的性质得到等角及直角.

8. (2023·四川巴中·统考一模) 如图,  $AB$  是半圆  $O$  的直径,  $D$  为半圆  $O$  上的点 (不与  $A, B$  重合), 连接  $AD$ , 点  $C$  为  $\widehat{BD}$  的中点, 过点  $C$  作  $CF \perp AD$ , 交  $AD$  的延长线于点  $F$ , 连接  $BF$ ,  $AC$  交于点  $E$ .



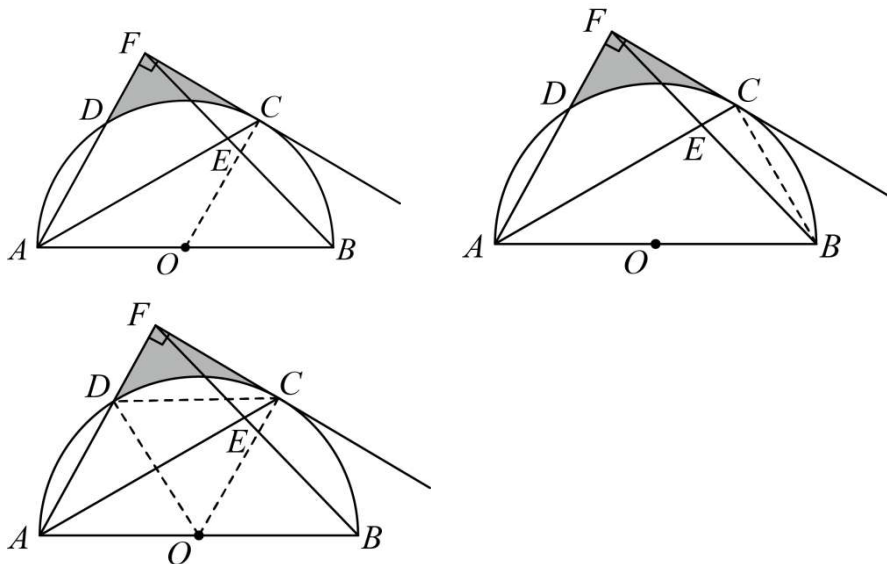
- (1) 求证:  $FC$  是半圆  $O$  的切线. (2) 求证:  $AC^2 = AF \cdot AB$ . (3) 若  $AF = 3$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$ , 求阴影部分的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3)  $\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$

【分析】(1) 根据点  $C$  为弧  $BD$  的中点, 得出  $\angle FAC = \angle CAB$ , 然后得出  $\angle FAC = \angle ACO$ , 根据平行线的性质得出  $CF \perp AD$ , 进而即可证明结果; (2) 连接  $BC$ , 根据圆周角定理可得  $\angle ACB = 90^\circ$ , 证明  $\triangle AFC \sim$

$\triangle ACB$ , 即可得出结果; (3) 根据  $\cos \angle FAC = \frac{AF}{AC} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 可得  $\angle CAB = \angle FAC = 30^\circ$ , 从而可证  $\triangle DOC$  是等边三角形, 即得  $\angle DCO = \angle COB$ , 即  $DC \parallel AB$ , 从而可得  $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DOC}$ , 由 (2) 可知,  $AC^2 = AF \cdot AB$ , 从而求出  $r = 2$ , 最后根据  $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AFC} - S_{\text{扇形} DOC}$  即可求出结果.

【详解】(1) 证明: 连接  $OC$ ,  $\because$  点  $C$  为弧  $BD$  的中点,  $\therefore \widehat{CD} = \widehat{CB}$ ,  $\therefore \angle FAC = \angle CAB$ ,  
又  $\because OA = OC$ ,  $\therefore \angle CAB = \angle ACO$ ,  $\therefore \angle FAC = \angle ACO$ ,  $\therefore OC \parallel AF$ ,  
又  $\because CF \perp AD$ ,  $\therefore CF \perp OC$ ,  $\therefore FC$  是半圆  $O$  的切线;



(2) 证明: 连接  $BC$ ,  $\because AB$  是半圆  $O$  的直径,  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle AFC = \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle EAC = \angle CAB$ ,  $\therefore \triangle AFC \sim \triangle ACB$ ,  $\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ,  $\therefore AC^2 = AF \cdot AB$ ;

(3) 解:  $\because$  在  $Rt\triangle AFC$  中,  $AF = 3$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore \cos \angle FAC = \frac{AF}{AC} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $FC = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{3}$ ,

$\therefore \angle FAC = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle CAB = \angle FAC = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle DOC = 2\angle FAC = 60^\circ$ ,  $\angle COB = 2\angle CAB = 60^\circ$ ,

$\therefore DO = CO$ ,  $\angle DOC = 60^\circ$ ,  $\therefore \triangle DOC$  是等边三角形,

$\therefore \angle DCO = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle DCO = \angle COB$ ,  $\therefore DC \parallel AB$ ,  $\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DOC}$ ,

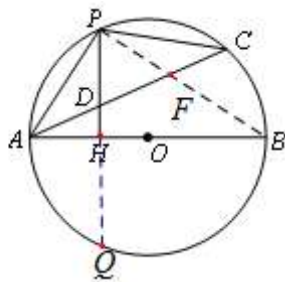
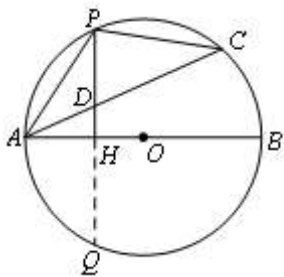
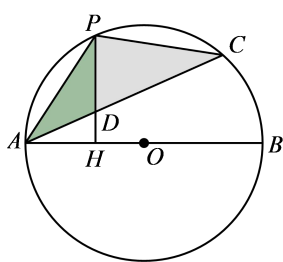
$\therefore$  由 (2) 可知,  $AC^2 = AF \cdot AB$ ,  $\therefore AB = \frac{AC^2}{AF} = 4$ ,  $\therefore$  圆  $O$  的半径为  $r = 2$ ,

$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AFC} - S_{\text{扇形} DOC} = \frac{1}{2} AF \cdot FC - \frac{60^\circ \pi \times 2^2}{360^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$ .

【点睛】本题考查切线的判定、圆周角定理、相似三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、锐角三角函数及扇形面积公式, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

### 模型 3. 垂径定理与圆周角定理结合的中点模型

#### 模型解读



**条件:**如图,  $AB$  是直径, 点  $P$  是  $\widehat{AC}$  中点, 过点  $P$  作  $PH \perp AB$  交  $AB$  于点  $H$ , 连结  $PB$  交  $AC$  于点  $F$ 。

**结论:**  $AD = PD = FD$ ,  $PQ = AC$ ,  $AP^2 = AD \times AC = AH \times AB = PF \times PB$ 。

### 模型证明

**证明:** 1)  $\because P$  是  $\widehat{AC}$  中点,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{CP}$ ,

$\because AB$  是直径,  $PH \perp AB$ ,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{AQ}$ ,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{AQ} = \widehat{CP}$ .  $\therefore \angle APD = \angle PAD$ ,  $\therefore AD = PD$ ,

$\because AB$  是直径,  $\therefore \angle APB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle PAD + \angle PFA = 90^\circ$ ,  $\angle APD + \angle FPD = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle FPD = \angle PFA$ ,  $\therefore FD = PD$ ,  $\therefore AD = PD = FD$ ,  $\therefore \widehat{AP} = \widehat{AQ} = \widehat{CP}$ ,  $\therefore \widehat{PQ} = \widehat{AC}$ ,  $\therefore PQ = AC$ ,

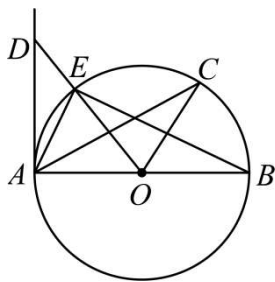
$\because \widehat{AP} = \widehat{AQ}$ ,  $\therefore \angle APQ = \angle PCA$ ,  $\because \angle DAP = \angle PAC$ ,  $\therefore \triangle PAC \sim \triangle DAP$ ;  $\therefore \frac{AP}{AD} = \frac{AC}{AP}$ ,  $\therefore AP^2 = AD \times AC$ ,

$\because \widehat{AP} = \widehat{AQ}$ ,  $\therefore \angle APQ = \angle ABP$ ,  $\because \angle HAP = \angle PAB$ ,  $\therefore \triangle HAP \sim \triangle PAB$ ;  $\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AH}{AP}$ ,  $\therefore AP^2 = AH \times AB$ ,

$\because \widehat{AP} = \widehat{PC}$ ,  $\therefore \angle PAC = \angle ABP$ ,  $\because \angle APF = \angle BPA$ ,  $\therefore \triangle APF \sim \triangle BPA$ ;  $\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PF}{AP}$ ,  $\therefore AP^2 = PF \times PB$ ,

### 模型运用

9. (2023·湖南长沙·统考一模) 如图, 已知  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $DA$  与  $\odot O$  相切于点  $A$ ,  $OD$  与  $\odot O$  相交于点  $E$ ,  $C$  是弧  $BE$  的中点, 现有如下几个结论: ①  $BA \perp DA$ , ②  $OC \parallel AE$ , ③  $\angle COE = 2\angle CAE$ , ④  $\angle B = \angle BAC$ , 其中正确的个数为 ( )



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

**【答案】C**

**【分析】**根据圆的切线定理, 同弧或者等弧所对的圆周角相等, 同弧或者等弧所对的圆周角是圆心角的一半等依次判断, 即可。

**【详解】解:**  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $DA$  与  $\odot O$  相切于点  $A$ ,  $\therefore BA \perp DA$ ,  $\therefore$  ① 正确;

$\because C$  是弧  $BE$  的中点,  $\therefore \widehat{EC} = \widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BE}$ .  $\therefore \angle EOC = \angle COB$ ,  $2\angle COB = \angle EOB$ ,

$\because \widehat{BE}$  所对的圆周角是  $\angle EAB$ ,  $\therefore \angle EAB = \frac{1}{2}\angle EOB$ ,  $\therefore \angle EAB = \angle COB$ .  $\therefore$  ②  $OC \parallel AE$ ,  $\therefore$  ② 正确;

$\because \widehat{EC}$  所对的圆心角是  $\angle COE$ ,  $\widehat{EC}$  所对的圆周角是  $\angle EAC$ ,

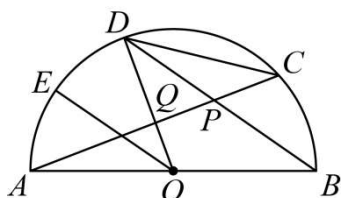
$\therefore \angle COE = 2\angle CAE$ ,  $\therefore$  ③ 正确;  $\because \angle B = \frac{1}{2}\angle EOA$ ,  $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle COB$ ,

但无法证明  $\angle EOA$  与  $\angle COB$  的等量关系,  $\therefore \angle B \neq \angle BAC$ ,  $\therefore$  ④ 错误;

综上所述, 正确的为: ①②③ 共 3 个. 故选: C.

【点睛】本题考查圆的知识, 解题关键是掌握圆的基本性质, 圆的切线定理, 圆周角, 圆心角, 弦的关系.

10. (2023·安徽合肥·统考三模) 如图,  $AB$  是半圆  $O$  的直径,  $AC$  是弦, 点  $D$  是  $\widehat{AC}$  的中点, 点  $E$  是  $\widehat{AD}$  的中点, 连接  $OD$ 、 $BD$  分别交  $AC$  于点  $Q$  和点  $P$ , 连接  $OE$ , 则下列结论中错误的是 ( )

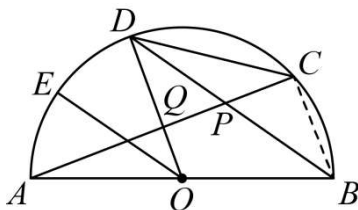
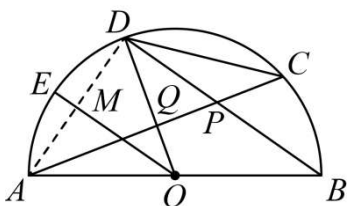


- A.  $OD \perp AC$       B.  $CE = \frac{1}{2}BD$       C.  $OE \parallel BD$       D.  $CD^2 = DP \cdot BD$

【答案】B

【分析】根据垂径定理可证 A 选项; 根据垂径定理, 中位线的性质可证 B, C 选项; 根据圆周角的性质可证  $\triangle CDP \sim \triangle BDC$ , 由此即可求解.

【详解】解:  $\because$  点  $D$  是弧  $AC$  的中点,  $OD$  是半径,  $\therefore OD \perp AC$ ,  $\therefore$  A 正确; 连接  $AD$  交  $OE$  于  $M$ ,



$\because$  点  $E$  是弧  $AD$  的中点,  $\therefore OE \perp AD$ ,  $\therefore AM = DM$ ,  $\because AO = OB$ ,  $\therefore OM$  是  $\triangle ABD$  的中位线,

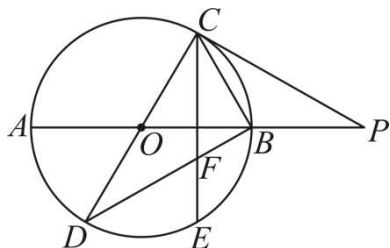
$\therefore OM \parallel BD$ , 即  $OE \parallel BD$ , 且  $OM = \frac{1}{2}BD < OE$ ,  $\therefore$  B 错误, C 正确;

$\because$  连接  $BC$ , 点  $D$  是弧  $AC$  的中点,  $\therefore \angle ACD = \angle DBC$ ,  $\therefore \triangle CDP \sim \triangle BDC$ ,

$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{DP}{CD}$ ,  $\therefore CD^2 = DP \cdot BD$ ,  $\therefore$  D 正确. 故选: B.

【点睛】本题主要考查圆与三角形的综合, 掌握圆的基础知识, 相似三角形的判定和性质, 垂径定理, 中位线的性质等知识是解题的关键.

11. (2023·山东济南·统考中考真题) 如图,  $AB$ ,  $CD$  为  $\odot O$  的直径,  $C$  为  $\odot O$  上一点, 过点  $C$  的切线与  $AB$  的延长线交于点  $P$ ,  $\angle ABC = 2\angle BCP$ , 点  $E$  是  $\widehat{BD}$  的中点, 弦  $CE$ ,  $BD$  相交于点  $F$ .



- (1) 求  $\angle OCB$  的度数; (2) 若  $EF = 3$ , 求  $\odot O$  直径的长.

【答案】(1)  $60^\circ$  (2)  $6\sqrt{3}$



线段成比例得出  $\frac{OA}{OQ} = \frac{OM}{OC}$ , 计算即可得出结论; (3) 分三种情况: 当点  $P$  与点  $A$  重合时, 当点  $P$  与点  $B$  重合时, 当点  $P$  与点  $A$ 、 $B$  不重合时, 分别求出  $\frac{PF}{PQ}$  的比值即可.

【详解】(1)  $\because$  直径  $AB \perp CD$  于点  $F$ ,  $\therefore \widehat{AC} = \widehat{AD}$ .

$\because$  点  $C$  为弧  $AE$  的中点,  $\therefore \widehat{AC} = \widehat{CE}$ .  $\therefore \widehat{AE} = \widehat{CD}$ .  $\therefore AE = CD$ .

(2) 如图 2, 连接  $OC$  交  $AE$  于点  $M$ , 设  $\odot O$  的半径为  $r$ , 则  $OF = r - 2$ ,

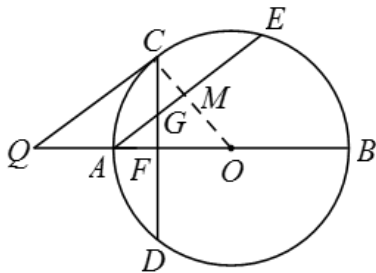


图2

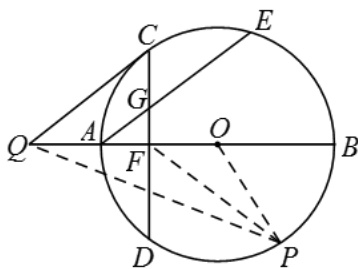


图3

由 (1) 知  $CD = AE = 8 \because$  直径  $AB \perp CD$  于点  $F$ ,  $\therefore CF = FD = \frac{1}{2}CD = 4$ .

在  $Rt\triangle CFO$  中,  $\because CO^2 = CF^2 + OF^2$ ,  $\therefore r^2 = 4^2 + (r-2)^2$ . 解得:  $r = 5$ ,

$\because$  点  $C$  为弧  $AE$  的中点,  $\therefore OC \perp AE$ ,  $AM = EM = \frac{1}{2}AE = 4$ .  $\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = 3$ .

$\because CQ$  是  $\odot O$  的切线,  $\therefore OC \perp CQ$ .  $\therefore CQ \parallel AM$ .  $\therefore \frac{OA}{OQ} = \frac{OM}{OC}$ , 即  $\frac{5}{OQ} = \frac{3}{5}$ .  $\therefore OQ = \frac{25}{3}$ .

(3)  $\frac{PF}{PQ}$  的比值不会发生改变,  $\frac{PF}{PQ} = \frac{3}{5}$ , 理由如下: 由 (2) 知  $AF = 2$ ,  $OF = 3$ ,  $OQ = \frac{25}{3}$ ,  $AQ = \frac{10}{3}$ ,

① 当点  $P$  与点  $A$  重合时,  $\frac{PF}{PQ} = \frac{AF}{AQ} = \frac{2}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{5}$ ; ② 当点  $P$  与点  $B$  重合时,  $\frac{PF}{PQ} = \frac{BF}{BQ} = \frac{OB + OF}{OB + OQ} =$

$$\frac{5+3}{5+\frac{25}{3}} = \frac{3}{5};$$

③ 当点  $P$  与点  $A$ 、 $B$  不重合时, 如图 3, 连接  $OP$ 、 $PF$ 、 $PQ$ ,

$$\because \frac{OF}{OP} = \frac{3}{5}, \frac{OP}{OQ} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}, \therefore \frac{OF}{OP} = \frac{OP}{OQ}.$$

又  $\because \angle FOP = \angle POQ$ ,  $\therefore \triangle FOP \sim \triangle POQ$ .  $\therefore \frac{PF}{PQ} = \frac{OF}{OP} = \frac{3}{5}$ .  $\therefore \frac{PF}{PQ}$  的比值不会发生改变.

【点睛】本题是圆的综合题, 主要考查了相似三角形的判定和性质, 垂径定理, 勾股定理, 切线的性质等知识, 熟练掌握垂径定理和相似三角形的判定与性质是解题的关键.

#### 模型 4. 与托勒密定理相关的中点模型

##### 模型解读

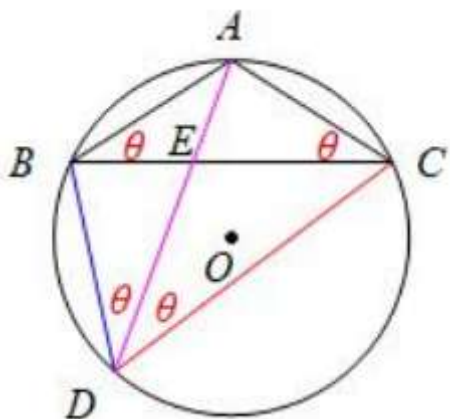


图 1

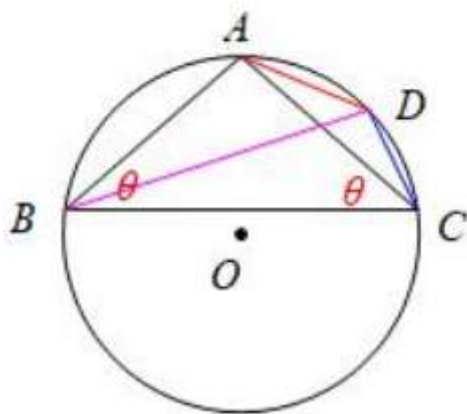


图 2

### 1) 同侧型:

**条件:**如图 1,  $A$  为弧  $BC$  中点,  $\angle ABC = \angle ACB = \theta$ ,  $D$  为圆上  $\triangle ABC$  底边下方一点, **结论:**  $BD + CD = 2AD \times \cos \theta$ ;

### 2) 异侧型:

**条件:**如图 2,  $A$  为弧  $BC$  中点,  $\angle ABC = \angle ACB = \theta$ ,  $D$  为圆上  $\triangle ABC$  底边上一点, **结论:**  $BD - CD = 2AD \times \cos \theta$ ;

### 模型证明

**托勒密定理 (补充知识):**圆内接四边形的对角线乘积等于对边乘积的和。即:  $AD \times BC = BD \times AC + DC \times AB$ 。

**证明: 1) 同侧型:** 设  $AB = AC = m$ , 则  $BC = 2m \cos \theta$ 。

由托勒密定理可知:  $AD \times BC = BD \times AC + DC \times AB$ ; 即:  $m \times BD + m \times CD = 2m \cos \theta \times AD$ ; 故:  $BD + CD = 2AD \times \cos \theta$ 。

**特别地:**

- |                                                          |                                    |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------|
| 1) 当三角形为等边三角形时 (即 $\theta = 60^\circ$ );                 | <b>结论:</b> $BD + CD = AD$          |
| 2) 当三角形为等腰直角三角形时 (即 $\theta = 45^\circ$ );               | <b>结论:</b> $BD + CD = \sqrt{2} AD$ |
| 3) 当三角形为 $120^\circ$ 的等腰直角三角形时 (即 $\theta = 30^\circ$ ); | <b>结论:</b> $BD + CD = \sqrt{3} AD$ |

**2) 异侧型:** 设  $AB = AC = m$ , 则  $BC = 2m \cos \theta$ 。

由托勒密定理可知:  $BD \times AC = AD \times BC + DC \times AB$ ; 即:  $BD \times m = AD \times 2m \cos \theta + CD \times m$ ; 故:  $BD - CD = 2AD \times \cos \theta$ 。

**特别地:**

- |                                                          |                                    |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------|
| 1) 当三角形为等边三角形时 (即 $\theta = 60^\circ$ );                 | <b>结论:</b> $BD - CD = AD$          |
| 2) 当三角形为等腰直角三角形时 (即 $\theta = 45^\circ$ );               | <b>结论:</b> $BD - CD = \sqrt{2} AD$ |
| 3) 当三角形为 $120^\circ$ 的等腰直角三角形时 (即 $\theta = 30^\circ$ ); | <b>结论:</b> $BD - CD = \sqrt{3} AD$ |

### 模型运用

13. (2023·浙江·九年级期中) 如图,  $AC$ 、 $BD$  为圆内接四边形  $ABCD$  的对角线, 且点  $D$  为  $\widehat{BDC}$  的中点;

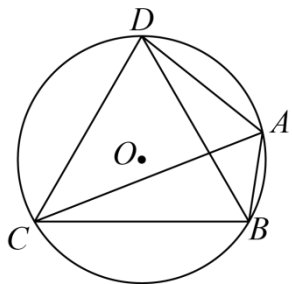


图1

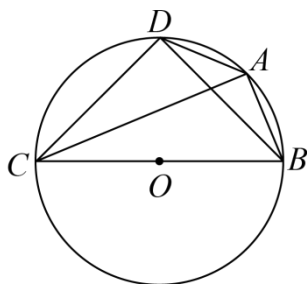


图2

(1) 如图1,若  $\angle CDB = 60^\circ$ , 直接写出  $AD, AB$  与  $AC$  的数量关系;

(2) 如图2,若  $\angle CDB = 90^\circ$ ,  $AC$  平分  $\angle BCD$ ,  $BC = 4$ , 求  $AD$  的长度.

【答案】(1)  $AD + AB = AC$  (2)  $\sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$

【分析】(1) 如图:  $BA$  绕  $B$  逆时针旋转交  $AC$  于  $E$ , 即  $AB = BE$ , 先说明  $\triangle AEB$  是等边三角形可得  $\angle ABE = 60^\circ, AE = AB$ ; 再说明  $\triangle DBC$  是等边三角形可得  $\angle DBC = 60^\circ, BC = BD$ , 进而证明  $\triangle CBE \cong \triangle DBA$  (SAS) 可得  $CE = AD$ , 最后根据  $AC = CE + EA$  即可证明结论;

(2) 如图: 连接  $OD, OA$  交  $BD$  于  $E$ , 先说明  $BC$  为  $\odot O$  直径, 即  $OA = OB = OC = 2$ , 再运用圆周角定理和勾股定理可得  $BD = CD = 2\sqrt{2}$ , 进而求得  $DE = \sqrt{2}, AD = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ , 最后运用勾股定理即可解答

【详解】(1) 解: 如图:  $BA$  绕  $B$  逆时针旋转交  $AC$  于  $E$ , 即  $AB = BE$ ,

$\because \angle CDB = 60^\circ, \therefore \angle CAB = \angle CDB = 60^\circ, \therefore \triangle AEB$  是等边三角形,  $\therefore \angle ABE = 60^\circ, AE = AB$ ,

$\because$  点  $D$  为  $\widehat{BC}$  的中点  $\therefore CD = BD, \because \angle CDB = 60^\circ, \therefore \triangle DBC$  是等边三角形,

$\therefore \angle DBC = 60^\circ, BC = BD, \therefore \angle ABE = \angle CBD$ , 即  $\angle CBE = \angle ABD$ ,

$\therefore \triangle CBE \cong \triangle DBA$  (SAS),  $\therefore CE = AD, \therefore AC = CE + EA = AD + AB$ , 即  $AD + AB = AC$ .

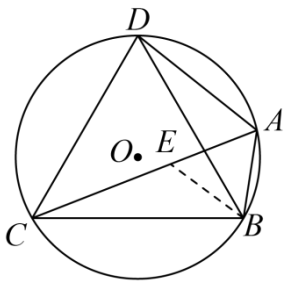


图1

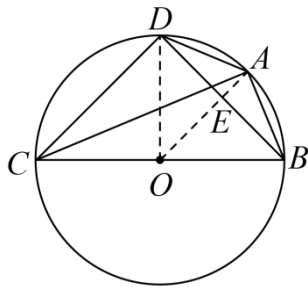


图2

(2) 解: 如图: 连接  $OD, OA$  交  $BD$  于  $E$ ,  $\because \angle CDB = 90^\circ, \therefore BC$  为  $\odot O$  直径, 即  $OA = OB = OC = 2$

$\because$  点  $D$  为  $\widehat{BC}$  的中点,  $\therefore BD = CD, \therefore BC = \sqrt{BD^2 + CD^2}$ , 即  $4 = \sqrt{2BD^2}$ , 解得:  $BD = CD = 2\sqrt{2}$ ,

$\because AC$  平分  $\angle BCD, \therefore AD = AB$ , 又  $\because OD = OB, \therefore AE$  垂直平分  $BD$ , 即  $DE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}, \therefore CD \parallel OA$ ,

$\because OC = OB, \therefore OE$  是  $\triangle OBD$  的中位线,  $\therefore OE = \frac{1}{2}CD = \sqrt{2}$ ,

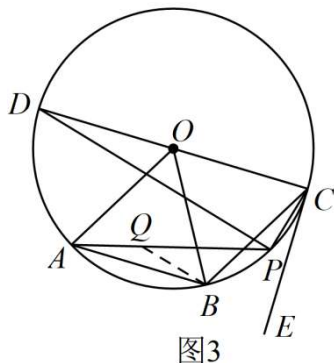
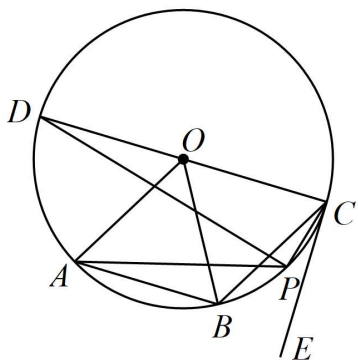
$\therefore AE = OA - OE = 2 - \sqrt{2}, \therefore AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ .

【点睛】本题主要考查了圆周角定理、垂径定理、勾股定理、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质等知识点, 灵活运用相关定理是解答本题的关键.

14. (2023·云南红河·统考二模) 如图, 在  $\odot O$  中,  $CD$  为  $\odot O$  的直径, 过点  $C$  作射线  $CE$ ,  $\angle AOC = 120^\circ$ , 点  $B$  为弧  $AC$  的中点, 连接  $AB, OB, BC$ . 点  $P$  为弧  $BC$  上的一个动点 (不与  $B, C$  重合), 连接  $PA, PB, PC, PD$ . (1) 若  $\angle ECP = \angle PDC$ , 判断射线  $CE$  与  $\odot O$  的位置关系; (2) 求证:  $PA = \sqrt{3}PB +$

【分析】(1) 根据  $CD$  为  $\odot O$  的直径, 得出  $\angle CPD = 90^\circ$ , 根据  $\angle ECP = \angle PDC$ , 得出  $\angle ECD = 90^\circ$ , 即可证明结论; (2) 在  $AP$  上截取  $AQ = PC$ , 连接  $BQ$ , 证明  $\triangle BAQ \cong \triangle BCP (SAS)$ , 得出  $BQ = BP$ , 求出  $\angle BQP =$

【详解】(1) 解:  $CE$  与  $\odot O$  相切, 理由如下:



$\because$  点  $B$  为弧  $AC$  的中点,  $\angle AOC = 120^\circ$ ,  $\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$ ,  $\therefore \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  
 $\therefore \angle BCP$  与  $\angle BAP$  同对弧  $BP$ ,  $\therefore \angle BCP = \angle BAP$ ,

$$\text{又} \because AP=AQ+PQ, AQ=PC, \therefore PA=\sqrt{3}BP+PC.$$

16

理解题意,作出辅助线,熟练掌握相关的性质和判定.

15. (2023·山西阳泉·九年级统考期末) 阅读下列材料,并完成相应的任务.

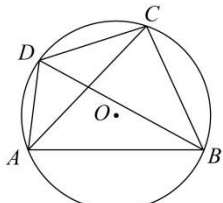
### 托勒密定理

托勒密 (Ptolemy) (公元 90 年—公元 168 年), 希腊著名的天文家、地理学家、数学家和光学家. 在数学方面, 他论证了四边形的特性, 即著名的托勒密定理.

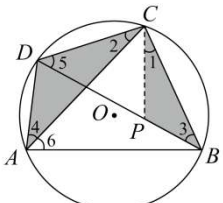
**托勒密定理**  
 圆内接四边形中, 两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和.

已知: 如图 (1) 中, 四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  
 求证:  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

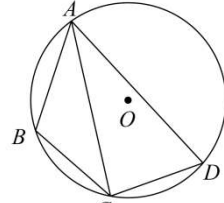
下面是该结论的证明过程:



图(1)



图(2)



图(3)

证明: 如图 (2) 过  $C$  作  $CP$  交  $BD$  于  $P$ , 使  $\angle 1 = \angle 2$ ,  
 又  $\angle 3 = \angle 4$ , (依据 1)  
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCP$ .  $\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BP}$  即  $AC \cdot BP = AD \cdot BC$  ①  
 又  $\angle ACB = \angle DCP$ ,  $\angle 5 = \angle 6$ ,  $\therefore \triangle ACB \sim \triangle DCP$ . (依据 2)  
 $\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DP}$  即  $AC \cdot DP = AB \cdot DC$  ②  
 ①+②得  $AC(BP+DP) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ .  
 即  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ .

任务: (1) 上述证明过程中的“依据 1”和“依据 2”分别指什么?

依据 1: \_\_\_\_\_ 依据 2: \_\_\_\_\_

(2) 当圆内接四边形  $ABCD$  是矩形时, 托勒密定理就是我们非常熟知的一个定理: \_\_\_\_\_ (请写出定理名称).

(3) 如图 (3), 四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $AB=3$ ,  $AD=5$ ,  $\angle BAD=60^\circ$ , 点  $C$  是弧  $BD$  的中点, 求  $AC$  的长.

【答案】(1) 同弧所对的圆周角相等; 两角分别对应相等的两个三角形相似 (2) 勾股定理 (3)  $AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

【分析】(1) 根据圆周角定理的推论以及三角形相似的判定定理, 即可得到答案;

(2) 根据矩形的性质和托勒密定理, 即可得到答案;

(3) 连接  $BD$ , 过点  $C$  作  $CE \perp BD$  于点  $E$ . 由四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 点  $C$  是弧  $BD$  的中点, 可得  $\triangle BCD$  是底角为  $30^\circ$  的等腰三角形, 进而得  $BD = 2 DE = \sqrt{3} CD$ , 结合托勒密定理, 列出方程, 即可求解.

【详解】(1) 依据 1 指的是: 同弧所对的圆周角相等;

依据 2 指的是: 两角分别对应相等的两个三角形相似.

故答案是: 同弧所对的圆周角相等; 两角分别对应相等的两个三角形相似;

(2)  $\because$  当圆内接四边形  $ABCD$  是矩形时,  $\therefore AC = BD$ ,  $BC = AD$ ,  $AB = CD$ ,

$\therefore$  由托勒密定理得:  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ ,  $\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ . 故答案是: 勾股定理;

(3) 如图, 连接  $BD$ , 过点  $C$  作  $CE \perp BD$  于点  $E$ .

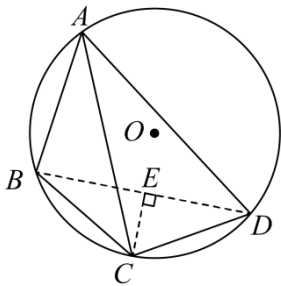
$\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ ,

$\because \angle BAD = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle BCD = 120^\circ$ ,

$\because$  点  $C$  是弧  $BD$  的中点,  $\therefore$  弧  $BC =$  弧  $CD$ ,  $\therefore BC = CD$ ,  $\therefore \angle CBD = 30^\circ$ .

在  $Rt\triangle CDE$  中,  $DE = CD \cdot \cos 30^\circ$ ,  $\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{2} CD$ ,  $\therefore BD = 2 DE = \sqrt{3} CD$ .

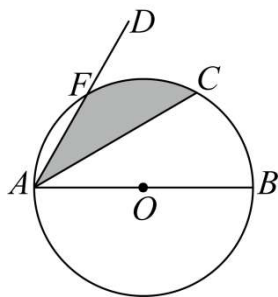
由托勒密定理得:  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ .  $\therefore AC \cdot \sqrt{3} CD = 3CD + 5CD$ .  $\therefore AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ .



【点睛】本题主要考查圆的内接四边形的性质与相似三角形的综合, 添加辅助线, 构造底角为  $30^\circ$  的等腰三角形, 是解题的关键.

## 习题练模型

1. (2023 秋·山西阳泉·九年级统考期末) 如图,  $AB$  为  $\odot O$  的直径, 射线  $AD$  交  $\odot O$  于点  $F$ , 点  $C$  为劣弧  $\widehat{BF}$  的中点, 连接  $AC$ . 若  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $AB = 4$ , 则阴影部分的面积为 ( )



A.  $\frac{2\pi}{3}$

B.  $\pi$

C.  $\frac{4\pi}{3}$

D.  $\frac{5\pi}{3}$

【答案】A

【分析】连接  $OC$ ,  $OF$ , 交  $AC$  于  $E$ , 由圆周角定理可  $\angle BAC = \angle CAF = 30^\circ$ ,  $\angle COF = 60^\circ = \angle OAF$ , 可知  $\triangle AOF$  和  $\triangle COF$  均为等边三角形, 继而可知  $AB \parallel CF$ , 可得  $S_{\triangle ACF} = S_{\triangle COF}$ , 再结合阴影部分的面积 =  $S_{\triangle ACF} + S_{\text{弓形}} = S_{\triangle COF} + S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形} COF}$  即可求解.

【详解】解: 连接  $OC$ ,  $OF$ , 交  $AC$  于  $E$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/055243143001011333>