



第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

第1课时 一元二次不等式及其解法



学 习 目 标	核 心 素 养
<p>1. 掌握一元二次不等式的解法(重点).</p> <p>2. 能根据“三个二次”之间的关系解决简单问题(难点).</p>	<p>通过一元二次不等式的学习, 培养数学运算素养.</p>

自主预习

探新知

探究
提
素
养



新知初探

1. 一元二次不等式的概念

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的不等式，称为一元二次不等式。



2. 一元二次不等式的一般形式

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0).$$

$$(2) ax^2 + bx + c \geq 0 (a \neq 0).$$

$$(3) ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0).$$

$$(4) ax^2 + bx + c \leq 0 (a \neq 0).$$

思考 1: 不等式 $x^2 - y^2 > 0$ 是一元二次不等式吗?

提示: 此不等式含有两个变量, 根据一元二次不等式的定义, 可知不是一元二次不等式.

3. 一元二次不等式的解与解集

使一元二次不等式成立的未知数的值，叫做这个一元二次不等式的解，其解的集合，称为这个一元二次不等式的解集。



思考 2: 类比“方程 $x^2=1$ 的解集是 $\{1, -1\}$, 解集中的每一个元素均可使等式成立”. 不等式 $x^2>1$ 的解集及其含义是什么?

提示: 不等式 $x^2>1$ 的解集为 $\{x|x<-1 \text{ 或 } x>1\}$, 该集合中每一个元素都是不等式的解, 即不等式的每一个解均使不等式成立.

探究
提示
素养

4. 三个“二次”的关系

设 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ ，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$

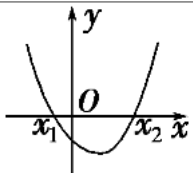
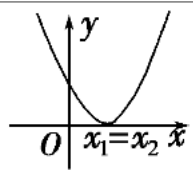
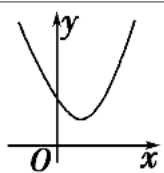
判别式

$\Delta>0$

$\Delta=0$

$\Delta<0$



解不等式 $y > 0$ 或 $y < 0$ 的步骤	求方程 $y=0$ 的解	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
	画函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
	得等的集 不式解	$y > 0$	<u>$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$</u>	<u>$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$</u>
	$y < 0$	<u>$\{x x_1 < x < x_2\}$</u>	<u>\emptyset</u>	<u>\emptyset</u>

思考 3: 若一元二次不等式 $ax^2+x-1>0$ 的解集为 \mathbf{R} , 则实数 a 应满足什么条件?

提示: 结合二次函数图象可知, 若一元二次不等式 $ax^2+x-1>0$ 的解集为 \mathbf{R} , 则 $\begin{cases} a>0, \\ 1+4a<0, \end{cases}$ 解得 $a \in \emptyset$, 所以不存在 a 使不等式 $ax^2+x-1>0$ 的解集为 \mathbf{R} .

初试身手

1. 不等式 $3 + 5x - 2x^2 \leq 0$ 的解集为()

A. $\left\{ x \mid x > 3 \text{ 或 } x < -\frac{1}{2} \right\}$

B. $\left\{ x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \right\}$

C. $\left\{ x \mid x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2} \right\}$

D. \mathbf{R}

C $[3 + 5x - 2x^2 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 \geq 0 \Rightarrow (x - 3)(2x + 1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}]$

2. 不等式 $3x^2 - 2x + 1 > 0$ 的解集为()

A. $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$

B. $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < 1\right\}$

C. \emptyset

D. \mathbf{R}

D [因为 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8 < 0$, 所以不等式 $3x^2 - 2x + 1 > 0$ 的解集为 \mathbf{R} .]

3. 不等式 $x^2 - 2x - 5 > 2x$ 的解集是_____.

$\{x|x > 5 \text{ 或 } x < -1\}$ [由 $x^2 - 2x - 5 > 2x$, 得 $x^2 - 4x - 5 > 0$, 因为 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的两根为 $-1, 5$,

故 $x^2 - 4x - 5 > 0$ 的解集为 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.]

探究
提
素
养

4. 不等式 $-3x^2 + 5x - 4 > 0$ 的解集为_____.

\emptyset [原不等式变形为 $3x^2 - 5x + 4 < 0$. 因为 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 4 = -23 < 0$, 所以 $3x^2 - 5x + 4 = 0$ 无解.]

由函数 $y = 3x^2 - 5x + 4$ 的图象可知, $3x^2 - 5x + 4 < 0$ 的解集为 \emptyset .]

探究
提素
养

合 作 探 究

提 素 养



类型1

一元二次不等式的解法

【例1】 解下列不等式：

$$(1) 2x^2 + 7x + 3 > 0;$$

$$(2) -4x^2 + 18x - \frac{81}{4} \geq 0;$$

$$(3) -2x^2 + 3x - 2 < 0.$$



[解] (1) 因为 $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 > 0$, 所以方程 $2x^2 + 7x + 3 = 0$ 有两个不等实根 $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$. 又二次函数 $y = 2x^2 + 7x + 3$ 的图象开口向上, 所以原不等式的解集为 $\left\{ x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 或 } x < -3 \right\}$.

(2) 原不等式可化为 $\left(2x - \frac{9}{2} \right)^2 \leq 0$, 所以原不等式的解集为 $\left\{ x \mid x = \frac{9}{4} \right\}$.

(3) 原不等式可化为 $2x^2 - 3x + 2 > 0$, 因为 $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0$, 所以方程 $2x^2 - 3x + 2 = 0$ 无实根, 又二次函数 $y = 2x^2 - 3x + 2$ 的图象开口向上, 所以原不等式的解集为 \mathbf{R} .

规律方法

解不含参数的一元二次不等式的一般步骤

- (1)化标准. 通过对不等式的变形, 使不等式右侧为 0, 使二次项系数为正.
- (2)判别式. 对不等式左侧因式分解, 若不易分解, 则计算对应方程的判别式.
- (3)求实根. 求出相应的一元二次方程的根或根据判别式说明方程有无实根.
- (4)画草图. 根据一元二次方程根的情况画出对应的二次函数的草图.
- (5)写解集. 根据图象写出不等式的解集.

跟踪训练

1. 解下列不等式

(1) $2x^2 - 3x - 2 > 0$;

(2) $x^2 - 4x + 4 > 0$;

(3) $-x^2 + 2x - 3 < 0$;

(4) $-3x^2 + 5x - 2 > 0$.



[解] (1) $\because \Delta > 0$, 方程 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 的根是 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$,

\therefore 不等式 $2x^2 - 3x - 2 > 0$ 的解集为 $\left\{ x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2 \right\}$.

(2) $\because \Delta = 0$, 方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的根是 $x_1 = x_2 = 2$,

\therefore 不等式 $x^2 - 4x + 4 > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq 2\}$.

(3) 原不等式可化为 $x^2 - 2x + 3 > 0$,

由于 $\Delta < 0$, 方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 无解,

\therefore 不等式 $-x^2 + 2x - 3 < 0$ 的解集为 \mathbf{R} .

(4)原不等式可化为 $3x^2 - 5x + 2 < 0$,

由于 $\Delta > 0$, 方程 $3x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$,

\therefore 不等式 $-3x^2 + 5x - 2 > 0$ 的解集为 $\left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 1 \right\}$.



类型2

含参数的一元二次不等式的解法

【例2】 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$.

[思路点拨] ①对于二次项的系数 a 是否分 $a=0$, $a<0$, $a>0$ 三类进行讨论? ②当 $a\neq 0$ 时, 是否还要比较两根的大小?

[解] 当 $a=0$ 时, 原不等式可化为 $x > 1$.

当 $a\neq 0$ 时, 原不等式可化为 $(ax-1)(x-1) < 0$.

当 $a < 0$ 时, 不等式可化为 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) > 0$,

$\therefore \frac{1}{a} < 1, \therefore x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$.

当 $a > 0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x - 1) < 0$.

若 $\frac{1}{a} < 1$, 即 $a > 1$, 则 $\frac{1}{a} < x < 1$;

若 $\frac{1}{a} = 1$, 即 $a = 1$, 则 $x \in \emptyset$;

若 $\frac{1}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$, 则 $1 < x < \frac{1}{a}$.



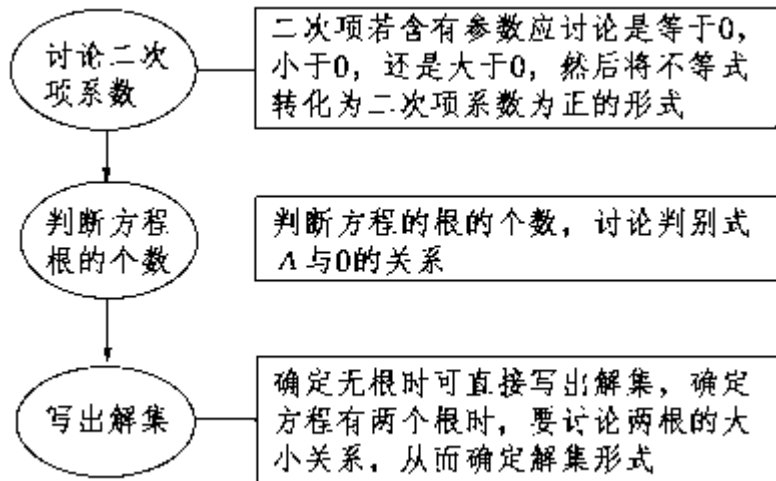
综上所述, 当 $a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\right\}$; 当 $a = 0$ 时,

原不等式的解集为 $\{x \mid x > 1\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = 1$ 时, 原不等式的解集为 \emptyset ; 当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\}$.

规律方法

解含参数的一元二次不等式的一般步骤



提醒: 对参数分类讨论的每一种情况是相互独立的一元二次不等式的解集, 不能合并.

跟踪训练

2. 解关于 x 的不等式： $ax^2 - 2 \geq 2x - ax (a < 0)$.

[解] 原不等式移项得 $ax^2 + (a-2)x - 2 \geq 0$,

化简为 $(x+1)(ax-2) \geq 0$.

$$\because a < 0, \therefore (x+1)\left(x - \frac{2}{a}\right) \leq 0.$$

当 $-2 < a < 0$ 时, $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$;

当 $a = -2$ 时, $x = -1$;



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/056014243055011001>