

# 常微分方程

Ordinary Differential  
Equation

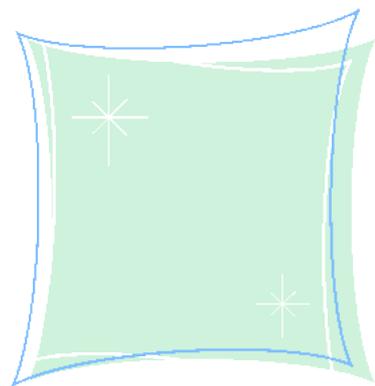
# 第一章 绪论

常微分方程是现代数学的一个重要分支，是人们解决各种实际问题的有效工具，它在几何、力学、物理、电子技术、航空航天、生命科学、经济领域等都有广泛的应用。

微分方程差不多是和微积分同时先后产生的，**1676年**詹姆士·贝努力致牛顿的信中第一次提出微分方程。微分方程建立后，立即成为研究，了解和知晓现实世界的重要工具。**1846年**，数学家和天文学家合作，通过求解微分方程发现了一颗有名的新星——海王星。**1991年**，科学家在阿尔卑斯山发现一个肌肉饱满的冰人，据躯体所含碳原子消失的程度，通过求解微分方程，推断这个冰人大约遇难于**5000年**以前，类似的实例还有很多。在微分方程开展的史中，数学家牛顿，莱布尼茨，雅各布·贝努利、欧拉、拉格朗日等等都做出了卓越的奉献。

# 一、什么是微分方程？

方程对于学过中学数学的人来说是比较熟悉的；在初等数学中就有各种各样的方程，比方线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组等等。这些方程都是要把研究的问题中的数和未知数之间的关系找出来，列出包含一个未知数或几个未知数的一个或者多个方程式，然后取求方程的解。



在实际工作中，常常出现一些特点和以上方程完全不同的问题。比方：某个物体在重力作用下自由下落，要寻求下落距离随时间变化的规律；火箭在发动机推动下在空间飞行，要寻求它飞行的轨道等，研究这些问题所建立的数学方程不仅与未知函数有关，而且与未知函数的导数有关，这就是我们要研究的微分方程。

解这类问题的根本思想和初等数学解方程的根本思想很相似，也是要把研究的问题中函数和未知函数之间的关系找出来，从列出的包含未知函数及其导数的一个或几个方程中去求得未知函数的表达式——即求解微分方程。



## 二、微分方程的研究内容

- 1、利用初等函数或初等函数的积分形式来导出微分方程的通解，常微分方程的解包括通解和特解。能用初等积分求通解的是非常少的，因此，人们转而研究特解的存在性问题。
- 2、利用数学分析或非线性分析理论来研究微分方程解的存在性、延展性、解对初值的连续性和可微性问题。



### 3、微分方程解析理论

由于绝大多数微分方程不能通过求积分得到，而理论上又证明了解的存在性，因此，人们将未知函数（即解）表示成级数形式，并引进特殊函数，如，椭圆函数、阿贝尔函数、贝塞尔函数等，并使微分方程和函数论及复变函数联系起来，产生了微分方程解析理论。

### 4、微分方程的数值解法

### 5、微分方程的定性和稳定性理论

1900年，希尔伯特提出的23个问题中的第16个问题之一，至今未解决。

# § 1.1 微分方程模型

微分方程：联系着自变量,未知函数及其导数的关系式.

为了定量地研究一些实际问题的变化规律,往往是要对所研究的问题进行适当的简化和假设,建立数学模型,当问题涉及变量的变化率时,该模型就是微分方程,下面通过几个典型的例子来说明建立微分方程模型的过程.

## 例1 镭的衰变规律:

设镭的衰变规律与该时刻现有的量成正比, 且已知 $t = 0$ 时, 镭元素的量为 $R_0$ 克, 试确定在任意 $t$ 时该时镭元素的量.



**解** 设 $t$ 时刻时镭元素的量为 $R(t)$ ,

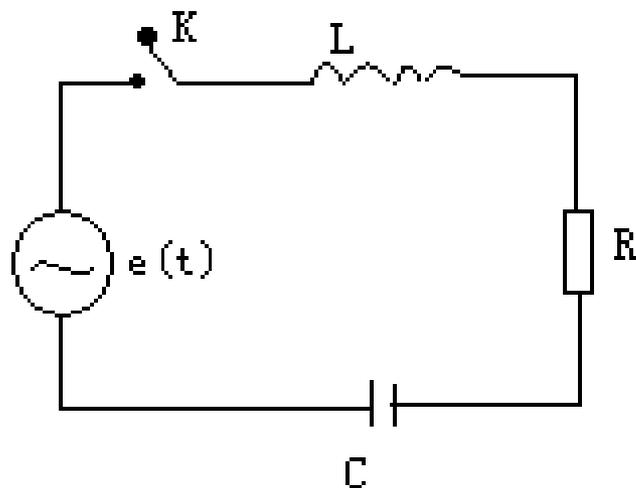
依题目中给出镭元素的变化律可得

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = -kR, \\ R(0) = R_0 \end{cases}$$

这里 $k > 0$ ,是由于 $R(t)$ 随着时间的增加而减少

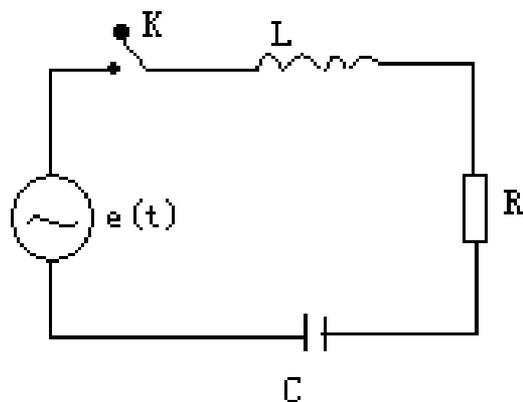
解之得

## 例2 RLC电路



R-L-C电路

如下图的R-L-C电路. 它包含电感 $L$ ,电阻 $R$ ,电容 $C$ 及电源 $e(t)$ . 设 $L,R,C$ 均为常数, $e(t)$ 是时间 $t$ 的函数. 试求当开关 $K$ 合上后,电路中电流强度 $I$ 与时间 $t$ 之间的关系.



R-L-C电路

电路的基尔霍夫（**Kirchhoff**）第二定律：

在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和为零.

设当开关**K**合上后,电路中在时刻**t**的电流强度为**I(t)**, 那么

电流 经过电感**L**, 电阻**R**和电容的电压降分别为 $\frac{dI}{dt}$ ,  $RI$ ,  $\frac{Q}{C}$ ,

其中**Q**为电量.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/056024222103011010>