专题 10 对数与对数函数

【考点预测】

1.对数式的运算

(1)对数的定义：一般地，如果 $a^x=N(a>0$ 且 $a\neq 1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，读作以 a 为底 N 的对数，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数．

(2)常见对数：

①一般对数：以 $a(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 为底，记为 $\log_a^N$，读作以 a 为底 N 的对数；

②常用对数：以 10 为底，记为 $\lg N$；

③自然对数：以 e 为底，记为 $\ln N$；

(3) 对数的性质和运算法则：

① $\log_a^1=0$； $\log_a^a=1$；其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$；

② $a^{\log_a^N}=N$ (其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$， $N>0$)；

③对数换底公式： $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$；

④ $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

⑤ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

⑥ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b(m，\ n\in R)$；

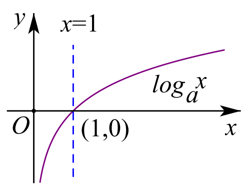
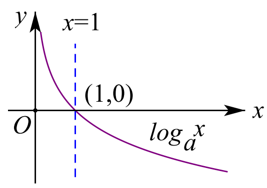
⑦ $a^{\log_a b}=b$ 和 $\log_a a^b=b$；

⑧ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；

2.对数函数的定义及图像

(1)对数函数的定义：函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做对数函数．

对数函数的图象

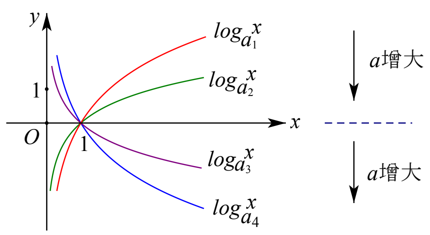
	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	定义域：(0，+∞)	
	值域： R	

	过定点 $(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	在 $(0,+\infty)$ 上增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数
	当 $0<x<1$ 时，$y<0$，当 $x\geq1$ 时，$y\geq0$	当 $0<x<1$ 时，$y>0$，当 $x\geq1$ 时，$y\leq0$

【方法技巧与总结】

1.对数函数常用技巧

在同一坐标系内，当 $a>1$ 时，随 a 的增大，对数函数的图象愈靠近 x 轴；当 $0<a<1$ 时，对数函数的图象随 a 的增大而远离 x 轴．(见下图)



【题型归纳目录】

题型一：对数运算及对数方程、对数不等式

题型二：对数函数的图像

题型三：对数函数的性质（单调性、最值（值域））

题型四：对数函数中的恒成立问题

题型五：对数函数的综合问题

【典例例题】

题型一：对数运算及对数方程、对数不等式

例 1．（2023·全国·高三专题练习）（1）计算 $3^{\log_3 2}+27^{\frac{1}{3}}+\lg 50+\lg 2$；

（2）已知 $\log_2\left[\log_3\left(\lg x\right)\right]=1$，求实数 x 的值；

（3）若 $18^a=5$，$\log_{18}9=b$，用 a，b，表示 $\log_{36}45$．

例 2．（2023·全国·高三专题练习）（1）求 $\log_2\dfrac{1}{25}\cdot\log_3 8\cdot\log_{\frac{1}{5}}27$ 的值.

（2）已知 $\log_9 5=a$，$3^b=7$，试用 a，b 表示 $\log_{21}35$

例 3．（2023·全国·高三专题练习）（1）已知 a，b，c 均为正数，且 3a＝4b＝6c，求证：$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$；

（2）若 60a＝3，60b＝5，求 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ 的值．

例 4．（2023·全国·模拟预测）若 $e^a=4$，$e^b=25$，则（　　）

A．a＋b＝100　　B．b－a＝e

C．$ab<8\ln^2 2$　　D．$b-a>\ln 6$

例 5．（2023·全国·模拟预测）已知实数 x，y 满足 $x>0$，$y>0$，$x\neq 1$，$y\neq 1$，$x^y=y^x$，$\log_y x+\frac{x}{y}=4$，则 $x+y=$（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

例 6．（2023·北京昌平·二模）已知函数 $f(x)=ax^2-4ax+2(a<0)$，则关于 x 的不等式 $f(x)>\log_2 x$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,4)$　　B．$(0,1)$　　C．$(0,4)$　　D．$(4,+\infty)$

例 7．（2023·全国·江西师大附中模拟预测（文））已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x, x>1,\\ 1-x^2, x\leq 1,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)<f(x-1)$ 的解集为______．

例 8．（2023·辽宁·东北育才学校二模）若函数 $f(x)$ 满足：（1）$\forall x_1$，$x_2\in\left(0,+\infty\right)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}<0$；（2）$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$，则 $f(x)=$___________．（写出满足这些条件的一个函数即可）

例 9．（2023·全国·高三专题练习）设函数 $f\left(x\right)=\log_m x$（$m>0$ 且 $m\neq 1$）的图像经过点 $\left(3,1\right)$．

（1）解关于 x 的方程 $f^2\left(x\right)+(m-1)f\left(x\right)+1-m^2=0$；

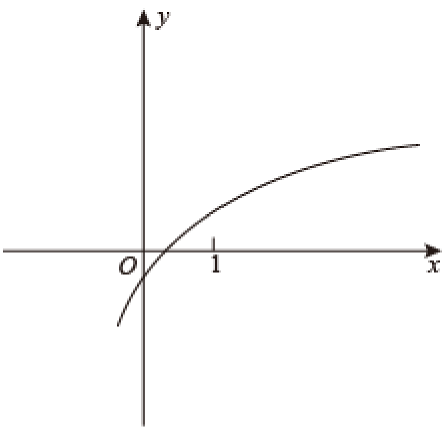
（2）不等式$\left[1+f\left(x\right)\right]\cdot\left[a-f\left(x\right)\right]>0$的解集是$\left(\frac{1}{3},9\right)$，试求实数 a 的值.

【方法技巧与总结】

对数的有关运算问题要注意公式的顺用、逆用、变形用等.对数方程或对数不等式问题是要将其化为同底，利用对数单调性去掉对数符号，转化为不含对数的问题，但这里必须注意对数的真数为正.

题型二：对数函数的图像

例 10．（2023·山东潍坊·二模）已知函数$f\left(x\right)=\log_a\left(x-b\right)$（$a>0$且$a\neq1$）的图像如图所示，则以下说法正确的是（　　）

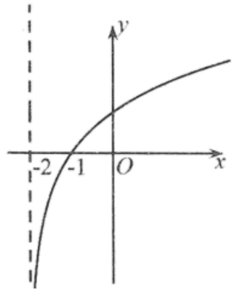


A．$a+b<0$　　B．$ab<-1$　　C．$0<a^b<1$　　D．$\log_a|b|>0$

例 11．（2023·江苏省高邮中学高三阶段练习）函数$y=\log_a(x+3)-1(a>0$且$a\neq1)$的图象恒过定点A，若点A在直线$mx+ny+1=0$上，其中$mn>0$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为（　　）

A．$3-2\sqrt{2}$　　B．$1+\sqrt{2}$　　C．$3+2\sqrt{2}$　　D．$2+2\sqrt{2}$

（多选题）例 12．（2023·福建·莆田二中模拟预测）已知函数$g\left(x\right)=\log_a\left(x+k\right)$（$a>0$且$a\neq1$）的图象如下所示．函数$f\left(x\right)=\left(k-1\right)a^x-a^{-x}$的图象上有两个不同的点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则（　　）



A．$a>1$，$k>2$　　B．$f\left(x\right)$在R上是奇函数

C．$f\left(x\right)$在R上是单调递增函数　　D．当$x\geq 0$时，$2f\left(x\right)\leq f\left(2x\right)$

例 13．（2023·全国·高三专题练习）已知$f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x,-2\leq x<0\\ \ln\dfrac{1}{x+1},0\leq x\leq 2\end{cases}$，若$g(x)=\left|f(x)\right|-ax-a$的图象与$x$轴有 3 个不同的交点，则实数$a$的取值范围为______.

【方法技巧与总结】

研究和讨论题中所涉及的函数图像是解决有关函数问题最重要的思路和方法.图像问题是数和形结合的护体解释.它为研究函数问题提供了思维方向.

题型三：对数函数的性质（单调性、最值（值域））

例 14．（2023·陕西·榆林市第十中学高二期中（文））函数$y=\log_2\left(4+3x-x^2\right)$的一个单调增区间是（　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$　　B．$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　C．$\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$\left[\dfrac{3}{2},4\right)$

例 15．（2023·天津·南开中学二模）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2-x-\dfrac{1}{4},x\leq 1\\ \log_a x-1,x>1\end{cases}$是$R$上的单调函数，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$

C．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　D．$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

例 16．（2023·浙江·模拟预测）已知实数$a,b\in(1,+\infty)$，且$\log_3 a+\log_b 3=\log_3 b+\log_a 4$，则（　　）

A．$\sqrt{a}<b<a$　　B．$b<\sqrt{a}<a$　　C．$\sqrt{a}<a<b$　　D．$a<b<\sqrt{a}$

例 17．（2023·全国·高三专题练习（理））函数$f(x)=\log ax(0<a<1)$在$[a^2，a]$上的最大值是（　　）

A．0　　B．1

C．2　　D．a

例 18．（2023·重庆·模拟预测）若函数 $f(x)=\log_a\left(-3x^2+4ax-1\right)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$　　　　B．$(1,\sqrt{3})$

C．$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　　　D．$(\sqrt{3},+\infty)$

【方法技巧与总结】

研究和讨论题中所涉及的函数性质是解决有关函数问题最重要的思路和方法.性质问题是数和形结合的护体解释.它为研究函数问题提供了思维方向.

题型四：对数函数中的恒成立问题

例 19．（2023·北京·高三专题练习）若不等式 $x^2-\log_a x<0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\frac{1}{16}\le a<1$　　B．$\frac{1}{16}<a<1$　　C．$0<a\le\frac{1}{16}$　　D．$0<a<\frac{1}{16}$

例 20．（2023·江苏·高三专题练习）已知函数 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{ax^2-2x+4}$ 的值域为 $\left(0,\frac{1}{16}\right]$，若不等式 $\log_a\left(t\cdot 4^x\right)<\log_a\left(2^x-t\right)$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立，则 t 的取值范围是（　　）

A．$\left(\frac{2}{5},2\right)$　　B．$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$　　C．$(-\infty,2)$　　D．$(0,2)$

例 21．（2023·浙江·高三阶段练习）已知函数 $f(x)=\frac{9+x^2}{x}$，$g(x)=\log_2 x+a$，若存在 $x_1\in[3,4]$，任意 $x_2\in[4,8]$，使得 $f(x_1)\ge g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是__________.

例 22．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=x-\ln x$，已知实数 $a>0$，若 $f(x)+a\mathrm{e}^{2x}+\ln a\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

例 23．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=a^x+\log_a x(a>0,a\ne 1)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值与最小值之和为 $6+\log_a 2$.

（1）求实数 a 的值；

（2）对于任意的 $x\in[2,+\infty)$，不等式 $kf(x)-1\ge 0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

例 24．（2023·陕西安康·高三期末（文））已知函数 $f(x)=\left(\log_a x\right)^2+2\log_a x+3\left(a>0,a\ne 1\right)$.

(1)若 $f\left(3\right)=2$，求 a 的值；

(2)若对任意的 $x\in\left[8,12\right]$，$f\left(x\right)>6$ 恒成立，求 a 的取值范围.

例 25．（2023·上海·高三专题练习）已知 $f(x)=3-2\log_2 x$，$g(x)=\log_2 x$.

（1）当 $x\in[1,4]$ 时，求函数 $y=\left[f(x)+1\right]\cdot g(x)$ 的值域；

（2）对任意 $x\in\left[2^n,2^{n+1}\right]$，其中常数 $n\in N$，不等式 $f\left(x^2\right)\cdot f(\sqrt{x})>kg(x)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【方法技巧与总结】

（1）利用数形结合思想，结合对数函数的图像求解；

（2）分离自变量与参变量，利用等价转化思想，转化为函数的最值问题.

（3）涉及不等式恒成立问题，将给定不等式等价转化，借助同构思想构造函数，利用导数探求函数单调性、最值是解决问题的关键.

题型五：对数函数的综合问题

例 26．（2023·河北·张家口市第一中学高三阶段练习）已知定义域为 $\left(0,+\infty\right)$ 的单调递增函数

$f\left(x\right)$满足：$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，有$f\left(f\left(x\right)-\ln x\right)=1$，则方程$f\left(x\right)=-x^2+4x-2$的解的个数为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

例27．（2023·四川雅安·三模（文））设$f\left(x\right)$是定义在R上的偶函数，对任意$x\in\mathrm{R}$，都有$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，且当$x\in\left[-2,0\right]$时，$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-6$．若在区间$\left(-2,6\right]$内关于$x$的方程$f\left(x\right)-\log_a\left(x+2\right)=0\left(a>1\right)$恰有3个不同的实数根，则$a$的取值范围是（　　）．

A．$\left(1,2\right)$　　B．$\left(2,+\infty\right)$　　C．$\left(1,\sqrt[3]{4}\right)$　　D．$\left(\sqrt[3]{4},2\right)$

例28．（2023·广西柳州·高一期中）已知$a>b>0$，且$a+b=1$，则（　　）

A．$\sin a>\sin b$　　B．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C．$2^a+2^b>2\sqrt{2}$　　D．$\lg a+\lg b=0$

例29．（2023·河北保定·二模）已知函数$y=3^{2^x}-2^{3^x}$在$\left(0,+\infty\right)$上先增后减，函数$y=4^{3^x}-3^{4^x}$在$\left(0,+\infty\right)$上先增后减.若$\log_2\left(\log_3 x_1\right)=\log_3\left(\log_2 x_1\right)=a>0$，$\log_2\left(\log_4 x_2\right)=\log_4\left(\log_2 x_2\right)=b$，$\log_3\left(\log_4 x_3\right)=\log_4\left(\log_3 x_3\right)=c>0$，则（　　）

A．$a<c$　　B．$b<a$　　C．$c<a$　　D．$a<b$

例30．（2023·广东·三模）已知$a,b\in\mathrm{R}$，e是自然对数的底，若$b+\mathrm{e}^b=a+\ln a$，则$\frac{a}{b}$的取值可以是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例31．（2023·全国·高三专题练习）已知x_0是函数$f\left(x\right)=x^2\mathrm{e}^{x-2}+\ln x-2$的零点，则$\mathrm{e}^{2-x_0}+\ln x_0=$_______.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·辽宁辽阳·二模）区块链作为一种新型的技术，被应用于许多领域.在区块链技术中，某个密码的长度设定为512B，则密码一共有2^{512}种可能，为了破解该密码，在最坏的情况下，需要进行2^{512}次运算.现在有一台计算机，每秒能进行2.5×10^{14}次运算，那么在最坏的情况下，这台计算机破译该密码所需的时间大约为（参考数据$\lg2\approx0.3$，$\sqrt[5]{10}\approx1.58$）（　　）

A．3.16×10^{139}s　　B．1.58×10^{139}s

C．1.58×10^{140}s　　D．3.16×10^{140}s

2．（2023·山东·肥城市教学研究中心模拟预测）已知$\dfrac{1}{\log_m 3}=p$，$9^p=n$，其中$m>0$且$m\neq1$，$n>0$且$n\neq1$，若$2m-n=0$，则p的值为（　　）

A．$\log_3 2$　　B．$\log_2 3$　　C．2　　D．3

3．（2023·河南安阳·模拟预测（文））已知正实数x，y，z满足$3^x=4^y=\left(2\sqrt{3}\right)^z$，则（　　）

A．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$　　B．$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}$　　C．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{z}$　　D．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$

4．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（文））已知函数$f\left(x\right)=\ln\left(2+2x\right)+\ln\left(3-3x\right)$，则$f\left(x\right)$（　　）

A．是奇函数，且在$\left(0,1\right)$上单调递增

B．是奇函数，且在$\left(0,1\right)$上单调递减

C．是偶函数，且在$\left(0,1\right)$上单调递增

D．是偶函数，且在$\left(0,1\right)$上单调递减

5．（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=\log_a(x-1)+2$的图象恒过定点

A．（2，2）　　B．（2，1）　　C．（3，2）　　D．（2，0）

6．（2023·安徽六安·一模（文））设函数$f\left(x\right)=2-\sqrt{x^2+4}$，$g\left(x\right)=\ln\left(ax^2-4x+1\right)$，若对任意的$x_1\in\mathrm{R}$，都存在实数$x_2$，使得$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$成立，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,4\right]$　　B．$\left(0,4\right]$　　C．$\left[0,4\right]$　　D．$\left(0,2\right]$

7．（2023·湖北·荆门市龙泉中学二模）设$a>0$且$a\neq1$，若$\sqrt{2}\log_a x>\sin x+\cos x$对$x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$恒成立，则$a$的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{\pi}{4})$　　B．$(0,\dfrac{\pi}{4}]$　　C．$(\dfrac{\pi}{4},1)\cup(1,\dfrac{\pi}{2})$　　D．$[\dfrac{\pi}{4},1)$

8．（2023·浙江·模拟预测）已知实数$a,b\in(1,+\infty)$，且$\log_3 a+\log_b 3=\log_3 b+\log_a 4$，则（　　）

A．$\sqrt{a}<b<a$　　B．$b<\sqrt{a}<a$　　C．$\sqrt{a}<a<b$　　D．$a<b<\sqrt{a}$

二、多选题

9．（2023·重庆市天星桥中学一模）已知$a>0,b>0$，且$a+b=1$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值是4

B．$ab+\frac{1}{ab}$的最小值是2

C．2^a+2^b的最小值是$2\sqrt{2}$

D．$\log_2 a+\log_2 b$的最小值是-2

10．（2023·广东汕头·二模）设a，b，c都是正数，且$4^a=6^b=9^c$，则下列结论正确的是（　　）

A．$ab+bc=2ac$　　B．$ab+bc=ac$　　C．$4^b\cdot 9^b=4^a\cdot 9^c$　　D．$\frac{1}{c}=\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$

11．（2023·河北·高三阶段练习）下列函数中，存在实数a，使函数$f(x)$为奇函数的是（　　）

A．$f(x)=\lg\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$　　B．$f(x)=x^2+ax$

C．$f(x)=\frac{a}{e^x-1}-2$　　D．$f(x)=x\ln\left(e^x+a\right)-\frac{x^2}{2}$

12．（2023·江苏·南京师大附中高三开学考试）当$0<x\le\frac{1}{2}$时，$4^x\le\log_a x$，则a的值可以为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\sqrt{2}$

三、填空题

13．（2023·天津·二模）已知$\log_4(x+4y)=1+\log_2\sqrt{xy}$，则$x+2y$的最小值为__________.

14．（2023·全国·高三专题练习）已知$x^2e^{x-3}+\ln x=3$，则$e^{3-x}+\ln x=$__________.

15．（2023·河南·模拟预测（文））已知函数$f(x)=\begin{cases}4^x-1,x\le 1\\ \log_2 x,x>1\end{cases}$，若$1<f(a)\le 2$，则实数$a$的取值范围为__________.

16．（2023·河南·开封高中模拟预测（文））已知函数$y=f(x)$为奇函数，且对定义域内的任意x都有$f(1+x)=-f(1-x)$．当$x\in(1,2)$时，$f(x)=1-\log_2 x$．给出以下4个结论：

①函数$y=f(x)$的图象关于点$(k,0)(k\in\mathbf{Z})$成中心对称；

②函数$y=|f(x)|$是以2为周期的周期函数；

③当$x\in(0,1)$时，$f(x)=\log_2(2-x)-1$；

④函数$y=f(|x|)$在$(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$上单调递减.

其中所有正确结论的序号为______.

四、解答题

17．（2023·北京·高三专题练习）已知函数$f(x)=\log_a x(a>0),且a\neq 1)$，设$a>1$，函数$y=|\log_a x|$的定义域为[$m$，$n$] ($m$<$n$)，值域为[0，1]，定义“区间[$m$，$n$]的长度等于 n－m”，若区间[m，n]长度的最小值为$\frac{5}{6}$,求实数a的值；

18．（2023·全国·高三专题练习（理））已知函数$f(x)$＝log$a$(x＋1)－log$a$(1－x)，a＞0 且a≠1．

(1)求$f(x)$的定义域；

(2)判断$f(x)$的奇偶性并予以证明；

(3)当a＞1 时，求使$f(x)$＞0 的x的解集．

19．（2023·北京·高三专题练习）已知函数$f(x)=\log_a x(a>0)且a\neq 1)$，作出$y=|f(x)|$的大致图像并写出它的单调性；

20．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=(\log_4 x-3)\cdot\log_4 4x$.当$x\in\left[\frac{1}{4},16\right]$时，求该函数的值域；

21．（2023·全国·高三专题练习）已知：函数 $f\left(x\right)=\log_{0.5}\frac{1-ax}{x-1}$ 在其定义域上是奇函数，a 为常数．

(1)求 a 的值．

(2)证明：$f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上是增函数．

(3)若对于 $\left[3,4\right]$ 上的每一个 x 的值，不等式 $f\left(x\right)>\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

22．（2023·北京东城·高三期末）曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(t,\ln t)$ 处的切线 l 交 x 轴于点 M．

(1)当 $t=e$ 时，求切线 l 的方程；

(2) O 为坐标原点，记 $\triangle AMO$ 的面积为 S，求面积 S 以 t 为自变量的函数解析式，写出其定义域，并求单调增区间.

专题 10 对数与对数函数

【考点预测】

1.对数式的运算

(1)对数的定义：一般地，如果 $a^x=N(a>0$ 且 $a\neq1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，读作以 a 为底 N 的对数，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数．

(2)常见对数：

①一般对数：以 $a(a>0$ 且 $a\neq1)$ 为底，记为 $\log_a^N$，读作以 a 为底 N 的对数；

②常用对数：以 10 为底，记为 $\lg N$；

③自然对数：以 e 为底，记为 $\ln N$；

(3) 对数的性质和运算法则：

① $\log_a^1=0$； $\log_a^a=1$；其中 $a>0$ 且 $a\neq1$；

② $a^{\log_a^N}=N$ (其中 $a>0$ 且 $a\neq1$， $N>0$)；

③对数换底公式： $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$；

④ $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

⑤ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

⑥ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b(m，\ n\in R)$；

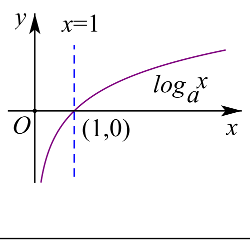
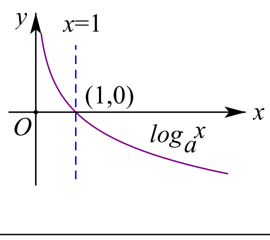
⑦ $a^{\log_a b}=b$ 和 $\log_a a^b=b$；

⑧ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；

2.对数函数的定义及图像

(1)对数函数的定义：函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 叫做对数函数．

对数函数的图象

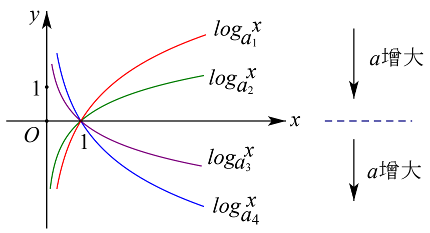
	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	定义域：(0，+∞)	

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="2">值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">过定点$(1，0)$，即$x=1$时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>在$(0，+\infty)$上增函数</td><td>在$(0，+\infty)$上是减函数</td></tr>
<tr><td>当$0<x<1$时，$y<0$，当$x\geq1$时，$y\geq0$</td><td>当$0<x<1$时，$y>0$，当$x\geq1$时，$y\leq0$</td></tr>
</table>

【方法技巧与总结】

1.对数函数常用技巧

在同一坐标系内，当$a>1$时，随a的增大，对数函数的图象愈靠近x轴；当$0<a<1$时，对数函数的图象随a的增大而远离x轴．(见下图)



【题型归纳目录】

题型一：对数运算及对数方程、对数不等式

题型二：对数函数的图像

题型三：对数函数的性质（单调性、最值（值域））

题型四：对数函数中的恒成立问题

题型五：对数函数的综合问题

【典例例题】

题型一：对数运算及对数方程、对数不等式

例1．（2023·全国·高三专题练习）（1）计算$3^{\log_3 2}+27^{\frac{1}{3}}+\lg 50+\lg 2$；

（2）已知$\log_2\left[\log_3(\lg x)\right]=1$，求实数$x$的值；

（3）若$18^a=5$，$\log_{18}9=b$，用a，b，表示$\log_{36}45$．

答案：（1）7；（2）10^9；（3）$\dfrac{a+b}{2-b}$．

【解析】

（1）利用对数恒等式和对数的运算法则计算即可；

（2）利用指对互化可得实数x的值；

（3）先求出a，再利用换底公式结合对数的运算法则求得结果．

【详解】

（1）原式$=2+3+\lg(5\times10)+\lg2=5+\lg5+1+\lg2=6+\lg5+\lg2=6+\lg10=7$；

（2）因为$\log_2[\log_3(\lg x)]=1$，所以$\log_3(\lg x)=2$，所以$\lg x=3^2=9$，所以$x=10^9$；

（3）因为$18^a=5$，所以$\log_{18}5=a$，所以

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}(5\times9)}{\log_{18}(18\times2)}=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18+\log_{18}(18\div9)}=$$

$$\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18+\log_{18}18-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-b}.$$

例 2．（2023·全国·高三专题练习）（1）求$\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3 8\cdot\log_{\frac{1}{5}}27$的值.

（2）已知$\log_9 5=a$，$3^b=7$，试用a，b表示$\log_{21}35$

答案：（1）18；（2）$\frac{2a+b}{b+1}$.

【解析】

分析：

（1）首先根据题意得到原式$=(-2\log_2 5)\cdot(3\log_3 2)\cdot(-3\log_5 3)$，再利用换底公式化简即可得到答案.

（2）首先根据题意得到$\log_3 7=b$，$\log_3 5=2a$，再利用换底公式化简即可得到答案.

【详解】

（1）原式$=\log_2 5^{-2}\cdot\log_3 2^3\cdot\log_{5^{-1}}3^3=(-2\log_2 5)\cdot(3\log_3 2)\cdot(-3\log_5 3)$

$$=18\cdot\frac{\lg5}{\lg2}\cdot\frac{\lg2}{\lg3}\cdot\frac{\lg3}{\lg5}=18$$

（2）由$3^b=7$得到$\log_3 7=b$，

由$\log_9 5=a$，得到$a=\frac{1}{2}\log_3 5$，即$\log_3 5=2a$.

$$\log_{21}35=\frac{\log_3 35}{\log_3 21}=\frac{\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 7+\log_3 3}=\frac{2a+b}{b+1}.$$

【点睛】

本题主要考查对数的换底公式，同时考查指数、对数的互化公式，属于中档题.

例 3．（2023·全国·高三专题练习）（1）已知 a，b，c 均为正数，且 3a=4b=6c，求证：

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$；

（2）若 60a=3，60b=5，求$12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$的值.

答案：（1）详见解析；（2）2.

【解析】

分析：

（1）设 $3^a=4^b=6^c=k>1$，应用指对数的互化有 $a=\log_3 k, b=\log_4 k, c=\log_6 k$，进而应用换底公式及对数的运算性质分别求 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$、$\frac{2}{c}$，即可证结论；

（2）应用指对数互化有 $a=\log_{60}3, b=\log_{60}5$，应用对数的运算性质求 $\frac{1-a-b}{2(1-b)}$，进而可求 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ 的值.

【详解】

（1）设 $3^a=4^b=6^c=k$，则 $k>1$.

$\therefore a=\log_3 k, b=\log_4 k, c=\log_6 k$，

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{\log_3 k}+\frac{1}{\log_4 k}=2\log_k 3+\log_k 4=\log_k 9+\log_k 4=\log_k 36=2\log_k 6$，

而 $\frac{2}{c}=\frac{2}{\log_6 k}=2\log_k 6$，

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$.

（2）由题设知：$a=\log_{60}3, b=\log_{60}5$，

得 $1-b=1-\log_{60}5=\log_{60}12$，$1-a-b=1-\log_{60}3-\log_{60}5=\log_{60}4$，

$\therefore \frac{1-a-b}{2(1-b)}=\frac{\log_{60}4}{2\log_{60}12}=\frac{2\log_{12}2}{2}=\log_{12}2$，

则 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=12^{\log_{12}2}=2$.

例 4．（2023·全国·模拟预测）若 $e^a=4$，$e^b=25$，则（　　）

A．$a+b=100$　　B．$b-a=e$

C．$ab<8\ln^2 2$　　D．$b-a>\ln 6$

答案：D

【解析】

分析：

利用指数和对数互化，得到 a，b 后逐项判断.

【详解】

对于 A，由 $e^a=4$，$e^b=25$，得 $a=\ln 4$，$b=\ln 25$，所以 $a+b=\ln 4+\ln 25=\ln 100$，故 A 错误；

对于 B，$b-a=\ln 25-\ln 4=\ln\frac{25}{4}$，故 B 错误；

对于 C，$ab=\ln 4\times\ln 25>2\ln 2\times\ln 16=8\ln^2 2$，故 C 错误；

对于 D，$b-a=\ln 25-\ln 4=\ln\frac{25}{4}>\ln 6$，故 D 正确.

故选：D.

例 5.（2023·全国·模拟预测）已知实数 x，y 满足 $x>0$，$y>0$，$x\neq 1$，$y\neq 1$，$x^y=y^x$，$\log_y x+\frac{x}{y}=4$，则 $x+y=$（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

答案：C

【解析】

分析：

根据 $x^y=y^x$ 得到 $\frac{\lg x}{\lg y}=\frac{x}{y}$，再利用换底公式得到 $\frac{x}{y}=2$，利用 $\frac{\lg x}{\lg y}=2$，即 $x=y^2$，求出 $x=4$，$y=2$，所以 $x+y=6$.

【详解】

由 $x^y=y^x$，得 $y\lg x=x\lg y$，$\frac{\lg x}{\lg y}=\frac{x}{y}$.

由 $\log_y x+\frac{x}{y}=4$，$\log_y x=\frac{\lg x}{\lg y}$，所以 $\frac{\lg x}{\lg y}+\frac{x}{y}=4$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{x}{y}=4$，解得：$\frac{x}{y}=2$，则 $\frac{\lg x}{\lg y}=2$，即 $x=y^2$，

所以 $x=4$，$y=2$，所以 $x+y=6$，

故选：C.

例 6.（2023·北京昌平·二模）已知函数 $f(x)=ax^2-4ax+2(a<0)$，则关于 x 的不等式 $f(x)>\log_2 x$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,4)$　　B．$(0,1)$　　C．$(0,4)$　　D．$(4,+\infty)$

答案：C

【解析】

分析：

由二次函数的性质判断 $f(x)$ 区间单调性，根据解析式知 $f(x)$ 恒过 $(4,2)$ 且 $f(0)=2$，进而确定区间值域，再由对数函数性质求 $y=\log_2 x$ 的对应区间值域，即可得不等式解集.

【详解】

由题设，$f(x)$ 对称轴为 $x=2$ 且图象开口向下，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，$(2,+\infty)$ 上递减，

由 $f(x)=ax^2-4ax+2=ax(x-4)+2$，即 $f(x)$ 恒过 $(4,2)$ 且 $f(0)=2$，

所以 $(0,4)$ 上 $f(x)>2$，$(4,+\infty)$ 上 $f(x)<2$，

而 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $(0,4)$ 上 $y<2$，$(4,+\infty)$ 上 $y>2$，

所以 $f(x)>\log_2 x$ 的解集为 $(0,4)$.

故选：C

例 7.（2023·全国·江西师大附中模拟预测（文））已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, x>1,\\ 1-x^2, x\le 1,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)<f(x-1)$ 的解集为______.

答案：$\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$

【解析】

分析：

分 $x\le 1$、$1<x\le 2$ 和 $x>2$，依次解不等式，再取并集即可.

【详解】

当 $x\le 1$ 时，不等式 $f(x)<f(x-1)$ 为 $1-x^2<1-(x-1)^2$，解得 $\frac{1}{2}<x\le 1$；

当 $1<x\le 2$ 时，不等式 $f(x)<f(x-1)$ 为 $\log_{\frac{1}{2}}x<1-(x-1)^2$，易知

$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}1=0, 1-(x-1)^2\ge 0$，解得 $1<x\le 2$；

当 $x>2$ 时，不等式 $f(x)<f(x-1)$ 为 $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$，解得 $x>2$；

综上，解集为：$\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$.

故答案为：$\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$.

例 8.（2023·辽宁·东北育才学校二模）若函数 $f(x)$ 满足：（1）$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\ne x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$；（2）$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$，则 $f(x)=$__________.（写出满足这些条件的一个函数即可）

答案：$\log_{\frac{1}{2}}x$，（$\log_a x$，$(0<a<1)$都对）

【解析】

分析：

满足第一个条件，表示函数是单调递减函数，第二个条件正好是符合对数的运算性质；

【详解】

对于条件①，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$\because \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，$\therefore f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数，对于条件②

，刚好符合对数的运算性质，故这样的函数可以是一个单调递减的对数函数.

故答案为: $\log_{\frac{1}{2}} x$.（logax，(0<a<1)都对）

例 9.（2023·全国·高三专题练习）设函数 $f(x)=\log_m x$（$m>0$ 且 $m\neq 1$）的图像经过点 $(3,1)$.

（1）解关于 x 的方程 $f^2(x)+(m-1)f(x)+1-m^2=0$；

（2）不等式 $[1+f(x)]\cdot[a-f(x)]>0$ 的解集是 $\left(\frac{1}{3},9\right)$，试求实数 a 的值.

答案：（1）$x=9$ 或 $x=\frac{1}{81}$；（2）$a=2$.

【解析】

分析：

(1)根据给定条件求出 m 值，并代入方程，再解方程即得.

(2)由给定解集借助对数函数单调性求出 $f(x)$ 范围，换元借助一元二次不等式即可得解.

【详解】

（1）由已知得 $f(3)=1$，即 $\log_m 3=1$，则 $m=3$，于是得 $f(x)=\log_3 x$，

方程 $f^2(x)+(m-1)f(x)+1-m^2=0 \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)-8=0$，

从而得 $f(x)=2$ 或 $f(x)=-4$，即 $\log_3 x=2$ 或 $\log_3 x=-4$，$x=9$ 或 $x=\frac{1}{81}$，

所以原方程的根为 $x=9$ 或 $x=\frac{1}{81}$；

（2）依题意，函数 $f(x)=\log_3 x$ 中，$x\in\left(\frac{1}{3},9\right)$，从而得 $\log_3 x\in(-1,2)$.

又 $[1+f(x)]\cdot[a-f(x)]>0 \Leftrightarrow (\log_3 x+1)\cdot(\log_3 x-a)<0$，令 $\log_3 x=t$，

即一元二次不等式 $(t+1)\cdot(t-a)<0$ 的解集为 $(-1,2)$，

因此有-1，2 是关于 t 的方程 $(t+1)\cdot(t-a)=0$ 的两根，则 $a=2$，

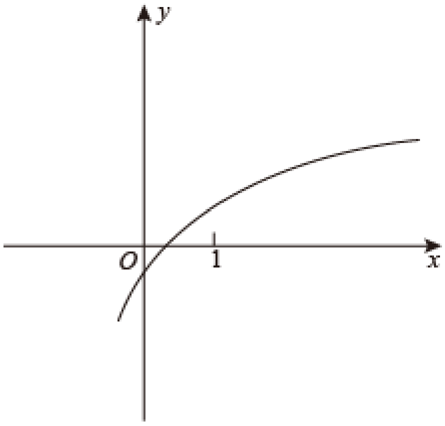
所以实数 a 的值为 2.

【方法技巧与总结】

对数的有关运算问题要注意公式的顺用、逆用、变形用等.对数方程或对数不等式问题是要将其化为同底，利用对数单调性去掉对数符号，转化为不含对数的问题，但这里必须注意对数的真数为正.

题型二：对数函数的图像

例 10.（2023·山东潍坊·二模）已知函数 $f(x)=\log_a(x-b)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图像如图所示，则以下说法正确的是（　　）



A．$a+b<0$　　B．$ab<-1$　　C．$0<a^{b}<1$　　D．$\log_{a}|b|>0$

答案：C

【解析】

分析：

结合函数$f\left(x\right)$的图象可得$a>1$和$-1<b<0$，然后逐项分析即可求出结果.

【详解】

由图象可知$f\left(x\right)$在定义域内单调递增，所以$a>1$，

令$f\left(x\right)=\log_{a}\left(x-b\right)=0$，即$x=b+1$，所以函数$f\left(x\right)$的零点为$b+1$，结合函数图象可知$0<b+1<1$，所以$-1<b<0$，

因此$a+b>0$，故 A 错误；

$-a<ab<0$，又因为$a>1$，所以$-a<-1$，因此$ab<-1$不一定成立，故 B 错误；

因为$a^{-1}<a^{b}<a^{0}$，即$\frac{1}{a}<a^{b}<1$，且$0<\frac{1}{a}<1$，所以$0<a^{b}<1$，故 C 正确；

因为$0<|b|<1$，所以$\log_{a}|b|<\log_{a}1$，即$\log_{a}|b|<0$，故 D 错误，

故选：C.

例 11．（2023·江苏省高邮中学高三阶段练习）函数$y=\log_{a}(x+3)-1(a>0$且$a\neq 1)$的图象恒过定点A，若点A在直线$mx+ny+1=0$上，其中$mn>0$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为（　　）

A．$3-2\sqrt{2}$　　B．$1+\sqrt{2}$　　C．$3+2\sqrt{2}$　　D．$2+2\sqrt{2}$

答案：C

【解析】

分析：

由对数函数的性质，可得$A\left(-2,-1\right)$，可得$2m+n=1$，再根据基本不等式“1”的用法，即可求出结果.

【详解】

解：因为函数 $y=\log_a(x+3)-1(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象恒过定点 $A(-2,-1)$，

所以 $-2m-n+1=0$，即 $2m+n=1$，

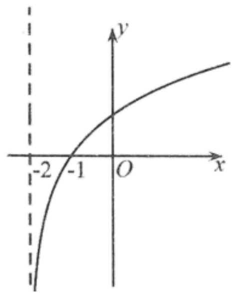
所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(2m+n)=\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}+3$，

又 $mn>0$，所以 $\frac{n}{m}>0,\frac{m}{n}>0$

所以 $\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}+3\geq 2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$，即 $n=\sqrt{2}m=\sqrt{2}-1$ 时取等号.

故选：C.

（多选题）例 12．（2023·福建·莆田二中模拟预测）已知函数 $g(x)=\log_a(x+k)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象如下所示．函数 $f(x)=(k-1)a^x-a^{-x}$ 的图象上有两个不同的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则（　　）



A．$a>1$，$k>2$　　B．$f(x)$ 在 R 上是奇函数

C．$f(x)$ 在 R 上是单调递增函数　　D．当 $x\geq 0$ 时，$2f(x)\leq f(2x)$

答案：BCD

【解析】

分析：

对于 A 结合对数型函数图像相关知识求解；对于 B 运用定义法判断 $f(x)$ 是否在 R 上是奇函数；对于 C 运用定义法判断函数单调性；对于 D 通过作差法并对式子变形即可判断.

【详解】

对于 A，由图像可知，函数 $g(x)=\log_a(x+k)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $a>1$，因为 $g(x)$ 经过 $(-1,0)$，所以 $g(-1)=\log_a(-1+k)=0$，所以 $a^0=-1+k$，$k=2$，故 A 错误.

对于 B，$f(x)=a^x-a^{-x}$，定义域 R 关于原点对称，$f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，故 B 正确.

对于 C，对于 $f(x)=a^x-a^{-x}$，由题意不妨令 $x_1>x_2,x_1\in R,x_2\in R$，则

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(a^{x_1}-\frac{1}{a^{x_1}}\right)-\left(a^{x_2}-\frac{1}{a^{x_2}}\right)=\left(a^{x_1}-a^{x_2}\right)+\frac{a^{x_1}-a^{x_2}}{a^{x_1+x_2}}=\frac{\left(a^{x_1+x_2}+1\right)\left(a^{x_1}-a^{x_2}\right)}{a^{x_1+x_2}}$，因为 $x_1>x_2,x_1\in R,x_2\in R$， $a>1$，所以 $a^{x_1+x_2}+1>0,a^{x_1+x_2}>0,a^{x_1}-a^{x_2}>0$，即 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 在 R 上是单调递增函数，故 C 正确.

对于 D，

$2f\left(x\right)-f\left(2x\right)=2\left(a^x-a^{-x}\right)-\left(a^{2x}-a^{-2x}\right)=2\left(a^x-a^{-x}\right)-\left(a^x-a^{-x}\right)\left(a^x+a^{-x}\right)=\left(a^x-a^{-x}\right)\left(2-a^x-a^{-x}\right)$

$=\left(\frac{a^{2x}-1}{a^x}\right)\left(\frac{2a^x-a^{2x}-1}{a^x}\right)=\frac{-\left(a^{2x}-1\right)\left(a^x-1\right)^2}{a^{2x}}=\frac{-\left(a^x+1\right)\left(a^x-1\right)^3}{a^{2x}}$，因为 $a>1$， $x\geq 0$，所以 $a^x+1>0,\left(a^x-1\right)^3\geq 0,a^{2x}>0$，所以 $\frac{-\left(a^x+1\right)\left(a^x-1\right)^3}{a^{2x}}\leq 0$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，即当 $x\geq 0$ 时， $2f\left(x\right)\leq f\left(2x\right)$ 成立，故 D 正确.

故选：BCD

例 13．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x,-2\leq x<0\\ \ln\frac{1}{x+1},0\leq x\leq 2\end{cases}$，若 $g(x)=\left|f(x)\right|-ax-a$ 的图象与 x 轴有 3 个不同的交点，则实数 a 的取值范围为______.

答案： $[\frac{\ln 3}{3},\frac{1}{\mathrm{e}})$

【解析】

分析：

由分段函数解析式，结合导数研究 $|f(x)|$ 的性质，再将问题转化为 $|f(x)|$ 与 $y=a(x+1)$ 有 3 个不同交点，应用数形结合的思想有 $y=a(x+1)$ 与 $|f(x)|$ 在 $0\leq x\leq 2$ 上至少有 2 个交点，最后由导数求它们相切或 $y=a(x+1)$ 过 $(2,\ln 3)$ 时参数 a 的值，即可知 a 的取值范围.

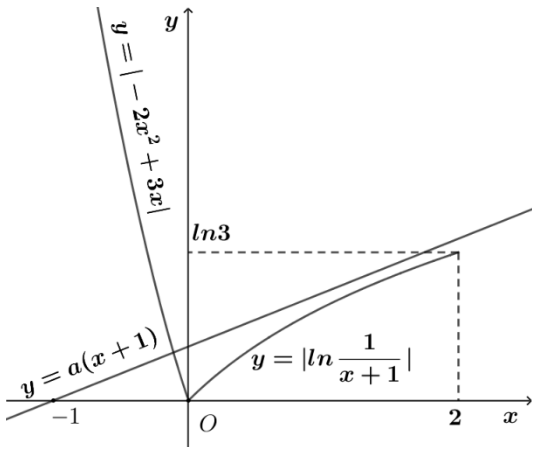
【详解】

由题设， $-2\leq x<0$ 上 $f(x)=-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{8}$，故值域为 $[-14,0]$ 且单调递增；

$0\leq x\leq 2$ 上 $f'(x)=-\frac{1}{x+1}<0$，故 $f(x)$ 值域为 $[-\ln 3,0]$ 且单调递减；

∴ $|f(x)|$ 在 $-2\leq x<0$ 上值域为 $[0,14]$ 且单调递减；在 $0\leq x\leq 2$ 上值域为 $[0,\ln 3]$ 且单调递增；

要使 $g(x)$ 与 x 轴有 3 个不同的交点，即 $|f(x)|$ 与 $y=a(x+1)$ 有 3 个不同交点，它们的图象如下：



$\therefore$由图知：要使函数图象有 3 个交点，则 $y=a(x+1)$ 与 $|f(x)|$ 在 $0\le x\le 2$ 上至少有 2 个交点，

由 $0\le x\le 2$，$g(x)=|f(x)|=-\ln\frac{1}{x+1}$，则 $g'(x)=|f(x)|=\frac{1}{x+1}$，

此时，若 $|f(x)|$ 与 $y=a(x+1)$ 相切时，切点为 $(m,a(m+1))$，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{m+1}=a\\-\ln\frac{1}{m+1}=a(m+1)\end{cases}$，可得 $a=\frac{1}{e}$，

当 $y=a(x+1)$ 过 $(2,\ln 3)$ 时，有 $3a=\ln 3$，得 $a=\frac{\ln 3}{3}$，

$\therefore\frac{\ln 3}{3}\le a<\frac{1}{e}$.

故答案为：$[\frac{\ln 3}{3},\frac{1}{e})$

【点睛】

关键点点睛：根据已知研究 $|f(x)|$ 的性质，并将问题转化为 $|f(x)|$ 与 $y=a(x+1)$ 的交点问题，应用导数的几何意义、数形结合的思想求参数范围.

【方法技巧与总结】

研究和讨论题中所涉及的函数图像是解决有关函数问题最重要的思路和方法.图像问题是数和形结合的护体解释.它为研究函数问题提供了思维方向.

题型三：对数函数的性质（单调性、最值（值域））

例 14．（2023·陕西·榆林市第十中学高二期中（文））函数 $y=\log_2\left(4+3x-x^2\right)$ 的一个单调增区间是（　）

A．$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$　　B．$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$　　C．$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$　　D．$\left[\frac{3}{2},4\right)$

答案：C

【解析】

分析：

先求出函数的定义域，再利用复合函数单调性法则“同增异减”即可求解.

【详解】

函数 $y=\log_2\left(4+3x-x^2\right)$ 的定义域为 $(-1,4)$.

要求函数 $y=\log_2\left(4+3x-x^2\right)$ 的一个单调增区间，

只需求 $y=4+3x-x^2$ 的增区间，只需 $x<\frac{3}{2}$.

所以 $-1<x<\frac{3}{2}$.

所以函数 $y=\log_2\left(4+3x-x^2\right)$ 的一个单调增区间是 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.

故选：C

例 15.（2023·天津·南开中学二模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2-x-\frac{1}{4},x\le 1\\ \log_a x-1,x>1\end{cases}$ 是 R 上的单调函数，

则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　　　B. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

答案：B

【解析】

分析：

分函数 $f(x)$ 在 R 上的单调递减和单调递增求解.

【详解】

当函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2-x-\frac{1}{4},x\le 1\\ \log_a x-1,x>1\end{cases}$ 是 R 上的单调递减函数，

所以 $\begin{cases}0<a<1\\ \frac{1}{2a}\ge 1\\ a-\frac{5}{4}\ge -1\end{cases}$，解得 $\frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{2}$，

因为 $a>0$ 且 $a\ne 1$，

所以当 $x\le 1$ 时，$f(x)$ 不可能是增函数，

所以函数 $f(x)$ 在 R 上不可能是增函数，

综上：实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，

故选：B

例 16．（2023·浙江·模拟预测）已知实数$a,b\in(1,+\infty)$，且$\log_3 a+\log_b 3=\log_3 b+\log_a 4$，则（　　）

A．$\sqrt{a}<b<a$　　B．$b<\sqrt{a}<a$　　C．$\sqrt{a}<a<b$　　D．$a<b<\sqrt{a}$

答案：A

【解析】

分析：

对$\log_3 a-\log_a 4=\log_3 b-\log_b 3$利用换底公式等价变形，得$\log_3 b-\frac{1}{\log_3 b}<\log_3 a-\frac{1}{\log_3 a}$，结合$y=x-\frac{1}{x}$的单调性判断$b<a$，同理利用换底公式得$\log_3 b-\frac{1}{\log_3 b}>\log_4 a-\frac{1}{\log_4 a}$，即$\log_3 b>\log_4 a$，

再根据对数运算性质得$\log_4 a=\log_2\sqrt{a}>\log_3\sqrt{a}$，结合$y=\log_3 x$单调性，　$b>\sqrt{a}$，继而得解.

【详解】

由$\log_3 a-\log_a 4=\log_3 b-\log_b 3$可得$\log_3 b-\frac{1}{\log_3 b}=\log_3 a-\frac{1}{\log_4 a}<\log_3 a-\frac{1}{\log_3 a}$，

因为$y=x-\frac{1}{x}$在$(-\infty,0),(0,+\infty)$上单调递增，且$\log_3 a$，$\log_3 b\in(0,+\infty)$，所以$\log_3 b<\log_3 a$，即$b<a$，

其次，$\log_3 b-\frac{1}{\log_3 b}>\log_4 a-\frac{1}{\log_4 a}$，所以$\log_3 b>\log_4 a$，

又因为$\log_4 a=\log_2\sqrt{a}>\log_3\sqrt{a}$且$y=\log_3 x$单调递增，所以由$\log_3 b>\log_3\sqrt{a}$可知$b>\sqrt{a}$，

综上，$\sqrt{a}<b<a$.

故选：A

例 17．（2023·全国·高三专题练习（理））函数$f(x)=\log_a x(0<a<1)$在$[a^2，a]$上的最大值是（　　）

A．0　　B．1

C．2　　D．a

答案：C

【解析】

分析：