# 第三节　函数的单调性与最值

## [备考方向要明了]

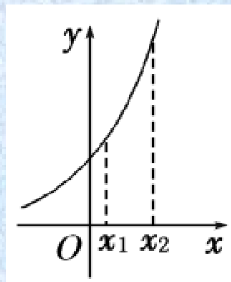
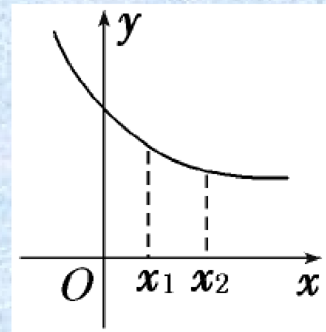
| 考什么 | 怎么考 |
| --- | --- |
| 1.了解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义.<br>2.会利用函数的图象了解和研究函数的性质. | 1.函数的单调性，是高考考察的重中之重，主要考察求函数的单调区间、利用函数的单调性比较函数值的大小、利用函数单调性求函数值域或最值、利用函数的单调性解不等式等有关问题，如2023年高考T3，T10.<br>2.函数的最值问题是每年高考的必考内容，一般情况下，不会对最值问题单独命题，主要是结合其他知识综合在一起考察，主要考察求最值的基本措施，如2023年高考T19 |

[归纳　知识整合]

## 1．函数的单调性

(1)单调函数的定义：

| | 增函数 | 减函数 |
|---|---|---|
| 定义 | 一般地，设函数$f(x)$的定义域为$A$，区间$I\subseteq A$.假如对于区间$I$内的任意两个值$x_1$，$x_2$ | |
| | 当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$y=f(x)$在区间$I$上是单调增函数 | 当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就说$y=f(x)$在区间$I$上是单调减函数 |

| | 增函数 | 减函数 |
| --- | --- | --- |
| 图象描述 | <br>自左向右看图象是<u>逐渐上升的</u> | <br>自左向右看图象是<u>逐渐下降的</u> |

(2)假如函数$y=f(x)$在区间$I$上是<u>单调增函数</u>或<u>单调减函数</u>，那么就说函数$y=f(x)$在区间$I$上具有(严格的)单调性．单调增区间和单调减区间统称为单调区间．

[探究]　1.函数 $y=\frac{1}{x}$的单调递减区间为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，这种表示法对吗？

提醒：首先函数的单调区间只能用区间表达，不能用集合或不等式的形式表达；假如一种函数有多种单调区间应分别写，分开表达，不能用并集符号“∪”联结，也不能用“或”联结.

2．函数$f(x)$在区间$[a，b]$上单调递增与函数$f(x)$的单调递增区间为$[a，b]$含义相同吗？

提醒：含义不同．$f(x)$在区间$[a，b]$上单调递增并不能排除$f(x)$在其他区间上单调递增，而$f(x)$的单调递增区间为$[a，b]$意味着$f(x)$在其他区间上不可能单调递增．

## 2．函数的最值

| | | |
|---|---|---|
| **前提** | 设函数y＝f(x)的定义域为A | |
| **条件** | 假如存在x0∈A，使得对于任意的x∈A，都有____________ | 假如存在x0∈A，使得对于任意的x∈A，都有f(x)≥f(x0) |
| **结论** | 称f(x0)为y＝f(x)的最大值，记为 ~~$f(x)\leqslant f(x_0)$~~ | 称f(x0)为y＝f(x)的最小值，记为ymin＝f(x0) |

$y_{\max}=f(x_0)$

[探究]　3.函数的单调性、最大(小)值反应在其图象上有什么特征?

提醒：函数的单调性反应在图象上是上升或下降的，而最大(小)值反应在图象上为其最高(低)点的纵坐标的值.

## [自测　牛刀小试]

1．(教材习题改编)函数 $f(x)=\frac{2}{x-1}$，$x\in[2,6]$，则下列说法正确的有________.

①函数 $f(x)$为减函数；②函数 $f(x)$为增函数；③函数 $f(x)$的最大值为 2；④函数 $f(x)$的最小值为$\frac{2}{5}$.

**解析：**易知函数 $f(x)=\frac{2}{x-1}$在 $x\in[2,6]$上为减函数，故 $f(x)_{\min}=f(6)=\frac{2}{5}$，$f(x)_{\max}=f(2)=2$.

**答案：**①③④

2．函数 $y=(2k+1)x+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，则________.

**解析：**使 $y=(2k+1)x+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，

则 $2k+1<0$，即 $k<-\frac{1}{2}$.

**答案：**$k<-\frac{1}{2}$

3．已知函数 $f(x)$ 为 **R** 上的减函数，则满足 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)<f(1)$ 的实数 $x$ 的取值范围是________.

**解析：** ∵函数 $f(x)$ 为 **R** 上的减函数，

且 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)<f(1)$，

$\therefore \left|\frac{1}{x}\right|>1$，即 $|x|<1$ 且 $|x|\neq 0$.

$\therefore x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

**答案：** $(-1,0)\cup(0,1)$

4．(教材习题改编)若函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在[5,20]上是单调递增函数，则实数 $k$ 的取值范围是________.

解析：∵函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 的对称轴为 $x=\frac{k}{8}$,

又函数 $f(x)$ 在[5,20]上为增函数,

$\therefore \frac{k}{8}\leqslant 5$，即 $k\leqslant 40$.

答案：$(-\infty，40]$

5．(2023·无锡调研)已知函数$y=\log_2(ax-1)$在$(1,2)$上单调递增，则$a$的取值范围为________.

解析：令$m=ax-1$，则函数$y=\log_2(ax-1)$在$(1,2)$上单调递增等价于$m=ax-1$在$(1,2)$上单调递增，且$ax-1>0$在$(1,2)$上恒成立，所以$\begin{cases}a>0,\\a-1\geq 0,\end{cases}$即$a\geq 1$.

答案：$[1，+\infty)$

突破 热点题型 REDIAN TIXING 研考点熟悉高考题型 探规律掌握类题通法

## 考点一 函数单调性的判断或证明

[例 1] 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

(1)若 $2f(1)=f(-1)$，求 $a$ 的值；

(2)证明：当 $a\geq 1$ 时，函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上为单调减函数.

[自主解答] (1)由 $2f(1)=f(-1)$,

可得 $2\sqrt{2}-2a=\sqrt{2}+a$，得 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(2)证明：任取 $x_1$，$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-ax_1-\sqrt{x_2^2+1}+ax_2=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

$\because 0\leqslant x_1<\sqrt{x_1^2+1}$，$0<x_2<\sqrt{x_2^2+1}$，

$$\therefore 0<\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1.$$

又 $\because a\geqslant 1$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

**互动探究**

保持本例条件不变，若 $f(x)$在区间$[1，+\infty)$上是增函数，求 $a$ 的取值范围.

**解**：任取 $1\leqslant x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=$

$$(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right),$$

$\because f(x)$单调递增，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$.

又 $x_1-x_2<0$，那么必须$\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a>0$ 恒成立.

$\because 1\leqslant x_1<x_2\Rightarrow 2x_1^2\geqslant x_1^2+1, 2x_2^2>x_2^2+1$，

$\therefore \sqrt{2}x_1\geqslant\sqrt{x_1^2+1}$，$\sqrt{2}x_2>\sqrt{x_2^2+1}$.

相加得$\sqrt{2}(x_1+x_2)>\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\Rightarrow$

$\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}\ \sqrt{x_2^2+1}}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore 0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

[方法·规律]

## 判断或证明函数的单调性的两种方法

(1)利用定义的基本步骤是:

取值 ⇨ 作差(商)变形 ⇨ 确定符号 ⇨ 得出结论

(2)利用导数的基本步骤是:

求导函数 ⇨ 确定符号 ⇨ 得出结论

**变式训练**

1．讨论函数$f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}(a>0)$的单调性．

解：由$x^2-1\neq 0$，得$x\neq\pm 1$，即

定义域为$(-\infty，-1)\cup(-1,1)\cup(1，+\infty)$.

①当$x\in(-1,1)$时，设$-1<x_1<x_2<1$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{ax_1}{x_1^2-1}-\dfrac{ax_2}{x_2^2-1}$

$=\dfrac{ax_1x_2^2-ax_1-ax_2x_1^2+ax_2}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}=\dfrac{a(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$.

$\because -1<x_1<x_2<1$，

$\therefore x_2-x_1>0$，$x_1x_2+1>0$，$(x_1^2-1)(x_2^2-1)>0$.

又$a>0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，函数$f(x)$在$(-1,1)$上为减函数．

②设 $1<x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)$

$$=\frac{ax_1}{x_1^2-1}-\frac{ax_2}{x_2^2-1}=\frac{a(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)},$$

$\because 1<x_1<x_2$，$\therefore x_1^2-1>0$，$x_2^2-1>0$，

$x_2-x_1>0$，$x_1x_2+1>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上为减函数，

又函数 $f(x)$是奇函数，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$上是减函数.

## 考点二　求函数的单调区间

[例 2]　求下列函数的单调区间.

(1)$y=-x^2+2|x|+3$;

(2)$y=\log_2(x^2-1)$.

[自主解答]　(1)依题意，可得

当 $x\geq 0$ 时，$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$;

当 $x<0$ 时，$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$.

由二次函数的图象知，

函数 $y=-x^2+2|x|+3$ 在$(-\infty，-1]$，$[0,1]$上是增函数，在$[-1,0]$，$[1，+\infty)$上是减函数.

(2) $\because y=\log_2(x^2-1)$,

$\therefore$ 该函数的定义域为$(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

又$\because y=\log_2(x^2-1)$可看作由 $y=\log_2\mu$ 和 $\mu=x^2-1$ 两个函数复合而成的，且 $y=\log_2\mu$ 在 $\mu\in(0, +\infty)$上为增函数，

而 $\mu=x^2-1$ 在$(-\infty, -1)$上为减函数且 $\mu>0$，

在$(1, +\infty)$上为增函数且 $\mu>0$.

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty, -1)$时，$y=\log_2(x^2-1)$为减函数，

当 $x\in(1, +\infty)$时，$y=\log_2(x^2-1)$为增函数.

[方法·规律]

**1．求函数单调区间应注意的问题**

函数的单调区间是函数定义域的子集或真子集，求函数的单调区间必须首先拟定函数的定义域，求函数的单调区间的运算应该在函数的定义域内进行．

[方法·规律]

**2．求复合函数$y=f[g(x)]$的单调区间的环节**

(1)拟定定义域.

(2)将复合函数分解成基本初等函数：$y=f(u)$，$u=g(x)$.

(3)分别拟定这两个函数的单调区间.

(4)若这两个函数同增或同减，则$y=f[g(x)]$为增函数；若一增一减，则$y=f[g(x)]$为减函数，即“同增异减”.

## 变式训练

2．求函数 $y=\sqrt{x^2+x-6}$的单调区间.

**解：**令 $u=x^2+x-6$，$y=\sqrt{x^2+x-6}$可以看作有 $y=\sqrt{u}$与 $u=x^2+x-6$ 的复合函数.

由 $u=x^2+x-6\geqslant 0$，得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 2$.

$\because u=x^2+x-6$ 在$(-\infty，-3]$上是减函数，在$[2，+\infty)$上是增函数，而 $y=\sqrt{u}$在$(0，+\infty)$上是增函数.

$\therefore y=\sqrt{x^2+x-6}$的单调减区间为$(-\infty，-3]$，单调增区间为$[2，+\infty)$.