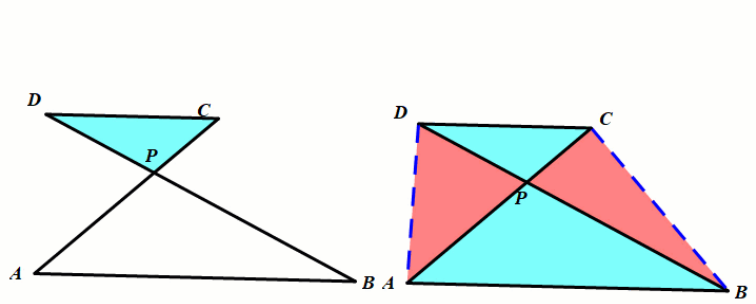
难关必刷 01 相似三角形（5 种解题模型专练）

【模型梳理】

题型一：8 字模型

8 字_平行型

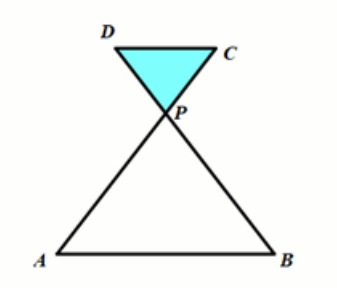


条件： $CD \parallel AB$,

结论： $\Delta PAB \sim \Delta PCD$(上下相似);

左右不一定相似,不一定全等，但面积相等;

四边形 $ABCD$ 为一般梯形.



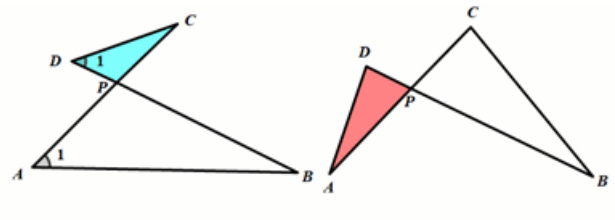
条件： $CD \parallel AB, PD = PC$.

结论： $\Delta PAB \sim \Delta PCD \sim \Delta PDC$(上下相似)

$\Delta PAD \cong \Delta PBC$ 左右全等;

四边形 $ABCD$ 为等腰梯形;

8 字_不平行型

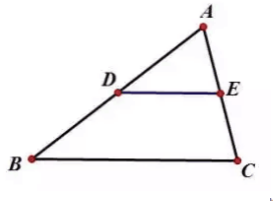


条件：∠*CDP*=∠*BAP*.

结论：Δ*APB*~Δ*DPC*(上下相似);

Δ*APD*~Δ*BPC*(左右相似);

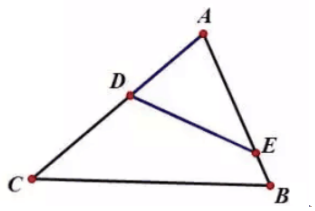
题型二：A 字模型



如图一

模型一：平行*A*字型

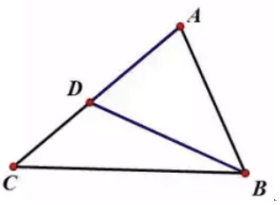
如图一，在Δ*ABC*中，$DE//BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$



如图二

模型二：非平行*A*字型（也称为反A字型）

如图二，在Δ*ABC*中，$\angle AED=\angle C \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$



如图三

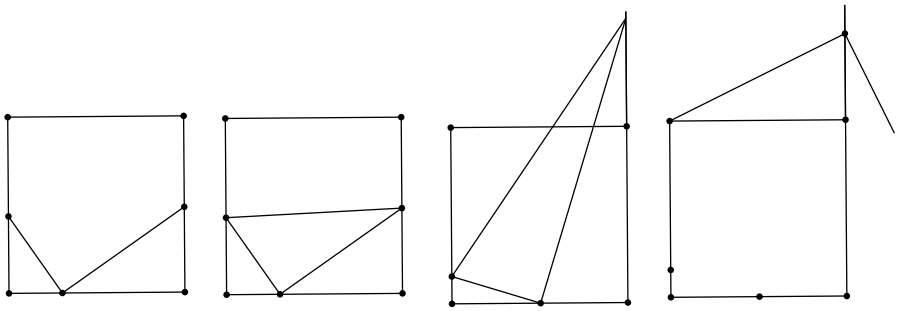
模型三：非平行A字型（也称为母子型）

如图三，在ΔABC中，$\angle ABD=\angle C \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{BC}\\(2)\mathrm{AB}^2=AD\bullet AC\end{cases}$

题型三：一线三等角模型

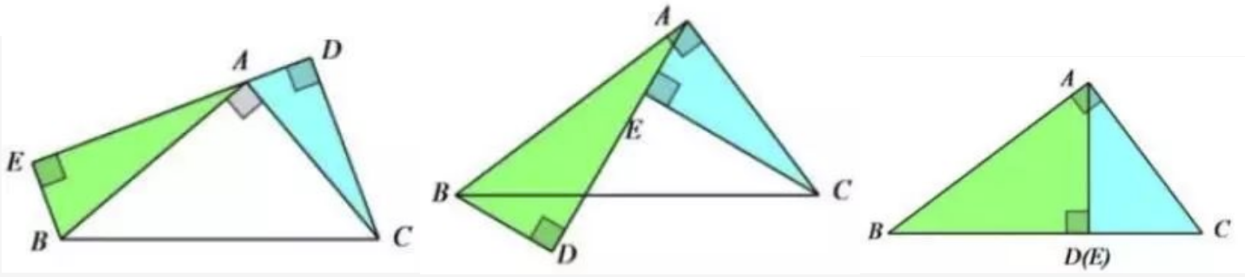
一线三等角指的是**有三个等角的顶点在同一条直线上构成的相似图形**，这个角可以是直角，也可以是锐角或钝角。或叫 **“K字模型”**。

三直角相似可以看着是“一线三等角”中当角为直角时的特例，三直角型相似通常是以矩形或者正方形形为背景，或者在一条直线上有一个顶点在该直线上移动或者旋转的直角，几种常见的基本图形如下：

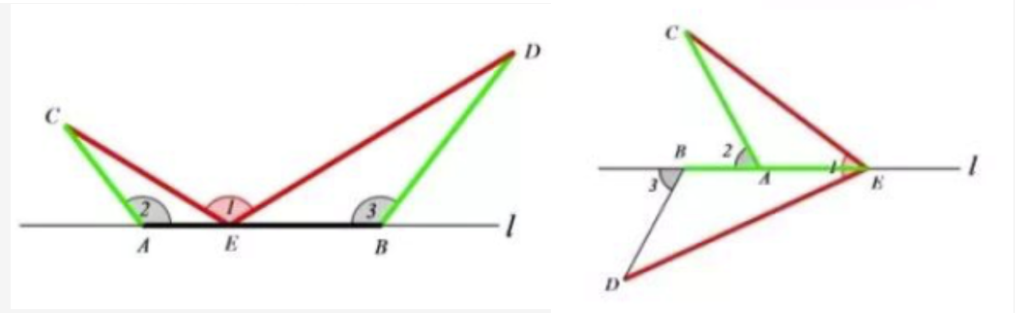


当题目的条件中只有一个或者两个直角时，就要考虑通过添加辅助线构造完整的三直角型相似，这往往是很多压轴题的突破口，进而将三角型的条件进行转化。

一般类型：

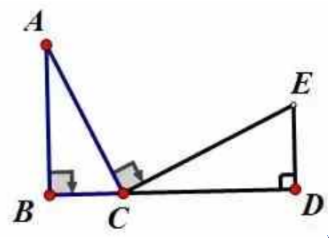


基本类型：

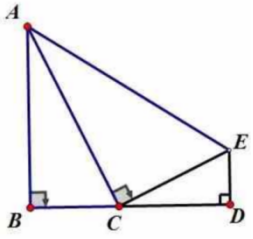


同侧“一线三等角”　　异侧“一线三等角”

模型一：一线三直角



图一



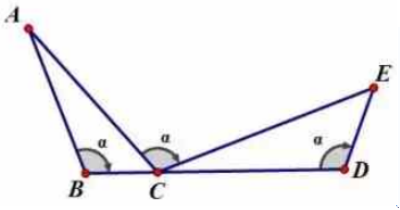
图二

如图一、二，已知：$\angle B=\angle ACE=\angle D=90^0$

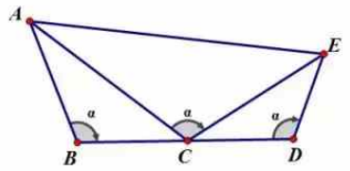
结论：（1）$\Delta ABC\sim\Delta CDE$;

（2）AB•DE=BC•CD

模型二：一线三等角



图三



图四

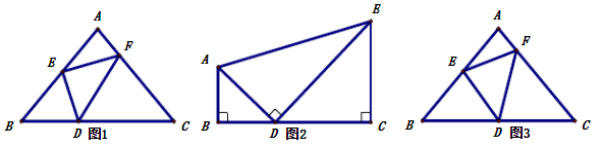
如图三、四，已知：$\angle B=\angle ACE=\angle D=\alpha$

结论：（1）$\Delta ABC\sim\Delta CDE$;

（2）AB•DE=BC•CD

（3）当C为BD中点时，$\Delta ABC\sim\Delta CDE\sim\Delta ACE$

【方法点拨】基本模型：



如图 1，$\angle B=\angle C=\angle EDF$ 推出$\triangle BDE\backsim\triangle CFD$（一线三等角）

如图 2，$\angle B=\angle C=\angle ADE$ 推出$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$（一线三等角）

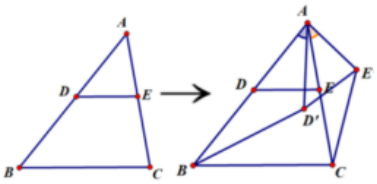
如图 3，特别地，当 D 时 BC 中点时：$\triangle BDE\backsim\triangle DFE\backsim\triangle CFD$ 推出 ED 平分$\angle BEF$，FD 平分$\angle EFC$.

题型四：旋转相似

旋转相似模型：

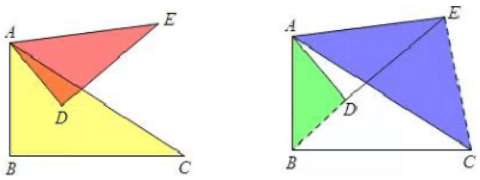
已知：如图一，$DE//BC$,现将ΔADE绕点A旋转一定角度得到如图二

得到$\Delta ADE\sim\Delta AD'E'\sim\Delta ABC$和$\Delta ABD'\sim\Delta ACE'$



图一　　图二

【方法点拨】基本模型：



旋转放缩变换，图中必有两对相似三角形.

题型五：母子型

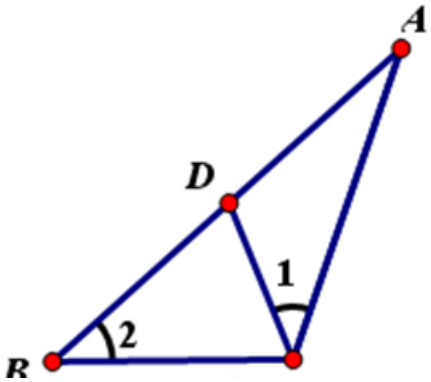
“子母型”相似的图形特点：有一个公共角，

一对完全重合的边，

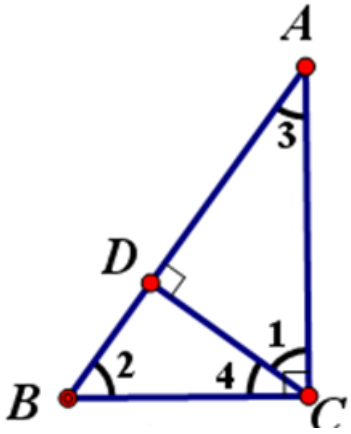
一对半重合的边，

一对完全不重合的边。

子母型的结论：$AB^2=AD\cdot AB$　　（重合边的平方等半重合边的乘积）



特殊的子母型（双垂直型）



【方法点拨】

图 1 垂直母子型条件：$AC \perp BC, AB \perp CD$，图 1 结论：$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD$；

图 2 斜交母子字型条件：$\angle C = \angle ABD$，图 2 结论：$\triangle ABC \backsim \triangle ABD$；

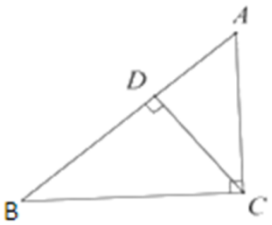


图 1

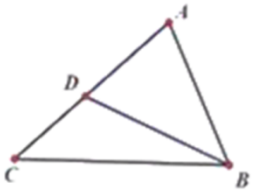


图 2

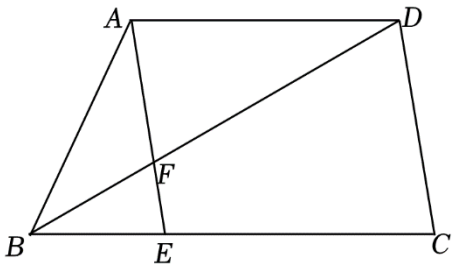
【题型专练】

题型一：8 字模型

1.（2023•普陀区一模）如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，E 是 BC 上一点，$AE \parallel CD$，AE、BD 相交于点 F，EF：CD＝1：3．

（1）求$\frac{BE}{AD}$的值；

（2）联结 FC，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{FE}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{BF}$＝____，$\overrightarrow{FC}$＝____．（用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示）



【分析】（1）根据题意可证明四边形 $AECD$ 为平行四边形，得到 AE＝CD，则 EF：AE＝1：3，EF：AF＝1：2，易证明△BEF∽△DAF，由相似三角形的性质即可求解；

（2）由 AF＝2EF 得 $\overrightarrow{AF}=2\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=3\vec{b}$，由三角形法则求出 $\overrightarrow{BF}$和 $\overrightarrow{BE}$，再求出 $\overrightarrow{BC}$，最后利用三角形法则即可求出 $\overrightarrow{FC}$．

【解答】解：∵$AD \parallel BC$，$AE \parallel CD$，

∴四边形 $AECD$ 为平行四边形，

∴AE＝CD，

∵EF：CD＝1：3，

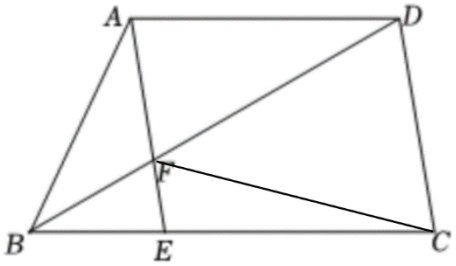
∴EF：AE＝1：3，EF：AF＝1：2，

∵$AD∥BC$，

∴△BEF∽△DAF，

∴$\frac{BE}{AD}=\frac{EF}{AF}=\frac{1}{2}$；

（2）联结 FC，如图，



由（1）可得 $AF=2EF$，

∵$\overrightarrow{FE}=\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{AF}=2\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=3\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=2\vec{b}-\vec{a}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=3\vec{b}-\vec{a}$，

∵$\frac{BE}{AD}=\frac{1}{2}$，$AD=EC$，

∴$\overrightarrow{EC}=2(3\vec{b}-\vec{a})=6\vec{b}-2\vec{a}$，

∴$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=3\vec{b}-\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{a}=9\vec{b}-3\vec{a}$，

∴$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BF}=9\vec{b}-3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{a}=7\vec{b}-2\vec{a}$.

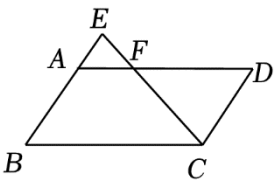
故答案为：$2\vec{b}-\vec{a}$，$7\vec{b}-2\vec{a}$.

【点评】本题主要考查平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、平面向量，熟练三角形法则是解题关键.

2.（2023•青浦区一模）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 在边 AD 上，射线 BA、CF 相交于点 E，$DF=2AF$.

（1）求 EA：AB 的值；

（2）如果 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CF}$.



【分析】（1）根据平行四边形的性质可得 $AB∥CD$，$AB=CD$，易证$△AEF∽△DCF$，则$\frac{AE}{CD}=\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{AB}$，由 $DF=2AF$ 即可求解；

（2）先算出$\frac{DF}{AD}=\frac{DF}{BC}=\frac{2}{3}$，再根据$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$即可求解．

【解答】解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB∥CD$，$AB=CD$，

∴$△AEF∽△DCF$，

∴$\frac{AE}{CD}=\frac{AF}{FD}$，

∴$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{FD}$，

∵$DF=2AF$，

∴$\frac{AF}{DF}=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{EA}{AB}=\frac{1}{2}$；

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD∥BC$，$AD=BC$，

∵$DF=2AF$，

∴$\frac{DF}{AD}=\frac{DF}{BC}=\frac{2}{3}$，

∵$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{CD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DF}=-\frac{2}{3}\vec{b}$，

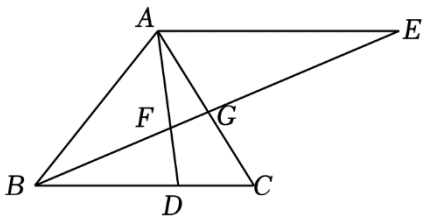
∴$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$．

【点评】本题主要考查相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质、平面向量，熟练掌握平面向量的运算法则是解题关键．

3．（2022 秋•金山区校级期末）已知：如图，在$△ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$AE∥BC$，BE 与 AD、AC 分别相交于点 F、G，$AF^2=FG•FE$．

（1）求证：$△CAD∽△CBG$；

（2）联结 DG，求证：$DG•AE=AB•AG$．



【分析】（1）通过证明△FAG∽△FEA，可得∠FAG＝∠E，由平行线的性质可得∠E＝∠EBC＝∠FAG，且∠ACD＝∠BCG，可证△CAD∽△CBG；

（2）由相似三角形的性质可得 $\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CG}$，且∠$DCG$＝∠$ACB$，可证△$CDG$∽△$CAB$，可得 $\frac{DG}{AB}=\frac{CG}{CB}$，由平行线分线段成比例可得 $\frac{AE}{CB}=\frac{AG}{CG}$，可得结论．

【解答】证明：（1）∵AF^2＝$FG\cdot FE$．

∴$\frac{AF}{FG}=\frac{EF}{AF}$，

∵∠AFG＝∠EFA，

∴△FAG∽△FEA，

∴∠FAG＝∠E，

∵AE∥BC，

∴∠E＝∠EBC，

∴∠EBC＝∠FAG，

∵∠ACD＝∠BCG，

∴△CAD∽△CBG；

（2）∵△CAD∽△CBG，

∴$\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CG}$，

∵∠DCG＝∠ACB，

∴△CDG∽△CAB，

∴$\frac{DG}{AB}=\frac{CG}{CB}$，

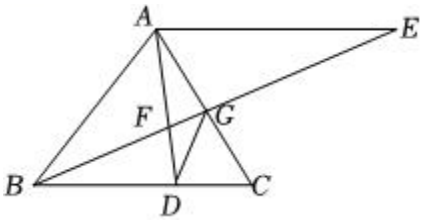
∵AE∥BC，

∴$\frac{AE}{BC}=\frac{AG}{GC}$，

∴$\frac{AG}{AE}=\frac{GC}{BC}$，

∴$\frac{DG}{AB}=\frac{AG}{AE}$，

∴$DG•AE=AB•AG$.

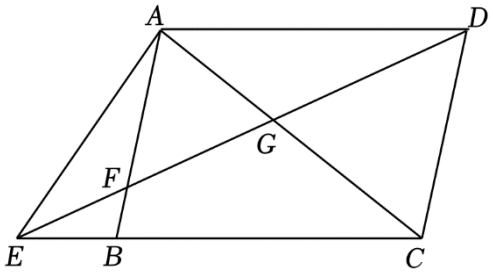


【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，属于中考常考题型.

4.（2022 秋•奉贤区期中）如图，已知在四边形 $ABCD$ 中，$AD∥BC$．E 为边 CB 延长线上一点，联结 DE 交边 AB 于点 F，联结 AC 交 DE 于点 G，且$\frac{FG}{DG}=\frac{AD}{CE}$.

（1）求证：$AB∥CD$；

（2）如果 $AE^2=AG•AC$，求证：$\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{AD}$.



【分析】（1）由 $AD∥BC$，得到△ADG∽△CEG，根据相似三角形的性质即可得到结论；

（2）由 $AE^2=AG•AC$ 易得△AEG∽△ACE，所以∠AEG=∠ACE=∠DAG，可得△ADG∽△EDA，再根据相似三角形的性质可得结论.

【解答】证明：（1）∵$AD∥BC$，

∴△ADG∽△CEG，

∴$\frac{AD}{CE}=\frac{AG}{CG}$，

∵$\frac{FG}{DG}=\frac{AD}{CE}$，

∴$\frac{AG}{CG}=\frac{FG}{DG}$，

∴$AB∥CD$；

（2）∵$AE^2=AG•AC$，

∴$\frac{AE}{AG}=\frac{AC}{AE}$，

∵∠EAG=∠CAE，

∴△AEG∽△ACE，

∴∠AEG=∠ACE，

∵AD∥BC，

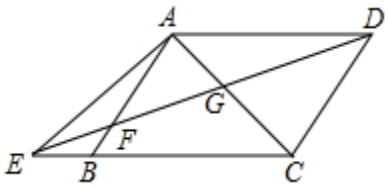
∴∠ACE=∠DAG，

∴∠DAG=∠AEG，

∵∠ADG=∠EDA，

∴△ADG∽△EDA，

∴$\frac{AD}{DE}=\frac{AG}{AE}$，即$\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{AD}$.

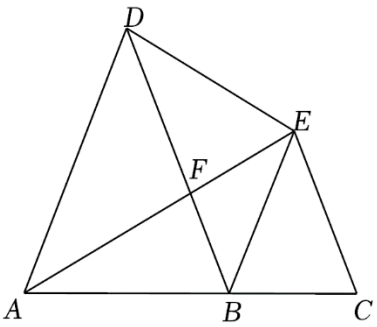


【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

5.（2022•松江区二模）已知：如图，两个△DAB和△EBC中，DA=DB，EB=EC，∠ADB=∠BEC，且点A、B、C在一条直线上，联结AE、ED，AE与BD交于点F.

（1）求证：$\frac{DF}{BF}=\frac{AB}{BC}$；

（2）如果BE^2=BF•BD，求证：DF=BE.



【分析】（1）根据已知易证△DAB∽△EBC，然后利用相似三角形的性质可得∠DAB=∠EBC，$\frac{DA}{EB}=\frac{AB}{BC}$，从而可得$AD$∥$EB$，进而证明8字模型相似三角形△$ADF$∽△$EBF$，最后利用相似三角形的性质可得$\frac{AD}{EB}=\frac{DF}{BF}$，即可解答；

（2）根据已知易证△BFE∽△BED，从而利用相似三角形的性质可得∠BEF=∠BDE，进而可得∠DAF=∠BDE，然后利用（1）的结论可证△ADF≌△DBE，再利用全等三角形的性质即可解答.

【解答】证明：（1）∵$DA=DB$，$EB=EC$，

∴$\frac{DA}{EB}=\frac{DB}{EC}$，

∵$\angle ADB=\angle BEC$，

∴$\triangle DAB\backsim\triangle EBC$，

∴$\angle DAB=\angle EBC$，$\frac{DA}{EB}=\frac{AB}{BC}$，

∴$AD\parallel EB$，

∴$\angle DAF=\angle AEB$，$\angle ADF=\angle DBE$，

∴$\triangle ADF\backsim\triangle EBF$，

∴$\frac{AD}{EB}=\frac{DF}{BF}$，

∴$\frac{DF}{BF}=\frac{AB}{BC}$；

（2）∵$BE^2=BF\cdot BD$，

∴$\frac{BE}{BF}=\frac{BD}{BE}$，

∵$\angle DBE=\angle EBF$，

∴$\triangle BFE\backsim\triangle BED$，

∴$\angle BEF=\angle BDE$，

∵$\angle DAF=\angle AEB$，

∴$\angle DAF=\angle BDE$，

∵$\angle ADF=\angle DBE$，$AD=DB$，

∴$\triangle ADF\cong\triangle DBE$（$ASA$），

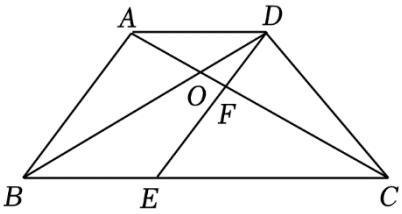
∴$DF=BE$.

【点评】本题考查了全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握全等三角形的判定与性质，以及相似三角形的判定与性质是解题的关键.

6.（2023•宝山区二模）如图，四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，AC、BD交于点O，$OB=OC$.

（1）求证：$AB=CD$；

（2）E是边BC上一点，联结DE交AC于点F，如果$AO^2=OF\cdot OC$，求证：四边形$ABED$是平行四边形.



【分析】（1）由等腰三角形的性质和判定及平行线的性质，说明△*AOB* 和△*DOC* 全等，利用全等三角形的性质得结论；

（2）先说明△*AOB*∽△*FOD*，再说明 *AB*∥*DE*，结合已知由平行四边形的判定可得结论．

【解答】证明：（1）∵*OB*＝*OC*，

∴∠*DBC*＝∠*ACB*．

∵*AD*∥*BC*，

∴∠*DAC*＝∠*ACB*，∠*ADB*＝∠*DBC*．

∴∠*DAC*＝∠*ADB*．

∴*OA*＝*DO*．

在△*AOB* 和△*DOC* 中，

$$\begin{cases} OA=DO \\ \angle AOB=\angle DOC, \\ OB=OC \end{cases}$$

∴△*AOB*≌△*DOC*（*SAS*）．

∴*AB*＝*CD*．

（2）∵AO^2＝*OF*•*OC*，*OA*＝*OD*，*OC*＝*OB*，

∴*AO*•*OD*＝*OF*•*OB*，即$\frac{OA}{OB}=\frac{OF}{OD}$．

∵∠*AOB*＝∠*DOC*，

∴△*AOB*∽△*FOD*．

∴∠*BAO*＝∠*DFO*．

∴*AB*∥*DE*．

又∵*AD*∥*BC*，

∴四边形 *ABED* 是平行四边形．

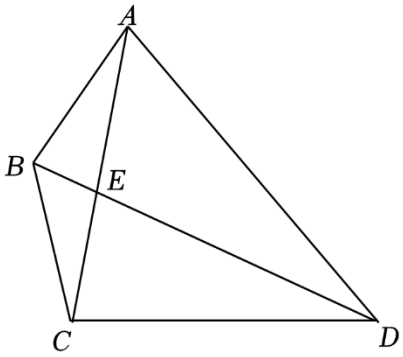
【点评】本题主要考查了三角形全等和相似，掌握全等三角形的性质和判定、相似三角形的判定和性质、平行线的性质、等腰三角形的判定和性质及平行四边形的判定是解决本题的关键．

7．（2022 秋•徐汇区期中）如图，在四边形 *ABCD* 中，对角线 *AC* 与 *BD* 交于点 *E*，*DB* 平分∠*ADC*，且 AB^2

$=BE\cdot BD$.

（1）求证：$\triangle ABE\backsim\triangle DCE$；

（2）$AE\cdot CD=BC\cdot ED$.



【分析】（1）根据相似三角形的判定可得$\triangle ABE\backsim\triangle DBA$；所以$\angle BAC=\angle BDC$，由此可得出$\triangle ABE\backsim\triangle DCE$；

（2）由（1）中的相似可得出$AE:DE=BE:CE$，再由$\angle BEC=\angle AED$可得$\triangle ADE\backsim\triangle BCE$，所以$\angle EAD=\angle EBC$，$\angle ADE=\angle BDC=\angle BCE$，可得$\triangle BCD\backsim\triangle ADE$，进而可得结论.

【解答】证明：（1）$\because AB^2=BE\cdot BD$，

$\therefore AB:BE=BD:AB$，

$\because\angle ABE=\angle DBA$，

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle DBA$，

$\therefore\angle BAC=\angle BDC$，

$\because BD$平分$\angle ADC$，

$\therefore\angle ADB=\angle BDC=\angle BAC$，

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle DCE$；

（2）由（1）中相似可得，$AE:DE=BE:CE$，

$\because\angle BEC=\angle AED$，

$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle BCE$，

$\therefore\angle EAD=\angle EBC$，$\angle ADE=\angle BDC=\angle BCE$，

$\therefore\triangle BCD\backsim\triangle AED$，

$\therefore BC:AE=CD:ED$，

$AE\cdot CD=BC\cdot ED$.

【点评】本题主要考查相似三角形的性质与安定，涉及A字型相似，8字型相似等相关内容，熟练掌握

相关判定是解题关键.

8.（2022 春•杨浦区校级期中）如图 1，在△ABC 中，点 E 在 AC 的延长线上，且∠E＝∠ABC.

（1）求证：$AB^2=AC\cdot AE$；

（2）如图 2，D 在 BC 上且 $BD=3CD$，延长 AD 交 BE 于 F，若$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{2}$，求$\frac{CD}{EF}$的值.

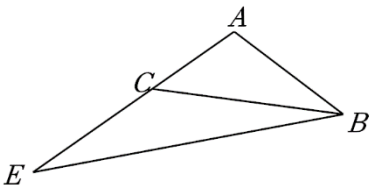


图1

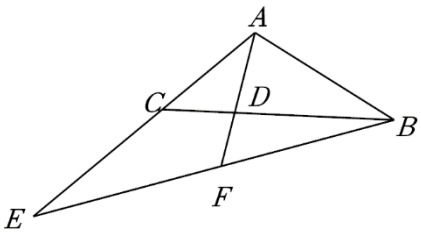


图2

【分析】（1）利用两角相等的两个三角形相似，证明△ABC∽△AEB，然后利用相似三角形的性质即可解答；

（2）过点 E 作 EH∥CB，交 AF 的延长线于点 H，利用（1）的结论可得$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{EB}=\frac{2}{3}$，先 AC＝$2a$，AB＝$3a$，从而求出 AE 的长，进而求出$\frac{AC}{AE}$的值，再根据已知设 CD＝m，BD＝$3m$，从而求出 BC，BE 的长，然后证明 A 字模型相似三角形△ACD∽△AEH，利用相似三角形的性质可得 EH＝$\frac{9}{4}m$，再证明 8 字模型相似三角形△BDF∽△EHF，利用相似三角形的性质可得$\frac{BF}{EF}=\frac{4}{3}$，从而求出 EF 的长，进行计算即可解答.

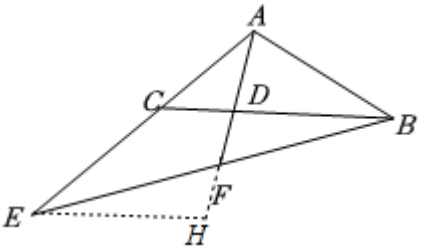
【解答】（1）证明：∵∠E＝∠ABC，∠A＝∠A，

∴△ABC∽△AEB，

∴$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AB}$，

∴$AB^2=AC\cdot AE$；

（2）解：过点 E 作 EH∥CB，交 AF 的延长线于点 H，



∵△ABC∽△AEB，

∴$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{EB}=\frac{2}{3}$，

∴设 $AC=2a$，$AB=3a$，

∴$\frac{3a}{AE}=\frac{2}{3}$，

∴$AE=\frac{9}{2}a$，

∴$\frac{AC}{AE}=\frac{2a}{\frac{9}{2}a}=\frac{4}{9}$，

∵$BD=3CD$，

∴设 $CD=m$，则 $BD=3m$，

∴$BC=CD+BD=4m$，

∴$\frac{4m}{EB}=\frac{2}{3}$，

∴$EB=6m$，

∵$EH\parallel CD$，

∴$\angle ACD=\angle AEH$，$\angle ADC=\angle AHE$，

∴$\triangle ACD\backsim\triangle AEH$，

∴$\frac{AC}{AE}=\frac{CD}{EH}=\frac{4}{9}$，

∴$EH=\frac{9}{4}m$，

∵$EH\parallel BD$，

∴$\angle BDF=\angle DHE$，$\angle DBF=\angle FEH$，

∴$\triangle BDF\backsim\triangle EHF$，

∴$\frac{BF}{EF}=\frac{BD}{EH}=\frac{3m}{\frac{9}{4}m}=\frac{4}{3}$，

∴$EF=\frac{3}{7}BE=\frac{18}{7}m$，

∴$\frac{CD}{EF}=\frac{m}{\frac{18}{7}m}=\frac{7}{18}$，

∴$\frac{CD}{EF}$的值为$\frac{7}{18}$.

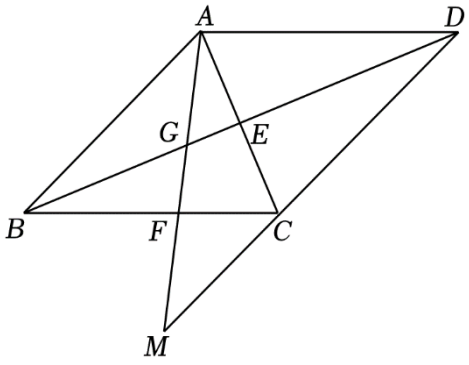
【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，平行线分线段成比例，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

9.（2023•崇明区二模）已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 交于 E，M 是边 DC 延长线

上的一点，联结 AM，与边 BC 交于 F，与对角线 BD 交于点 G.

（1）求证：$AG^2=GF\cdot GM$；

（2）联结 CG，如果$\angle BAG=\angle BCG$，求证：平行四边形 $ABCD$ 是菱形.



【分析】（1）由平行线的性质和相似三角形的平行判定法，可得到$\triangle ABG\backsim\triangle MDG$、$\triangle ADG\backsim\triangle FBG$，再利用相似三角形的性质得结论；

（2）利用“两角对应相等”先说明$\triangle GCF\backsim\triangle GMC$，再利用等腰三角形的三线合一说明 $BD\perp AC$，最后利用菱形的判定方法得结论.

【解答】证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel DM$，$AD\parallel BC$.

∴$\triangle ABG\backsim\triangle MDG$，$\triangle ADG\backsim\triangle FBG$.

∴$\frac{AG}{GM}=\frac{BG}{DG}$，$\frac{GF}{AG}=\frac{BG}{DG}$.

∴$\frac{AG}{GM}=\frac{GF}{AG}$.

∴$AG^2=GF\cdot GM$.

（2）∵$AB\parallel DM$，

∴$\angle BAG=\angle M$.

∵$\angle BAG=\angle BCG$，

∴$\angle M=\angle BCG$.

∵$\angle MGC=\angle FGC$，

∴$\triangle GCF\backsim\triangle GMC$.

∴$\frac{CG}{GM}=\frac{GF}{CG}$，即 $CG^2=GF\cdot GM$.

∵$AG^2=GF\cdot GM$，

∴$CG^2=AG^2$.

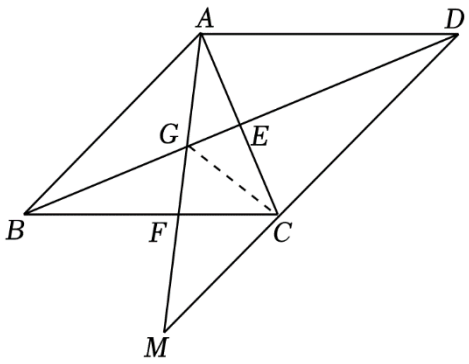
∴$CG=AG$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AE=CE$.

∴$GE\perp AC$，即 $BD\perp AC$.

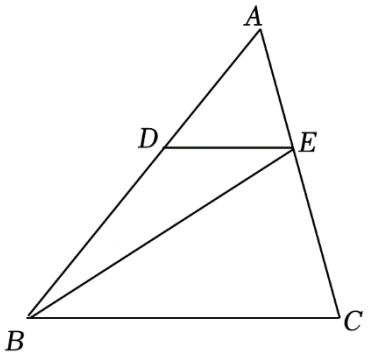
∴平行四边形 $ABCD$ 是菱形.



【点评】本题主要考查了相似三角形的性质和判定，掌握相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质、菱形的判定方法、等腰三角形的判定和性质等知识点是解决本题的关键.

题型二：A 字模型

10.（2022 秋•杨浦区期中）如图，点 D、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上，$DE\parallel BC$．如果 $S_{\triangle ADE}=2$，$S_{\triangle BCE}=7.5$．求 $S_{\triangle BDE}$.



【分析】设 $S_{\triangle BDE}=x$，则可得出△ABE△BCE 的面积之比，再将 x 的值代入即可得出答案；

【解答】解：（1）设 $S_{\triangle BDE}=x$.

∴$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}}=\frac{AD}{DB}$,

∴$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{AE}{EC}$.

∵$DE\parallel BC$,

∴$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$，

∵$S_{△ADE}=2$，$S_{△BCE}=7.5$，

∴$\frac{2}{x}=\frac{2+x}{7.5}$，

解得：$x_1=-5$（舍），$x_2=3$．

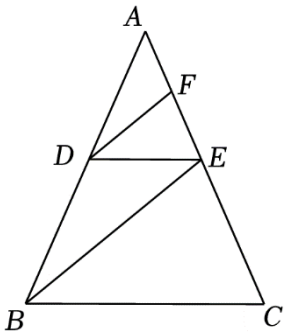
∴$S_{△BDE}=3$．

【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理以及分式方程的应用，难度较大．

11．（2022 秋•奉贤区期中）如图，在△ABC 中，点 D 在边 AB 上，点 F、E 在边 AC 上，且 $DF∥BE$，$\frac{AF}{AE}=\frac{AE}{AC}$．

（1）求证：$DE∥BC$；

（2）如果$\frac{AF}{FE}=\frac{3}{2}$，$S_{△ABC}=12$，求 $S_{△ADE}$ 的值．



【分析】（1）由 $DF∥BE$ 得比例，结合已知比例，利用过渡比得出 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{CE}$，证明结论；

（2）首先可以证明$\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}$，然后证明△$ADE$∽△$ABC$，最后利用相似三角形的面积比等于相似比的平方求解．

【解答】（1）证明：∵$DF∥BE$，

∴$\frac{AD}{DB}=\frac{AF}{EF}$，

∵$\frac{AF}{EF}=\frac{AE}{CE}$，

∴$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{CE}$，

∴$DE∥BC$；

（2）解：∵$\frac{AF}{FE}=\frac{3}{2}$，

∴$\frac{AE}{CE}=\frac{3}{2}$，

∴$\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}$,

∵$DE\parallel BC$,

∴△$ADE\backsim$△ABC,

∴$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{AE}{AC})^2=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$,

∵$S_{\triangle ABC}=12$,

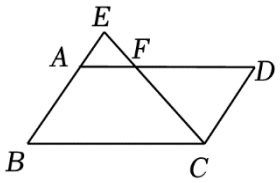
∴$S_{\triangle ADE}=\frac{108}{25}$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，平行线的性质，平行线分线段成比例．关键是利用平行线得出相似三角形及比例，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方解题．

12．（2023•青浦区一模）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 在边 AD 上，射线 BA、CF 相交于点 E，$DF=2AF$.

（1）求 EA：AB 的值；

（2）如果$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，试用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{CF}$.



【分析】（1）根据平行四边形的性质可得 $AB\parallel CD$，$AB=CD$，易证△$AEF\backsim$△DCF，则$\frac{AE}{CD}=\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{AB}$，由 $DF=2AF$ 即可求解；

（2）先算出$\frac{DF}{AD}=\frac{DF}{BC}=\frac{2}{3}$，再根据$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$即可求解．

【解答】解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$，

∴△$AEF\backsim$△DCF，

∴$\frac{AE}{CD}=\frac{AF}{FD}$，

∴$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{FD}$，

∵$DF=2AF$，

∴$\frac{AF}{DF}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{EA}{AB}=\frac{1}{2}$;

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD// BC$，$AD=BC$，

∵$DF=2AF$，

$\therefore \frac{DF}{AD}=\frac{DF}{BC}=\frac{2}{3}$，

$\because \overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DF}=-\frac{2}{3}\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

【点评】本题主要考查相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质、平面向量，熟练掌握平面向量的运算法则是解题关键.

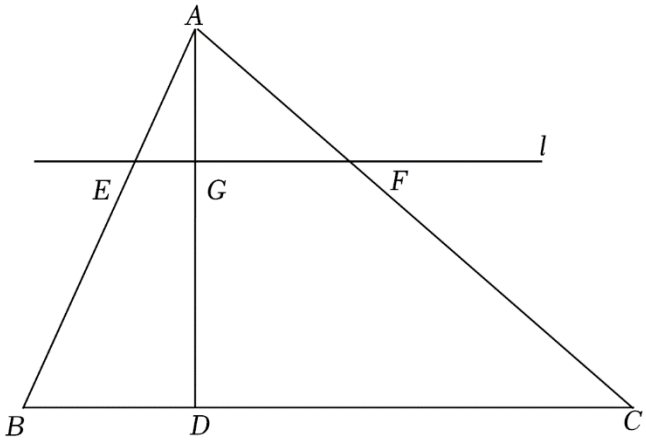
13.（2021 秋•普陀区期末）如图，在△ABC 中，边 BC 上的高 $AD=2$，$\tan B=2$，直线 l 平行于 BC，分别交线段 AB，AC，AD 于点 E、F、G，直线 l 与直线 BC 之间的距离为 m.

（1）当 $EF=CD=3$ 时，求 m 的值；

（2）将△AEF 沿着 EF 翻折，点 A 落在两平行直线 l 与 BC 之间的点 P 处，延长 EP 交线段 CD 于点 Q.

①当点 P 恰好为△ABC 的重心时，求此时 CQ 的长；

②联结 BP，在∠CBP＞∠BAD 的条件下，如果△BPQ 与△AEF 相似，试用 m 的代数式表示线段 CD 的长.



【分析】（1）根据$\frac{AD}{BD}=\tan B=2$，可得：$BD=1$，再由 $EF=CD=3$，$DG=m$，可得：$BC=4$，$AG=2-m$，利用 $EF// BC$，可得$\frac{EF}{BC}=\frac{AG}{AD}$，建立方程求解即可；

（2）①由翻折可得：$BD=CD=1$，$AP=2PD$，即 $PD=\frac{1}{3}AD=\frac{2}{3}$，$AP=\frac{2}{3}AD=\frac{4}{3}$，进而得出：$AG=\frac{2}{3}$，推出 $DP=GP$，再由 $EF/\!/BC$，可得出 $EG=\frac{1}{3}$，利用 ASA 证明$\triangle PQD\cong\triangle PEG$，即可求得答案；

②分两种情况：Ⅰ．当$\triangle BPQ\backsim\triangle FAE$ 时，由$\triangle FAE\backsim\triangle CAB$，推出$\triangle BPQ\backsim\triangle CAB$，建立方程求解即可；Ⅱ．当$\triangle BPQ\backsim\triangle AFE$ 时，由$\triangle AFE\backsim\triangle ACB$，推出$\triangle BPQ\backsim\triangle ACB$，建立方程求解即可．

【解答】解：（1）如图 1，在$\triangle ABC$ 中，边 BC 上的高 $AD=2$，$\tan B=2$，

$\therefore\frac{AD}{BD}=\tan B=2$，

$\therefore BD=1$，

$\because EF=CD=3$，$DG=m$，

$\therefore BC=BD+CD=4$，$AG=AD-DG=2-m$，

$\because EF/\!/BC$，

$\therefore\frac{EF}{BC}=\frac{AG}{AD}$，即$\frac{3}{4}=\frac{2-m}{2}$，

解得：$m=\frac{1}{2}$，

$\therefore m$ 的值为$\frac{1}{2}$；

（2）①如图 2，$\because$将$\triangle AEF$ 沿着 EF 翻折，点 A 落在$\triangle ABC$ 的重心点 P 处，

$\therefore BD=CD=1$，$AP=2PD$，即 $PD=\frac{1}{3}AD=\frac{2}{3}$，$AP=\frac{2}{3}AD=\frac{4}{3}$，

$\therefore AG=GP=\frac{1}{2}AP=\frac{2}{3}$，

$\therefore DP=GP$，

$\because EF/\!/BC$，

$\therefore\angle PGE=\angle PDQ=90^\circ$，$\triangle AEG\backsim\triangle ABD$，

$\therefore\frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AD}$，即$\frac{EG}{1}=\frac{\frac{2}{3}}{2}$，

$\therefore EG=\frac{1}{3}$，

在$\triangle PQD$ 和$\triangle PEG$ 中，

$$\begin{cases}\angle QPD=\angle EPG\\ DP=GP\\ \angle PDQ=\angle PGE\end{cases}$$

$\therefore\triangle PQD\cong\triangle PEG$（$ASA$），

∴$DQ=EG=\frac{1}{3}$，

∴$CQ=CD-DQ=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

∴此时 CQ 的长为$\frac{2}{3}$；

②在 Rt△ABD 中，$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{5}$，

∵将△AEF 沿着 EF 翻折，点 A 落在两平行直线 l 与 BC 之间的点 P 处，

∴$\angle PBQ<\angle ABD$，

∵$EF/\!/BC$，

∴$\angle AEF=\angle ABD$，

∴$\angle PBQ<\angle AEF$，

∵$\angle CBP>\angle BAD$，

∴$\angle BAD<\angle PBQ<\angle AEF$，

∵$GP=AG=2-m$，$DG=m$，

∴$DP=DG-GP=m-（2-m）=2m-2$，

∴$m>1$，

∴$1<m<2$，

∵$\angle AEF=\angle ABD$，

∴$\frac{AG}{EG}=\tan\angle AEF=\tan\angle ABD=2$，

∴$\frac{2-m}{EG}=2$，

∴$EG=\frac{2-m}{2}$，

∵$EF/\!/BC$，

∴△$PEG\backsim$△PQD，

∴$\frac{DQ}{EG}=\frac{DP}{GP}$，即$\frac{DQ}{\frac{2-m}{2}}=\frac{2m-2}{2-m}$，

∴$DQ=m-1$，

∴$BQ=BD+DQ=m$，

∵$\angle AEF=\angle PEG=\angle BQP$，$\angle PBQ<\angle AEF$，

∴△BPQ 与△AEF 相似，则△$BPQ\backsim$△FAE 或△$BPQ\backsim$△AFE，

Ⅰ．当$\triangle BPQ\backsim\triangle FAE$时，

$\because\triangle FAE\backsim\triangle CAB$，

$\therefore\triangle BPQ\backsim\triangle CAB$，

$\therefore\frac{BQ}{PQ}=\frac{BC}{AB}$，即$\frac{m}{\sqrt{5}(m-1)}=\frac{BC}{\sqrt{5}}$，

$\therefore BC=\frac{m}{m-1}$，

$\therefore CD=BC-BD=\frac{m}{m-1}-1=\frac{1}{m-1}$；

Ⅱ．当$\triangle BPQ\backsim\triangle AFE$时，

$\because\triangle AFE\backsim\triangle ACB$，

$\therefore\triangle BPQ\backsim\triangle ACB$，

$\therefore\frac{PQ}{BQ}=\frac{BC}{AB}$，即$\frac{\sqrt{5}(m-1)}{m}=\frac{BC}{\sqrt{5}}$，

$\therefore BC=\frac{5(m-1)}{m}$，

$\therefore CD=BC-BD=\frac{5(m-1)}{m}-1=\frac{4m-5}{m}$，

综上，线段CD的长为$\frac{1}{m-1}$或$\frac{4m-5}{m}$.

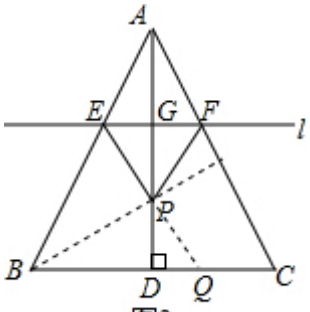


图2

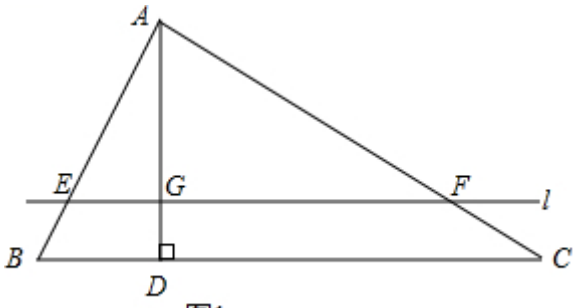


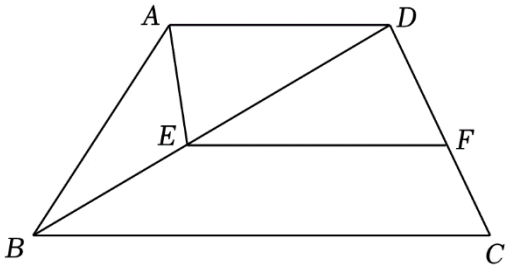
图1

【点评】本题考查了全等三角形判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，三角函数，翻转变换的性质等，熟练掌握全等三角形判定和性质、相似三角形的判定和性质等相关知识，运用分类讨论思想和方程思想思考解决问题是解题关键.

14．（2023•奉贤区一模）已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD∥BC$，点 E 在对角线 BD 上，$∠EAD=∠BDC$．

（1）求证：$AE•BD=AD•DC$；

（2）如果点 F 在边 DC 上，且 $\frac{DF}{DE}=\frac{AE}{AD}$，求证：$EF∥BC$．



【分析】（1）利用平行线的性质证明 $∠ADB=∠DBC$，然后利用已知条件可以证明 $△ADE∽△DBC$，由此即可解决问题；

（2）利用（1）的结论和已知条件可以证明 $△DEF∽△DBC$，接着利用相似三角形的在即可求解．

【解答】证明：（1）$∵AD∥BC$，

$∴∠ADB=∠DBC$，

又$∵∠EAD=∠BDC$，

$∴△ADE∽△DBC$，

$∴AE：AD=DC：BD$，

$∴AE•BD=AD•DC$；

（2）$∵AE：AD=DC：BD$，且 $\frac{DF}{DE}=\frac{AE}{AD}$，

$∴\frac{DC}{BD}=\frac{DF}{DE}$，

而 $∠EDF=∠BDC$，

$∴△DEF∽△DBC$，

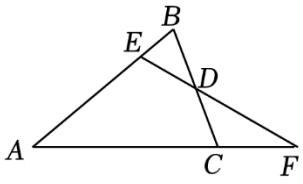
$∴∠DEF=∠DBC$，

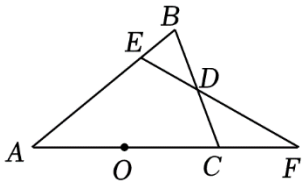
$∴EF∥BC$．

【点评】此题主要考查了相似三角形的性质与判定，同时也利用了平行线的性质，比例的基本性质，有一定的综合性．

题型三：一线三等角模型

15．（2023•金山区二模）如图，已知在 $△ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是边 BC 中点，在边 AB 上取一点 E，使得 $DE=DB$，延长 ED 交 AC 延长线于点 F．





（1）求证：$\angle A=\angle CDF$；

（2）设 AC 的中点为点 O，

①如果 CD 为经过 A、C、D 三点的圆的一条弦，当弦 CD 恰好是正十边形的一条边时，求 CF：AC 的值；

②⊙M 经过 C、D 两点，联结 OM、MF，当$\angle OFM=90°$，$AC=10$，$\tan A=\frac{3}{4}$时，求⊙M 的半径长．

【分析】（1）根据等边对等角可得$\angle B=\angle ACB=\angle DEB$，再利用三角形的内角和定理得到结论；

（2）①连接 AD，根据正十边形的中心角可得$\angle DOC=\frac{360°}{10}=36°$，推出$\triangle FDC\backsim\triangle FOD$，根据对应边成比例解题即可；

②由$\triangle FDC\backsim\triangle FOD$，得 $DF^2=CF\cdot OF$，过点 D 作 $DH\perp OC$ 于点 H，则 $DF^2=DH^2+HF^2$，等量代换得到 DF 的值，然后根据$\triangle HDC\backsim\triangle FOM$，求出 MF 的长，再利用勾股定理求出半径长即可．

相似三角形的判定和性质，勾股定理，等腰三角形的性质，中位线定理和正多边形，

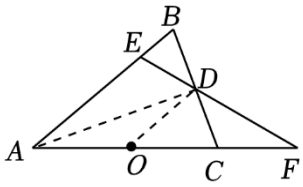
【解答】（1）证明：∵$AB=AC$，$DE=DB$，

∴$\angle B=\angle ACB=\angle DEB$，

∴$\angle A=180°-2\angle B$，$\angle BDE=\angle CDF=180°-2\angle B$，

∴$\angle A=\angle CDF$；

（2）①连接 AD，



∵D 是 BC 的中点，$AB=AC$，

∴$\angle ADC=90°$，

∴AC 为圆的直径，

连接 OD，设经过 A、C、D 三点的圆半径为 r，

弦 CD 恰好是正十边形的一条边，

∴$\angle DOC=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$，

∴$\angle OCD=\frac{180^\circ-\angle DOC}{2}=72^\circ$，

又∵O、D 是 AC、BC 的中点，

∴$OD\parallel AB$，$AC=2r$，

∴$\angle A=\angle CDF=\angle DOC=36^\circ$，

∴$\angle F=\angle OCD-\angle CDF=72^\circ-36^\circ=36^\circ$，

∴$FD=OD=OC=r$，

∵$\angle CDF=\angle DOF$，$\angle F=\angle F$，

∴$\triangle FDC\backsim\triangle FOD$，

则$\frac{DF}{OF}=\frac{CF}{FD}$，即$\frac{r}{r+CF}=\frac{CF}{r}$，

解得：$CF=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$或$CF=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}r$（舍），

∴$CF:AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r:2r=(\sqrt{5}-1):4$，

②∵$AC=10$，

∴$OC=OD=5$，

又∵$\tan A=\tan DOC=\frac{DH}{OH}=\frac{3}{4}$，

∴$DH=3$，$OH=4$，

∴$CH=OC-OH=5-4=1$，

设 $CF=a$，

由①可知$\angle A=\angle CDF=\angle DOC$，$\angle DFO=\angle DFO$，

∴$\triangle FDC\backsim\triangle FOD$，

∴$\frac{DF}{OF}=\frac{CF}{FD}$，

∴$DF^2=CF\cdot OF$，即 $DF^2=a(a+5)$，

如图，过点 D 作 $DH\perp OC$ 于点 H，

在 Rt$\triangle DHF$ 中，$DF^2=DH^2+HF^2=3^2+(a+1)^2$，

∴$a(a+5)=3^2+(a+1)^2$，

解得 $a=\frac{10}{3}$，

∴ $CF=\frac{10}{3}$，$OF=\frac{25}{3}$，

∵$OC=OD$，M 是 CD 所在圆的半径，

∴$OM\perp CD$，

又∵$\angle OFM=90°$，

∴$\angle OFM=\angle ONC=90°$，

∴$\angle OCD+\angle MOF=\angle OCD+\angle CDH=90°$，

∴$\angle MOF=\angle CDH$，

∴$\triangle HDC\backsim\triangle FOM$，

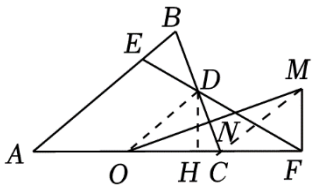
∴$\frac{MF}{CH}=\frac{OF}{DH}$，即$\frac{MF}{1}=\frac{\frac{25}{3}}{3}$，

解得：$MF=\frac{25}{9}$，

连接 CM，

∴ $CM=\sqrt{CF^2+MF^2}=\sqrt{(\frac{10}{3})^2+(\frac{25}{9})^2}=\frac{5}{9}\sqrt{61}$，

∴⊙M 的半径长为$\frac{5}{9}\sqrt{61}$.



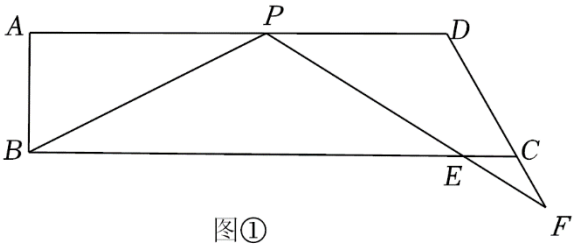
【点评】本题考查相似三角形的判定和性质，勾股定理，等腰三角形的性质，中位线定理和正多边形，综合性较强，是压轴题，解题的关键是作辅助线构造三角形相似.

16.（2022•静安区二模）如图①，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=90°$，$AB=\sqrt{3}$，$AD=6$，$BC=7$，点 P 是边 AD 上的动点，联结 BP，作$\angle BPF=\angle ADC$，设射线 PF 交线段 BC 于 E，交射线 DC 于 F.

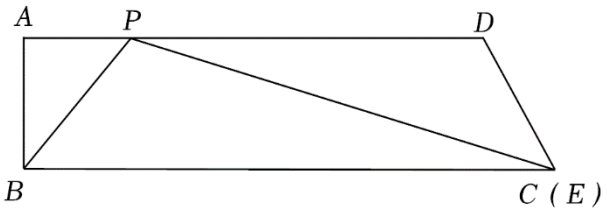
（1）求$\angle ADC$ 的度数；

（2）如果射线 PF 经过点 C（即点 E、F 与点 C 重合，如图②所示），求 AP 的长；

（3）设 $AP=x$，$DF=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.



图①



图②

【分析】（1）如图①，过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle DHB=\angle DHC=90°$，再证四边形 $ABHD$ 是矩形，利用三角函数可得 $\angle CDH=30°$，即可求得答案；

（2）设 $AP=x$，则 $PD=6-x$，可证 $\triangle DPC\backsim\triangle PCB$，求得：$PC=\sqrt{42-7x}$，$BP=\dfrac{14}{\sqrt{42-72}}$，利用勾股定理建立方程求解即可得出答案；

（3）如图③，在 AD 上取点 G，连接 AG，使 $\angle ABG=30°$，则 $\angle AGB=60°$，可证 $\triangle BPG\backsim\triangle PFD$，即可求得答案.

【解答】解：（1）如图①，过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle DHB=\angle DHC=90°$，

$\because AD\parallel BC$，$\angle A=90°$，

$\therefore\angle ABC=180°-\angle A=180°-90°=90°$，

$\therefore\angle A=\angle ABC=\angle DHB=90°$，

$\therefore$四边形 $ABHD$ 是矩形，

$\therefore AD=BH=6$，$DH=AB=\sqrt{3}$，$\angle ADH=90°$，

$\therefore CH=BC-BH=7-6=1$，

$\therefore\tan\angle CDH=\dfrac{CH}{DH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\angle CDH=30°$，

$\therefore\angle ADC=\angle ADH+\angle CDH=90°+30°=120°$；

（2）设 $AP=x$，则 $PD=6-x$，

在图①Rt$\triangle CDH$ 中，$CD=\dfrac{CH}{\sin\angle CDH}=\dfrac{1}{\sin30°}=2$，

如图②$\because\angle BPC=\angle D=120°$，$AD\parallel BC$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/057141166132006134