

江苏省无锡市江阴市南菁高中 2024 届高三第二次模拟考试数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若向量 $\vec{a} = (1, 5), \vec{b} = (-2, 1)$ ，则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$ ()

- A. 30 B. 31 C. 32 D. 33

2. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ ，要得到函数 $g(x) = \cos x$ 的图象，只需将 $y = f(x)$ 的图象()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ，则“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”的 ()

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

4. 抛物线 $\square_1: \square^2 = 2\square\square$ 的焦点 $\square$ 是双曲线 $\square_2: \frac{\square^2}{\square} - \frac{\square^2}{1-\square} = 1 (0 < \square < 1)$ 的右焦点，点 $\square$ 是曲线 $\square_1, \square_2$ 的交点，点 $\square$ 在抛物

线的准线上， $\square\square\square\square$ 是以点 $\square$ 为直角顶点的等腰直角三角形，则双曲线 $\square_2$ 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2} + 1$ B. $2\sqrt{2} + 3$ C. $2\sqrt{10} - 3$ D. $2\sqrt{10} + 3$

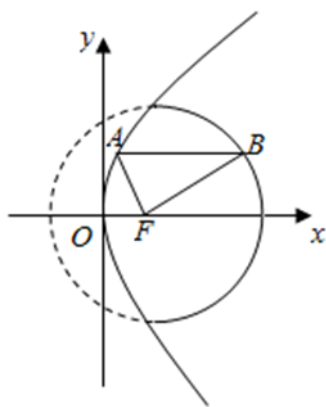
5. 已知 F 是双曲线 $C: kx^2 + y^2 = 4|k|$ (k 为常数) 的一个焦点，则点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 ()

- A. $2k$ B. $4k$ C. 4 D. 2

6. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a \tan B = 2b \sin(B + C)$ ，则角 B 的大小为()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

7. 如图所示点 F 是抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点，点 A, B 分别在抛物线 $y^2 = 8x$ 及圆 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ 的实线部分上运动，且 AB 总是平行于 x 轴，则 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围是 ()



- A. (6,10) B. (8,12) C. [6,8] D. [8,12]

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 30^\circ$, $\cos A = -\frac{2}{3}$, $AC = \sqrt{15} - 2$, 则 AC 边上的高为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

9. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, A, B 是 C 的左、右顶点, 点 P 在过 F_1 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的直线上, $\triangle PAB$ 为等腰三角形, $\angle ABP = 120^\circ$, 则 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq a \\ 5 - x, & x > a \end{cases} (a > 0)$, 若函数 $g(x) = f(x) - 4|x|$ 有三个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1) \cup [5, +\infty)$ B. $(0, \frac{6}{5}) \cup [5, +\infty)$
C. $(1, 5]$ D. $(\frac{6}{5}, 5]$

11. 设 $\alpha, \beta \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 则 " $\alpha = \beta$ " 是 " $\alpha\alpha\alpha\alpha = \beta\beta\beta\beta$ " 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 双曲线 $\frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > c)$ 的一条渐近线方程为 $x + 2y = 0$, 那么它的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 以 $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$ 为圆心的两圆均过 $(1, 0)$, 与 y 轴正半轴分别交于 $(0, y_1)$, $(0, y_2)$, 且满足 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$, 则点 (a_1, a_2) 的轨迹方程为_____.

14. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $AD=1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值为_____.

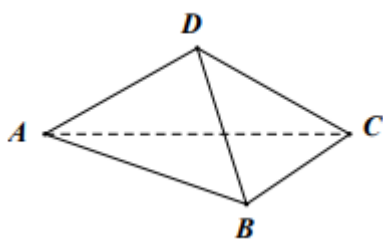


15. 已知集合 $A=\{1,4\}$, $B=\{a-5,7\}$. 若 $A \cap B = \{4\}$, 则实数 a 的值是_____.

16. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_n > 0$, $a_1=1$, 且 $2S_n = a_n(a_n+t)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $S_{10} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在四面体 $DABC$ 中, $AB \perp BC$, $DA = DC = DB$.



(1) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD ;

(2) 若 $\angle CAD = 30^\circ$, 二面角 $C-AB-D$ 为 60° , 求异面直线 AD 与 BC 所成角的余弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-2| + |2x+m|$, ($m \in \mathbb{R}$).

(1) 若 $m=4$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 6$;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq |2x-5|$ 在 $x \in [0, 2]$ 上有解, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 设 $f(x) = |x| - 2|x-a|$ ($a > 0$)

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

20. (12 分) 为迎接 2022 年冬奥会, 北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动, 并在培训结束后对学生进行了考核. 记 X 表示学生的考核成绩, 并规定 $X \geq 85$ 为考核优秀. 为了了解本次培训活动的效果, 在参加培训的学生中随机抽取了 30 名学生的考核成绩, 并作成如下茎叶图:

5	0	1	1	6					
6	0	1	3	3	4	5	8		
7	1	2	3	6	7	7	7	8	
8	1	1	2	4	5	9			
9	0	0	1	2	3				

(I) 从参加培训的学生中随机选取 1 人, 请根据图中数据, 估计这名学生考核优秀的概率;

(II) 从图中考核成绩满足 $X \in [80, 89]$ 的学生中任取 2 人, 求至少有一人考核优秀的概率;

(III) 记 $P(a \leq X \leq b)$ 表示学生的考核成绩在区间 $[a, b]$ 的概率, 根据以往培训数据, 规定当 $P\left(\left|\frac{x-85}{10}\right| \leq 1\right) \geq 0.5$ 时

培训有效. 请根据图中数据, 判断此次中学生冰雪培训活动是否有效, 并说明理由.

21. (12 分) 已知 $f(x) = |x-a| + |x+b| (a > 0, b > 0)$.

(I) 当 $a=b=1$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 8-x^2$;

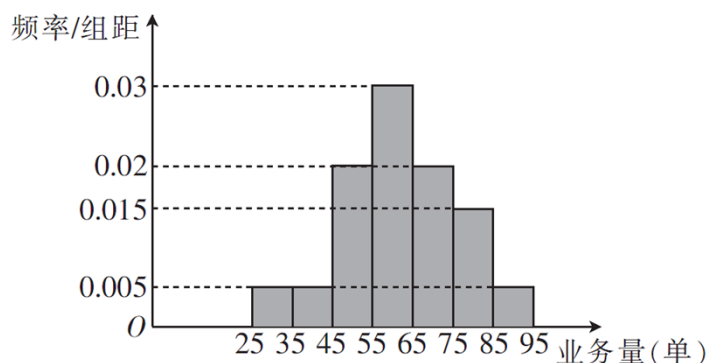
(II) 若 $f(x)$ 的最小值为 1, 求 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2b}$ 的最小值.

22. (10 分) 某大学开学期间, 该大学附近一家快餐店招聘外卖骑手, 该快餐店提供了两种日工资结算方案: 方案(a)

规定每日底薪 100 元, 外卖业务每完成一单提成 2 元; 方案(b) 规定每日底薪 150 元, 外卖业务的前 54 单没有提成,

从第 55 单开始, 每完成一单提成 5 元. 该快餐店记录了每天骑手的人均业务量, 现随机抽取 100 天的数据, 将样本数

据分为 $[25, 35), [35, 45), [45, 55), [55, 65), [65, 75), [75, 85), [85, 95]$ 七组, 整理得到如图所示的频率分布直方图.



(1) 随机选取一天, 估计这一天该快餐店的骑手的人均日外卖业务量不少于 65 单的概率;

(2) 从以往统计数据看, 新聘骑手选择日工资方案(a)的概率为 $\frac{1}{3}$, 选择方案(b)的概率为 $\frac{2}{3}$. 若甲、乙、丙、丁四名

骑手分别到该快餐店应聘, 四人选择日工资方案相互独立, 求至少有两名骑手选择方案(a)的概率,

(3) 若仅从人日均收入的角度考虑, 请你为新聘骑手做出日工资方案的选择, 并说明理由. (同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

先求出 $\vec{a} + 2\vec{b}$, 再与 $\vec{a}$ 相乘即可求出答案.

【详解】

因为 $\vec{a} + 2\vec{b} = (1, 5) + (-4, 2) = (-3, 7)$, 所以 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = -3 + 5 \times 7 = 32$.

故选:C.

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标运算,考查了学生的计算能力,属于基础题.

2、A

【解析】

根据函数图像平移原则, 即可容易求得结果.

【详解】

因为 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$,

故要得到 $g(x)$, 只需将 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度.

故选: A.

【点睛】

本题考查函数图像平移前后解析式的变化, 属基础题.

3、C

【解析】

试题分析: 根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

解: 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 > a_1$, 则 $d > 0$, 即数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列,

若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $a_2 > a_1$, 成立,

即“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”充分必要条件，

故选 C.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断.

4、A

【解析】

先由题和抛物线的性质求得点 P 的坐标和双曲线的半焦距 c 的值，再利用双曲线的定义可求得 a 的值，即可求得离心率.

【详解】

由题意知，抛物线焦点 $F(1,0)$ ，准线与 x 轴交点 $F'(-1,0)$ ，双曲线半焦距 $c=1$ ，设点 $P(-1, \sqrt{2}-1)$ 是以点 F' 为直角顶点的等腰直角三角形，即 $|PF'| = |F'F|$ ，结合 P 点在抛物线上，

所以 $PF' \perp$ 抛物线的准线，从而 $PF' \perp x$ 轴，所以 $P(-1,2)$ ，

$$\therefore 2a = |PF'| - |PF| = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\text{即 } a = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{故双曲线的离心率为 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

故选 A

【点睛】

本题考查了圆锥曲线综合，分析题目，画出图像，熟悉抛物线性质以及双曲线的定义是解题的关键，属于中档题.

5、D

【解析】

分析可得 $k < 0$ ，再去绝对值化简成标准形式，进而根据双曲线的性质求解即可.

【详解】

当 $k \geq 0$ 时，等式 $kx^2 + y^2 = 4|k|$ 不是双曲线的方程；当 $k < 0$ 时， $kx^2 + y^2 = 4|k| = -4k$ ，可化为 $\frac{y^2}{-4k} - \frac{x^2}{4} = 1$ ，可得虚

半轴长 $b=2$ ，所以点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 2.

故选：D

【点睛】

本题考查双曲线的方程与点到直线的距离.属于基础题.

6、A

【解析】

由正弦定理化简已知等式可得 $\sin A \tan B = 2 \sin B \sin A$ ，结合 $\sin A > 0$ ，可得 $\tan B = 2 \sin B$ ，结合范围 $B \in (0, \pi)$ ，可得 $\sin B > 0$ ，可得 $\cos B = \frac{1}{2}$ ，即可得解 B 的值.

【详解】

解：∵ $a \tan B = 2b \sin(B+C) = 2b \sin A$,

∴ 由正弦定理可得： $\sin A \tan B = 2 \sin B \sin A$,

∵ $\sin A > 0$,

∴ $\tan B = 2 \sin B$,

∵ $B \in (0, \pi)$, $\sin B > 0$,

∴ $\cos B = \frac{1}{2}$,

∴ $B = \frac{\pi}{3}$.

故选 A.

【点睛】

本题主要考查了正弦定理在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

7、B

【解析】

根据抛物线方程求得焦点坐标和准线方程，结合定义表示出 $|AF|$ ；根据抛物线与圆的位置关系和特点，求得 B 点横坐标的取值范围，即可由 $\triangle FAB$ 的周长求得其范围.

【详解】

抛物线 $y^2 = 8x$ ，则焦点 $F(2, 0)$ ，准线方程为 $x = -2$ ，

根据抛物线定义可得 $|AF| = x_A + 2$ ，

圆 $(x-2)^2 + y^2 = 16$ ，圆心为 $(2, 0)$ ，半径为 4，

点 A 、 B 分别在抛物线 $y^2 = 8x$ 及圆 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ 的实线部分上运动，解得交点横坐标为 2.

点 A 、 B 分别在两个曲线上， AB 总是平行于 x 轴，因而两点不能重合，不能在 x 轴上，则由圆心和半径可知

$x_B \in (2, 6)$ ，

则 $\triangle FAB$ 的周长为 $|AF| + |AB| + |BF| = x_A + 2 + x_B - x_A + 4 = 6 + x_B$ ，

所以 $6 + x_B \in (8, 12)$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查了抛物线定义、方程及几何性质的简单应用，圆的几何性质应用，属于中档题.

8、C

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，求得 BC 边长，由此求得 AC 边上的高.

【详解】

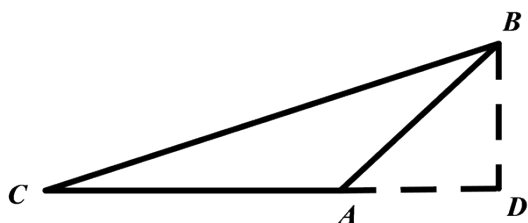
过 B 作 $BD \perp CA$ ，交 CA 的延长线于 D . 由于 $\cos A = -\frac{2}{3}$ ，所以 A 为钝角，且 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，所以

$$\sin \angle CBA = \sin(\pi - \angle CBA) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15} - 2}{6}. \text{在三角形}$$

ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{15} - 2}{\frac{\sqrt{15} - 2}{6}}$ ，所以 $BC = 2\sqrt{5}$. 在 $Rt\triangle BCD$ 中有

$$BD = BC \sin C = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \sqrt{5}, \text{即 } AC \text{ 边上的高为 } \sqrt{5}.$$

故选: C



【点睛】

本小题主要考查正弦定理解三角形，考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，属于中档题.

9、D

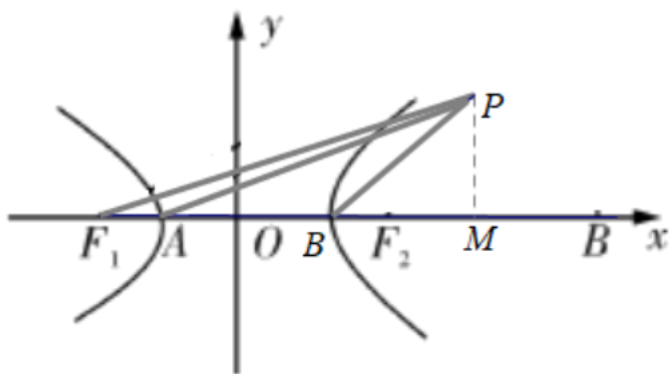
【解析】

根据 $\triangle PAB$ 为等腰三角形， $\angle ABP = 120^\circ$ 可求出点 P 的坐标，又由 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 可得出 a, c 关系，即可求出渐

近线斜率得解.

【详解】

如图，



因为 $\triangle PAB$ 为等腰三角形, $\angle ABP = 120^\circ$,

所以 $|PB| = |AB| = 2a$, $\angle PBM = 60^\circ$,

$$\therefore x_P = |PB| \cdot \cos 60^\circ + a = 2a, y_P = |PB| \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}a,$$

$$\text{又 } k_{PF_1} = \frac{\sqrt{3}a - 0}{2a + c} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore 2a = c$$

$$\therefore 3a^2 = b^2,$$

$$\text{解得 } \frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$,

故选: **D**

【点睛】

本题主要考查了双曲线的简单几何性质, 属于中档题.

10、 **A**

【解析】

分段求解函数零点, 数形结合, 分类讨论即可求得结果.

【详解】

作出 $y = x^2 - x$ 和 $y = 5 - x$, $y = 4|x|$ 的图像如下所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/057155104006006102>